中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030418

千切百斂

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳元鈞	吳浩誠
國二 翁叡禾	沈志強
國二 陳俊諺	

關鍵詞：三角形、收斂、幾何平均數

摘要

本研究主要在探討邊長比為$1:a$且重心重合的內、外正n邊形，當取外正n邊形的邊上一點為起始點(此起點與外正n邊形的頂點距離為x)，重複朝著內正n邊形的頂點畫切線，並觀察其數學性質。(θ為正n邊形一內角)

我們從研究正三角形開始，並且推廣到正n邊形，研究以下四項：

一、「切線與外正n邊形的交點」和「外正n邊形頂點」的距離通式

$$f(x)=\frac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$$

二、證明收斂正n邊形的存在性，並找出收斂點與外正n邊形頂點的距離

$$x=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$$

三、正n邊形可形成收斂正n邊形的內、外正n邊形邊長比例範圍

$$\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}\geq 0\text{，}1\leq a\leq\frac{2}{1-\cos\theta}$$

四、內、收斂與外正n邊形的邊長比為 $1:\sqrt{a}:a$

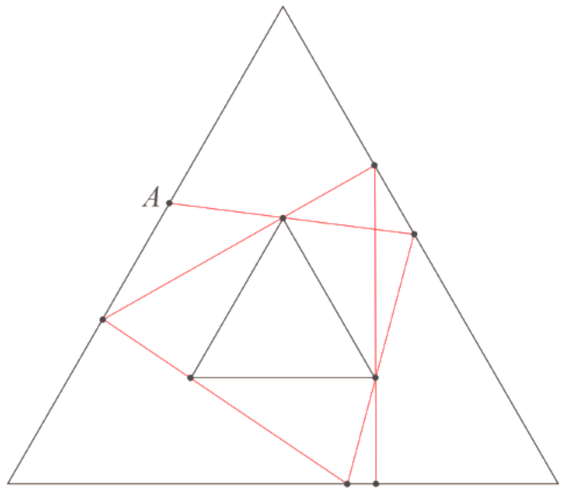
此時發現收斂正n邊形的邊長為內、外正n邊形邊長的**幾何平均數**。

最後，我們也針對**任意三角形**探討上述內容，並於研究過程中詳述。

壹、　研究動機

暑假時，我們在科學研習月刊讀到一篇森棚教官的數學題「**公園跑切線**」:

「如圖，正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長 $\frac{1}{3}$ 的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間為開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的 A 點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊然後再從這個點出發，反覆一直跑下去。如圖紅線為跑了五趟之後的結果。觀察這個結構並做一些實驗。請問聰明的讀者，你可以得到什麼結論？」



我們一開始先使用 *GeoGebra* 畫出內、外邊長比為1：3的正三角形，每次朝著內三角形的頂點作「切線」，作了非常多圈後便會「收斂」於邊上的三點，但當內、外邊長比為1：5時卻無法「收斂」於邊上的三點，我們也利用每條切線的斜率來看「收斂」情形，發現分別通過三頂點的切線斜率似乎會各自趨近於一個值，因此讓我們想要研究其中的奧妙。

貳、 研究目的

我們想深入探討畫了無限多圈後路線圖的收斂情形，列出要解決的問題如下：

一、找出同時「外切」於內正三角形、「內接」於外正三角形的收斂三角形

二、找出內、外正三角形邊長的最小比值及與收斂三角形之邊長比例關係

三、找到收斂三角形頂點與外正三角形頂點的距離通式

四、找出可形成收斂三角形的最大起始點範圍

五、推廣至正方形、正 n 邊形、任意三角形的收斂情形

六、使用幾何作圖找出收斂點位置

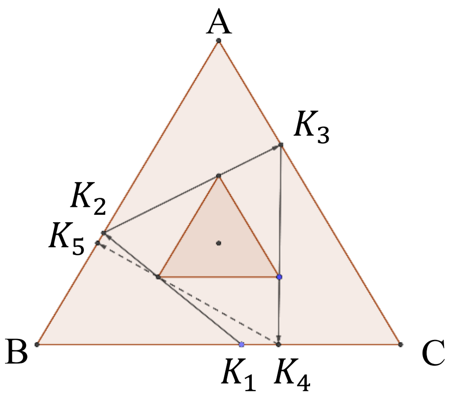
參、 研究設備及器材

GeoGebra 、*WolframAlpha*

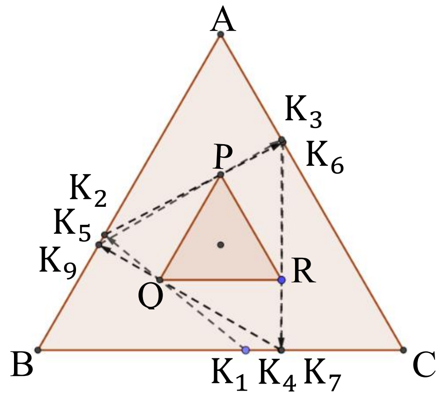
肆、 研究過程或方法

一、 觀察原始題目中的變化

我們依據森棚教官的數學題「公園跑切線」利用 *GeoGebra* 畫出符合題意的圖形，當多畫幾次切線之後，可以發現切線與外三角形的交點似乎越來越靠近某一個點，如圖(二)。



圖(一)

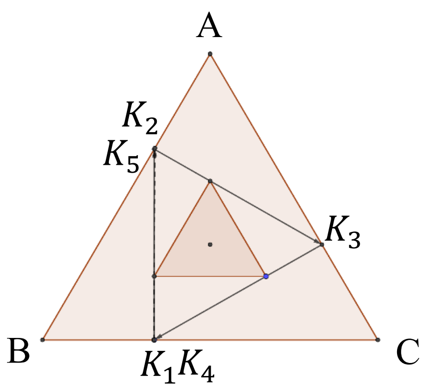


圖(二)

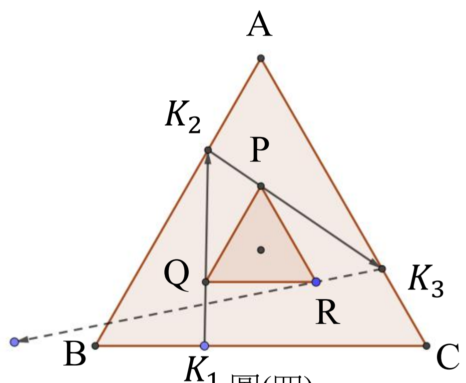
在上圖可發現，從起始點開始畫了一圈，並回到同一個邊上時，點是向右移的。再繼續畫一圈，發現從K_3到K_4，以及畫了第二圈的K_6到K_7，兩條線非常接近，並且在每一個邊上都有相同情況。所以我們推測每邊與切線交點所趨近的點(收斂點)連起來會是一個三角形，且**同時「外切」於內三角形與「內接」於外三角形**，此三角形我們稱它為收斂三角形。

接下來，我們將起始點嘗試向左移，發現當移動到某一點時，似乎可形成另一個三角形，我們暫時以翻轉的方式去想，從圖(二)可發現，若經過水平翻轉就與圖(三)非常類似，除非起始點直接在這個鏡像三角形頂點上，否則無論如何都不會收斂在這個三角形上。

我們繼續把起始點向左移後，發現$\overrightarrow{K_3R}$與$\overline{BC}$已無交點，無法形成收斂三角形，我們稱此情形為**發散**，如圖(四)。

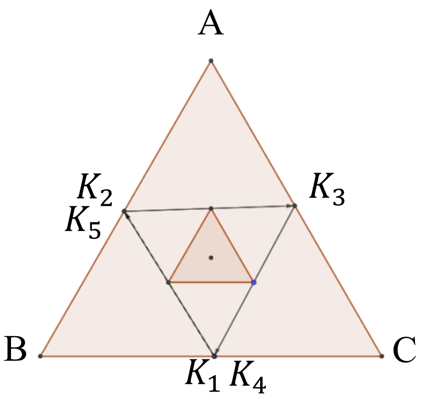


圖(三)

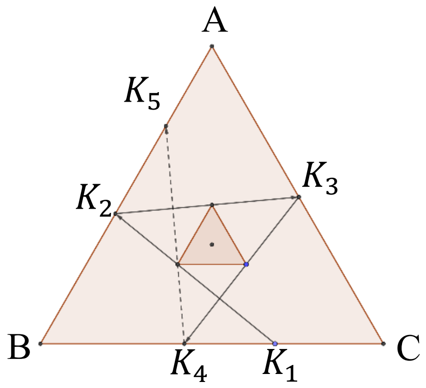


圖(四)

接著，我們改變原本內、外三角形的邊長比例，我們可以在內、外三角形比例為 1：4 時畫出以下收斂三角形，如圖(五)。但在 1：5 時卻畫不出任何收斂三角形，如圖(六)。



圖(五)



圖(六)

我們從觀察中發現幾點特性：

觀察一：當可形成收斂三角形時，內、外三角形邊長最小比值為$\frac{1}{4}$。

觀察二：當內、外三角形邊長比值大於$\frac{1}{4}$時，則有兩收斂三角形。

觀察三：當內、外三角形邊長比值等於$\frac{1}{4}$時，只有一收斂三角形。

觀察四：當起始點位於鏡像三角形頂點左側，則無法形成收斂三角形；

二、 初步探討正三角形之頂點與收斂三角形的距離通式

利用 *GeoGebra* 觀察變化後，我們一開始嘗試著將正三角形頂點坐標化，並觀察切線斜率的變化及極限值，發現三切線斜率似乎會各自趨近於一個值，但當圈數越來越多時，斜率的計算越趨複雜且難以觀察其規律，因此我們改以觀察「起始點」、「切線與外正三角形邊上交點」及「外正三角形頂點」的距離。

如圖(七)，令$\overline{BC}$上的K_1為起始點，K_2為$\overrightarrow{K_1Q}$與$\overline{AB}$的交點，K_3為$\overrightarrow{K_2P}$與$\overline{AC}$的交點，K_4為$\overrightarrow{K_3R}$與$\overline{BC}$的交點，以此類推。

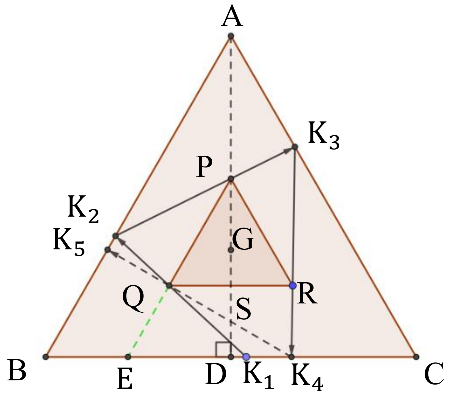
我們觀察到當內、外正三角形的邊長比改變，「切線與外正三角形邊上交點」與「外正三角形頂點」的距離也會改變，我們希望不只討論邊長比為1：3的情形，而是能得到在任意比例時的通式。以下本報告皆以**內正三角形邊長為 1、外正三角形邊長為 *a*** 做研究。

研究一：若令$\overline{K_1C}=x$，則可以得到 $\overline{K_2B}=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$

證明：令 $\overline{K_1C}=x$，則 $\overline{K_1B}=\overline{BC}-\overline{K_1C}=a-x$ 如圖(七)

作$\overline{BC}$上的高$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於 D 點，交$\overline{QR}$於 S 點，且 G 為重心

則 $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$，$\overline{PS}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



圖(七)

$\overline{GD}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$，$\overline{GP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{DP}=\overline{GD}+\overline{GP}=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

延長$\overline{PQ}$交$\overline{BC}$於 E 點$\Longrightarrow \overline{QE}//\overline{K_2B}$

$\overline{PE}=\dfrac{2\overline{DP}}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{3}+\dfrac{2}{3}$，$\overline{DE}=\dfrac{\overline{DP}}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{6}+\dfrac{1}{3}$

$\overline{QE}=\overline{PE}-\overline{PQ}=\dfrac{a}{3}+\dfrac{2}{3}-1=\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{3}$

$\overline{BE}=\overline{DB}-\overline{DE}=\dfrac{a}{2}-(\dfrac{a}{6}+\dfrac{1}{3})=\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{3}$

$\overline{K_1E}=\overline{K_1B}-\overline{BE}=a-x-(\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{3})=\dfrac{2}{3}a-x+\dfrac{1}{3}$

$\because\ \overline{QE}//\overline{K_2B}\ \Longrightarrow\ \Delta K_1QE\sim\Delta K_1K_2B$

$\therefore \overline{K_1E}:\overline{K_1B}=\overline{QE}:\overline{K_2B}$

$(\dfrac{2}{3}a-x+\dfrac{1}{3}):(a-x)=(\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{3}):\overline{K_2B}$

整理得 $\overline{K_2B}=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$ 故得證#

令$f(x)=\overline{K_2B}=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$，由研究一的結果可類推$\overline{K_3A}=f(f(x))$、$\overline{K_4C}=f(f(f(x)))$，為了方便表示，令$f_2(x)=f(f(x))$，$f_3(x)=f(f(f(x)))$，以此類推。

得到以上通式，我們想藉求此函數的極限，找出收斂點。首先，從原題內、外三角形邊長比為 1：3 開始討論。

討論一： $a=3$

$f(x)=\dfrac{6-2x}{7-3x}$、 $f_2(x)=\dfrac{30-14x}{31-15x}$、 $f_3(x)=\dfrac{126-62x}{127-63x}$ 、 $f_4(x)=\dfrac{510-254x}{511-255x}$

觀察分子、分母各係數間的規律，推得$f_k(x)=\dfrac{2^{2k+1}-2-(2^{2k}-2)x}{2^{2k+1}-1-(2^{2k}-1)x}$ 。

將$f_k(x)$取極限，$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^{2k+1}-2-(2^{2k}-2)x}{2^{2k+1}-1-(2^{2k}-1)x}=1$，也就是三邊的收斂點與頂點的距離都等於於 1，此時**收斂三角形也會是正三角形**。

因為我們知道正三角形各邊中點連線之三角形，邊長會是原來的$\dfrac{1}{2}$，再將此三角形的中點連線，則所形成的三角形會是原來最大三角形邊長的$\dfrac{1}{4}$。因此接著先討論$a=4$，且猜測收斂三角形的頂點會在外三角形的中點。

討論二： $a=4$

$f(x)=\dfrac{4-x}{3-x}$、 $f_2(x)=\dfrac{8-3x}{5-2x}$、 $f_3(x)=\dfrac{12-5x}{7-3x}$ 、 $f_4(x)=\dfrac{16-7x}{9-4x}$

觀察分子、分母各係數間的規律，推得$f_k(x)=\dfrac{4k-(2k-1)x}{2k+1-kx}$

將$f_k(x)$取極限，$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4k-(2k-1)x}{2k+1-kx}=2$，**收斂點**與頂點的距離會等於 2，也就是外三角形的中點，與我們的猜測相同，且此時**收斂三角形也會是正三角形**。

為了找出任意比例的收斂點，我們持續討論$a=2$，希望能找到規律。

討論三： $a=2$

$f(x)=\dfrac{2-x}{5-3x}$、 $f_2(x)=\dfrac{8-5x}{19-12x}$、 $f_3(x)=\dfrac{30-19x}{71-45x}$ 、 $f_4(x)=\dfrac{112-71x}{265-168x}$

由上述的式子中，我們一直無法看出規律，討論了很久後想到此函數後項皆與前項相關，且我們暑假到清華大學參訪時，教授的課程中有遞迴函數，因此我們試著用遞迴函數來處理。

先討論分子的常數項：

設$a_1 = 2$，$a_2 = 8$

觀察其遞迴關係為 $a_k = 4(a_{k-1}) - a_{k-2}$

因此令特徵方程式：$x^2 - 4x + 1 = 0$

解得 $x = 2 \pm \sqrt{3}$

基本解：$(2+\sqrt{3})^k$，$(2-\sqrt{3})^k$

一般解：$a_k = A_1(2+\sqrt{3})^k + A_2(2-\sqrt{3})^k$

初始條件：$\begin{cases} a_1 = 2 = A_1(2+\sqrt{3})^1 + A_2(2-\sqrt{3})^1 \\ a_2 = 8 = A_1(2+\sqrt{3})^2 + A_2(2-\sqrt{3})^2 \end{cases}$

$\Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$A_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以分子的常數項： $a_k = \frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^k - \frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^k$

同理，分子的 x 項係數、分母的常數項、分母的 x 項係數等，推導方式亦同，僅是 a_1 和 a_2 不同，因此在此省略。

最後，推導出以下通式：

$$f_k(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^k - (\frac{\sqrt{3}-1}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}+1}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}-1}{2}(2-\sqrt{3})^k - (\frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}$$

再將$f_k(x)$取極限：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^k - (\frac{\sqrt{3}-1}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}+1}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}-1}{2}(2-\sqrt{3})^k - (\frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^k + \frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}\text{-}1}{2}x}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{2\sqrt{3} - \left(3\sqrt{3}-3\right)x}{3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}x} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \times \frac{3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}x}{3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}x} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

即三邊的收斂點與頂點的距離會趨近於 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ ，且**收斂三角形也是正三角形**。

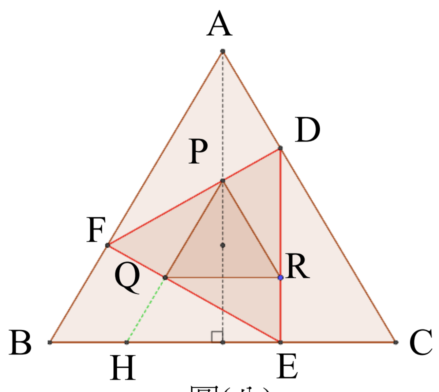
討論完$a = 2$、$a = 3$、$a = 4$，我們還是無法找到所有收斂三角形的通式，但我們相信收斂三角形存在，因此我們先假設收斂三角形存在，希望找出所有收斂三角形的通式，並討論收斂三角形的相關性質。(收斂三角形的存在性於研究三證明)

三、 探討正三角形之收斂三角形的通式及相關性質

已知內正三角形PQR邊長為1，而外正三角形ABC邊長為 a，假設存在三角形DEF為其收斂正三角形，如圖(八)。由討論一～三知道，三邊的收斂點到頂點的距離會相等，因此我們可得到研究二。

研究二：若令收斂點與外正三角形ABC頂點的距離$\overline{CE}$=$\overline{BF}$=$\overline{AD}$=x，則

$$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$$



圖(八)

證明：延伸$\overline{PQ}$交$\overline{BC}$於 H 點，同**研究一**的作法，已知

$$\overline{EH} : \overline{EB} = \overline{QH} : \overline{FB}$$

$$(\frac{2}{3}a-x+\frac{1}{3}):(a-x)=(\frac{a}{3}-\frac{1}{3}):x$$

化簡得 $x^2-ax+\frac{a^2}{3}=0$

解得$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

從研究二可得知每邊有兩個收斂點，與觀察二相同，且**由收斂點連線所成的三角形為正三角形**。而藉由研究二，我們發現了三個性質：

性質一：若兩正三角形存在收斂三角形，且當內正三角形邊長 1，外正三角形的邊長 a，

則 a 的範圍為$1 \le a \le 4$，也就是當$a > 4$並不存在收斂三角形。

說明：從研究二知$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，而$x$為實數必須$-(a-4)a\ge 0$，也就是$a \le 4$，又 a 為大正三角形的邊長，因此$a \ge 1$，所以$1 \le a \le 4$，這結果與觀察一相同。

性質二：若兩正三角形存在收斂三角形，則當起始點跟頂點的距離$x<\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，最後會收斂到收斂點距離頂點$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$處。而當起始點跟頂點的距離為$\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，則持續落在此點。

說明：

情況一：$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$為單一收斂點，只有當起始點與頂點的距離$x=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$時會持續落在這個點上。

情況二：當$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}<x<\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，可觀察到$f(x)$為遞減函數，遞減到趨近於$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$。

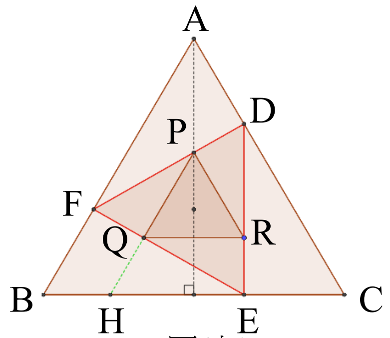
情況三：當$x<\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，可觀察到$f(x)$為遞增函數，遞增到趨近於$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$。

情況四：當$x>\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，可觀察到$f(x)$也為遞增函數，但遞增後會大於$a$，所以並不會有收斂三角形。

性質三：已知內正三角形PQR邊長為 1，而外正三角形ABC邊長為 a，假設存在三角形DEF為其收斂三角形，則三角形DEF的邊長為$\sqrt{a}$。也就是收斂三角形的邊長為內、外正三角形邊長的幾何平均數。

說明：如圖(九)，設$\overline{BF}=x$，則$\overline{BE}=a-x$，利用餘弦定理可得

$$\begin{aligned}\overline{EF}^2 &= x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\cos 60^\circ\\ &= x^2+(a-x)^2-x(a-x)\\ &= x^2+a^2-2ax+x^2-ax+x^2\\ &= 3x^2-3ax+a^2\end{aligned}$$



圖(九)

將研究二的結果 $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$代入

化簡後得 $\overline{EF}^2=a \Rightarrow \overline{EF}=\sqrt{a}$($-\sqrt{a}$不合)

發現性質三我們覺得很酷，因為這代表在內、外三角形重心重疊時，收斂三角形的邊長為內、外三角形邊長的**幾何平均數**。

在研究一我們證明了當起始點距離外正三角形一邊頂點 x 時，連接內正三角形頂點的切線會交外正三角形下一邊上的點與頂點的距離為 $f(x)=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$，當時只討論了 $a=2$、$a=3$、$a=4$時的收斂點與頂點的距離，並沒有找到任意邊長比的通式。因此，我們試著去觀察$f(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$、$f_4(x)$、$f_5(x)$、……，算到後面真的很複雜(在此省略不談)，但也因為堅持地觀察，後來我們發現換個方式表示，對我們的推論會有很大的幫助。

首先，將$f(x)=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$整理成$f(x)=\dfrac{a^2-a+(1-a)x}{2a+1+(-3)x}$，

並改寫成$f(x)=\dfrac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}$，其中$\alpha=a^2-a$、$\beta=1-a$、$\mu=2a+1$、$\nu=-3$，

則$f_2(x)=\dfrac{\alpha+\beta f(x)}{\mu+\nu f(x)}=\dfrac{\alpha+\beta\left(\dfrac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}\right)}{\mu+\nu\left(\dfrac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}\right)}$化簡得 $f_2(x)=\dfrac{(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x}{(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x}$，

$f_3(x)$、$f_4(x)$的式子有些複雜，如需詳閱請見連結：https://reurl.cc/E7ZvYA

我們將得出的式子與老師討論後，老師建議我們可以用矩陣來表示試試看。因此我們花了許多時間閱讀矩陣相關書籍，學習矩陣表示法及其運算規則。

我們將$f(x)=\dfrac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}$的分子、分母係數表示為$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}$

同$f(x)$的分子、分母係數表示法，將$f_2(x)$分子、分母的係數表示成$\begin{pmatrix}\mu_2 & \alpha_2\\ \nu_2 & \beta_2\end{pmatrix}$

依此類推$f_k(x)$分子、分母的係數表示成$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k\\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix}$

我們想將$f_2(x)=\dfrac{(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x}{(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x}$分子、分母的係數表示成矩陣

$f_2(x)$的分子$(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x$可以寫成$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}x$

$f_2(x)$的分母$(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x$ 可以寫成$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu \\ \nu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu \\ \nu\end{pmatrix}x$

因此，$\begin{pmatrix}\mu_2 & \alpha_2 \\ \nu_2 & \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^2$

同理$f_3(x)$分子、分母的係數

$$\begin{pmatrix}\mu_3 & \alpha_3 \\ \nu_3 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_2 & \alpha_2 \\ \nu_2 & \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^3$$

以此類推可得到$f_k(x)$分子、分母的係數$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k \\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$

研究三：若兩正三角形重心重疊，且當內正三角形邊長 1，外正三角形的邊長 a，其中$1 \le a \le 4$，則收斂點距離大三角形頂點$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$。

證明：在研究一我們證明了當起始點距離外正三角形一邊頂點 x 時，連接內正三角形頂點的切線會交外正三小形下一邊上的點與頂點的距離為 $f(x)=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$

令$f_k(x)=\dfrac{\alpha_k+\beta_k x}{\mu_k+\nu_k x}$，在前面已提到$f_k(x)$分子、分母的係數可表示成矩陣

$$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k \\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$$

我們想要化簡$\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$，因此利用線上數學軟體 *WolframAlpha* 將矩陣對角化得

$$\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}=PDP^{-1}$$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}(\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}-3a) & \frac{1}{6}(-3a-\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}) \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a-\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a})+2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(a+\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a})+2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} & \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}}+1)\\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} & \frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}}+1)\end{pmatrix}$$

為使化簡方便，令$\sqrt{-(a-4)a}=A$。

情況一：當$a\neq 4$時(因$a=4$時會使分母為0，故另外於情況二討論)

$$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}(\sqrt{3}A-3a) & \frac{1}{6}(-\sqrt{3}A-3a)\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^k}(-\sqrt{3}A+a+2)^k & 0\\ 0 & \frac{1}{2^k}(\sqrt{3}A+a+2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{A} & \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{A}+1)\\ -\frac{\sqrt{3}}{A} & \frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{A}+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k\\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix}$$

其中

$$\mu_k=\frac{1}{2^kA\times 6}(\sqrt{3}A-3a)\left(-\sqrt{3}A+a+2\right)^k-\frac{1}{2^kA\times 6}(-\sqrt{3}A-3a)\left(\sqrt{3}A+a+2\right)^k$$

$$\nu_k=\frac{1}{2^kA}\left(-\sqrt{3}A+a+2\right)^k-\frac{1}{2^kA}\left(\sqrt{3}A+a+2\right)^k$$

$$\alpha_k=\frac{1}{2^{k+1}\times 6}(\sqrt{3}A-3a)\left(\frac{\sqrt{3}a}{A}+1\right)\left(-\sqrt{3}A+a+2\right)^k$$

$$+\frac{1}{2^{k+1}\times 6}(-\sqrt{3}A-3a)\left(-\frac{\sqrt{3}a}{A}+1\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{A}+\mathrm{a}+2\right)^k$$

$$\beta_k=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{\sqrt{3}a}{A}+1\right)\left(-\sqrt{3}A+a+2\right)^k+\frac{1}{2^{n+1}}\left(-\frac{\sqrt{3}a}{A}+1\right)\left(-\sqrt{3}A+a+2\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k x}{\mu_k+\nu_k x}$$ 上下同除$\left(\sqrt{3}A+a+2\right)^k$並化簡

$$=\frac{\left(-\sqrt{3}A-3a+6x\right)\left(-\sqrt{3}a+A\right)}{-2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}A-3a+6x\right)}=\frac{\sqrt{3}a+A}{-2\sqrt{3}}$$

將$A=\sqrt{-(a-4)a}$ 代回並化簡得：

當$1 \le a < 4$時， $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

情況二：當$a=4$時，得$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 12\\ -3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k=3^k\begin{pmatrix}2k+1 & 4k\\ -k & 1-2k\end{pmatrix}$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k x}{\mu_k+\nu_k x}=\lim_{k\to\infty}\frac{4k+(1-2k)x}{(2k+1)-kx}=\frac{4-2x}{2-x}=2$$

當$a=4$時，$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}=2=\lim_{k\to\infty} f_k(x)$。

因此我們證明了當$1 \le a \le 4$，兩正三角形存在收斂三角形，而收斂點距離外正三角形頂點$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，這個結果與研究二相同。

至此，我們完成了正三角形的研究，接著我們希望能探討任意三角形、正多邊形及任意多邊形是否也存在收斂三角形或收斂多邊形，且是否擁有類似的性質。相較之下，正多邊形似乎較有規律，因此我們先由正多邊形開始討論。

四、 探討正多邊形之收斂正多邊形的通式及相關性質

正 n 邊對我們來說，相對困難許多，無論是表示法或求邊長，我們嘗試著用三角函數來處理。我們令$\overline{CD}$上的K_1為起始點，K_2為$\overrightarrow{K_1A}$與$\overline{BC}$的交點，如圖(十)。另外，我們令內正 n 邊形邊長為 1，而外正 n 邊形邊長為 a，正 n 邊形一內角為$\theta=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$。

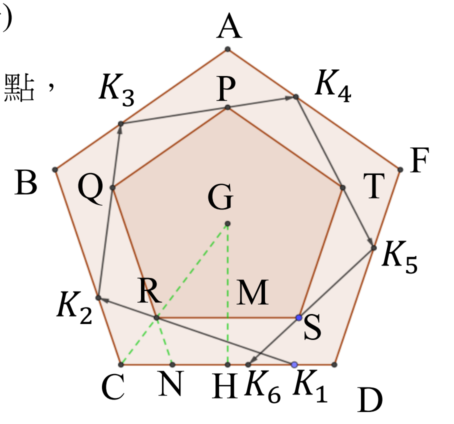
研究四：若令$\overline{K_1C}=x$，則可以得到 $f(x)=\overline{K_2C}=\frac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$

證明：令 $\overline{K_1C}=x$，則 $\overline{K_1C}=\overline{DC}-\overline{K_1D}=a-x$ 如圖(十)

令 G 為重心，作$\overline{GH}\perp\overline{BC}$交$\overline{BC}$於 H 點，交$\overline{RS}$於 M 點，

則 $\overline{CH}=\frac{a}{2}$，$\overline{RM}=\frac{1}{2}$ 且 $\angle GRM=\angle GCH=\frac{\theta}{2}$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{RM}}{\overline{GR}}\Rightarrow\overline{GR}=\frac{\overline{RM}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$



圖(十)

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{CH}}{\overline{GC}}\Rightarrow \overline{GC}=\frac{\overline{CH}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{a}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{RC}=\overline{GC}-\overline{GR}=\frac{a}{2\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(a-1)$$

延長$\overline{QR}$交$\overline{CD}$於 N 點$\Longrightarrow \overline{RN}//\overline{K_2C}\Rightarrow \angle RNC=180^\circ-\theta$

在三角形RCN中，由正弦定理得

$$\frac{\overline{RC}}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{\overline{RN}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(a-1)}{\sin\theta}=\frac{\overline{RN}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(a-1)}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\overline{RN}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

化簡後得$\overline{RN}=\dfrac{1}{2(\cos\theta+1)}(a-1)$ ， 又$\overline{RN}=\overline{CN}$

$\overline{K_1N}=\overline{K_1C}-\overline{CN}$

$\because\ \overline{RN}//\overline{K_2B}\ \Longrightarrow\ \Delta K_1RN\sim\Delta K_1K_2C$

$\therefore\ \overline{K_1N}:\overline{K_1C}=\overline{RN}:\overline{K_2C}$

$$\left(a-x-\frac{1}{2(\cos\theta+1)}(a-1)\right):\left(\frac{1}{2(\cos\theta+1)}(a-1)\right)=(a-x):\overline{K_2C}$$

化簡後得$\boldsymbol{f(x)=\overline{K_2C}}=\dfrac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$ 故得證#

接著我們想求收斂點跟外正 n 邊形頂點的距離，因為有了三角形及正方形的經驗，我們直接利用矩陣計算。

研究五：若兩正多邊形重心重疊，且當內正多邊形邊長 1，外正多邊形的邊長 a，

$1\le a\le\dfrac{2}{1-\cos\theta}$，則收斂點距離大正多邊形頂點$\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$。

證明：由研究四，可以令$f(x)=\overline{K_2C}=\dfrac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$

改寫成$f(x)=\dfrac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}$，

其中$\alpha=a^2-a$、$\beta=1-a$、$\mu=(2(\cos\theta+1)-1)a+1$、$\nu=2(\cos\theta+1)$。

令$f_k(x)=\dfrac{\alpha_k+\beta_k x}{\mu_k+\nu_k x}$，在前面已提到$f_k(x)$分子、分母的係數可表示成矩陣

$$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k\\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$$

我們想要化簡$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$，因此利用線上數學軟體 *WolframAlpha* 將矩陣對角化得

$$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}=PDP^{-1}$$

令$\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}=M$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(-a\times\cos\theta-a+\dfrac{M}{\cos^2\frac{\theta}{2}}) & -\frac{1}{4}(a\times\cos\theta+a+\dfrac{M}{\cos^2\frac{\theta}{2}})\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}a\times\cos\theta-M+1 & 0\\ 0 & a\times\cos\theta+M+1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{M} & \dfrac{a\times\cos\theta-a+M}{2M}\\ -\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{M} & \dfrac{-a\times\cos\theta-a+M}{2M}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k=PD^kP^{-1}$$

此處同研究三的方法，將矩陣乘開後轉換成分數，再對分子、分母同除

$(a\times\cos\theta+M+1)^k$，並對$k$取極限，得到以下式子：

$$\frac{\left(a\times\cos\theta+a-M\right)\left(a\times\cos\theta+a+\sec^2\frac{\theta}{2}M\right)+4\left(-a\times\cos\theta-a+M\right)x}{2(\cos\theta+1)\left(a\times\cos\theta+a+\sec^2\frac{\theta}{2}M\right)-16\cos^2\frac{\theta}{2}x}$$

$$=\frac{\left(a\times\cos\theta+a-M\right)\left(a\times\cos\theta+a+\sec^2\frac{\theta}{2}-4x\right)}{2(\cos\theta+1)\left(a\times\cos\theta+a+\sec^2\frac{\theta}{2}-4x\right)}=\frac{a\times\cos\theta+a-M}{2(\cos\theta+1)}\qquad \text{將}M\text{代回}$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$$

同理，正 n 邊形也會有兩個收斂點，即 $x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

我們得出收斂點與外正 n 邊形頂點的距離，同時證明「**收斂正 n 邊形**」的存在。

接下來探討正 n 邊形是否也有跟正三角形和正方形相似的性質。

性質四：當內、外 n 邊形皆為正 n 邊形時，收斂 n 邊形也是正 n 邊形

說明：由研究五可得知，在出現收斂 n 邊形後，收斂 n 邊形的頂點與外正 n 邊形的頂點的距離皆為 $\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$，由此可知收斂 n 邊形為正 n 邊形。

性質五：若兩正 n 邊形存在收斂正 n 邊形，且當內正 n 邊形邊長 1，外正 n 邊形的邊長 a，則 a 的範圍為 $1\leq a\leq\frac{2}{1-\cos\theta}$，也就是當 $a>\frac{2}{1-\cos\theta}$ 並不存在收斂正 n 邊形。

說明：由研究五得 $x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

$a^2\cos^2\theta-a^2+2a\cos\theta+2a\geq 0$

$a^2(\cos\theta+1)(\cos\theta-1)\geq -2a(\cos\theta+1)\geq 0$

$a(\cos\theta-1)\geq -2$　　又外正 n 邊形的邊長為 a

$1\leq a\leq\frac{2}{1-\cos\theta}\quad(-1<\cos\theta<1)$

性質六：若兩 n 邊形存在收斂正 n 邊形，則當起始點跟頂點的距離 $x<\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$，最後會收斂到收斂點距離頂點 $\frac{a}{2}-\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$ 處。而當起始點跟頂點的距離為 $\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$，則持續落在此點。

說明：

情況一：$\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$ 為單一收斂點，只有當起始點與頂點的距離為 $x=\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$ 時會持續落在這個點上。

情況二：當 $\frac{a}{2}-\frac{M}{2(\cos\theta+1)}<x<\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$，可觀察到 $f(x)$ 為遞減函數，遞減到趨近於 $\frac{a}{2}-\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$。

情況三：當 $x<\frac{a}{2}-\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$，可觀察到 $f(x)$ 為遞增函數，遞增到趨近 $\frac{a}{2}-\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$

情況四：當 $x>\frac{a}{2}+\frac{M}{2(\cos\theta+1)}$，可觀察到 $f(x)$ 也為遞增函數，但遞增後會大於 a，所以不會有收斂 n 邊形。

性質七：已知內正 n 邊形邊長為 1，而外正 n 邊形邊長為 a，若正 n 邊形為其收斂正 n 邊形，則正 n 邊形的邊長為 $\sqrt{a}$。也就是收斂正 n 邊形的邊長為內、外正 n 邊形邊長的幾何平均數。

說明：設 $\overline{JK}=\overline{NJ}=\overline{MN}=\overline{LM}=\overline{LK}=l,\ \overline{KD}=x$

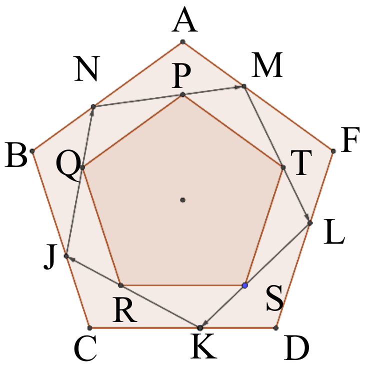
$$l^2=x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\cos\theta$$

$$l=\sqrt{x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\cos\theta}$$

$$1^2=(\frac{x}{a}l)^2+(\frac{a-x}{a}l)^2-(2\times\frac{x}{a}l\times\frac{a-x}{a}l\times\cos\theta)$$

$$=\frac{l^2}{a^2}(x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\cos\theta)$$

$$=\frac{l^4}{a^2}\quad\Rightarrow l^4=a^2\Rightarrow l=\sqrt{a}\qquad(a>0)$$



圖(十一)

也就是收斂正 n 邊形的邊長為內、外 n 邊形邊長的幾何平均數。

五、 探討任意三角形之收斂任意三角形的通式及相關性質

因為原始題目為正三角形，所以我們希望可以推廣至任意三角形(邊長比$1\!:a$)。

已知內三角形PQR邊長為p、q、r ，而外三角形ABC邊長為ap、aq、ar，假設存在三角形DEF為其收斂三角形。在經過 *GeoGebra* 畫圖之後，我們曾測試許多不一樣的三角形，並發現當三邊長皆不同時，收斂三角形不與內、外三角形相似，且找不到收斂三角形的邊長與 p、q、r 的關係，這使我們更加想要去探討它。

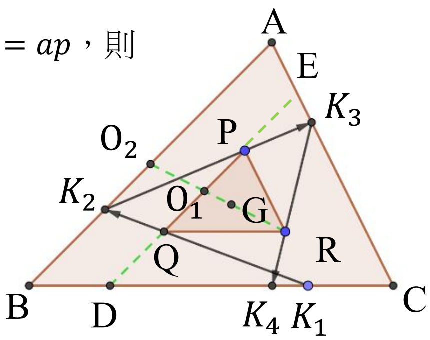
研究六：若令收斂點與外三角形ABC頂點的距離$\overline{K_1C}=x$，$\overline{K_2B}=R(x)$，$\overline{K_3A}=Q(x)$，

$\overline{K_4C}=P(x)$，且設$\overline{RO}=y$，$\overline{AB}=ar$，$\overline{AC}=aq$，$\overline{BC}=ap$，則

$\overline{GC}=\frac{2}{3}ay$，$\overline{GO_1}=\frac{1}{3}y$，$\overline{CO_1}=\overline{GC}+\overline{GO_1}=\frac{2}{3}ay+\frac{1}{3}y$

$\overline{CO_1}:\overline{CO_2}=\overline{DE}:\overline{AB}$

$\left(\frac{2}{3}ay+\frac{1}{3}y\right):ay=\overline{DE}:ar$



圖(十二)

$$\overline{DQ}=\frac{\overline{DE}-r}{2}=\frac{\frac{2}{3}ar-\frac{2}{3}r}{2}=\frac{ar}{3}-\frac{r}{3}=\frac{r(a-1)}{3}\quad\left(\overline{BD}=\frac{p(a-1)}{3}\right)$$

$\overline{DK_1}:\overline{BK_1}=\overline{DQ}:R(x)$

$$\left(ap-x-\frac{p(a-1)}{3}\right):(ap-x)=\left(\frac{r(a-1)}{3}\right):R(x)$$

$(3ap-3x-p(a-1)):(ap-x)=r(a-1):R(x)$

因為任意三角形每個邊長不同，無法皆用單一型態表示表示，所以我們分別用

$P(x)$、$R(x)$、$Q(x)$表示：

1.如果落點在$\overline{AB}$，通式為$R(x)=\dfrac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}$

2.如果落點在$\overline{AC}$，通式為$Q(x)=\dfrac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}$

3.如果落點在$\overline{BC}$，通式為$P(x)=\dfrac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$

從上述式子中，無法計算收斂點與外三角形頂點距離，所以我們優先從矩陣開始計算。

研究七：在研究六我們找出了當起始點距離外三角形一邊頂點x時，連接內三角形頂點的切線會交外三角形下一邊上的點與頂點的距離通式。接下來我們會如正三角形一樣用矩陣來證明它。

$$R(x)=\frac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}$$
$$Q(x)=\frac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}$$
$$P(x)=\frac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$$

觀察可發現任意三角形的$R(x)$、$Q(x)$、$P(x)$不看p、q、r時，常數及x項係數都與正三角形的$f(x)$相同。

$$R(x)=\frac{pr\alpha+r\beta x}{p\mu+\nu x}\Rightarrow\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}$$

$$Q(x)=\frac{rq\alpha+q\beta x}{r\mu+\nu x}\Rightarrow\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}$$

$$P(x)=\frac{qp\alpha+p\beta x}{q\mu+\nu x}\Rightarrow\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}$$

其中$\alpha=a^2-a$，$\beta=(1-a)$，$\mu=(2a+1)$，$\nu=-3$

為了方便後續描述，令$P\left(Q\big(R(x)\big)\right)=S(x)$

當我們畫一圈之後，情形如下

$$\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}$$

$$=rq\begin{pmatrix}p(\mu(\mu^2+a\nu)+\nu(a\mu+a\beta)) & p^2(\alpha(\mu^2+\alpha\nu)+\beta(\alpha\mu+\alpha\beta))\\ \mu(\mu\nu+\beta\nu)+\nu(a\nu+\beta^2) & p(\alpha(\mu\nu+\beta\nu)+\beta(\alpha\nu+\beta^2))\end{pmatrix}$$

$$=rq\begin{pmatrix}p\mu_3 & p^2\alpha_3\\ \nu_4 & p\beta_3\end{pmatrix}\longrightarrow S(x)$$

將**正三角形**的$f_3(x)$轉換為矩陣如下：

$$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\mu_1 & \alpha_1\\ \nu_1 & \beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \alpha_1\\ \nu_1 & \beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \alpha_1\\ \nu_1 & \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_3 & \alpha_3\\ \nu_3 & \beta_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu(\mu^2+a\nu)+\nu(a\mu+a\beta) & \alpha(\mu^2+\alpha\nu)+\beta(\alpha\mu+\alpha\beta)\\ \mu(\mu\nu+\beta\nu)+\nu(a\nu+\beta^2) & \alpha(\mu\nu+\beta\nu)+\beta(\alpha\nu+\beta^2)\end{pmatrix}$$

任意三角形與**正三角形**的矩陣比較如下：

$$\left(\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}\right)^k \text{不看}p\text{、}q\text{、}r\text{會等於}\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^{3k}$$

$$\left(\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}\right)^k\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix} \text{不看}p\text{、}q\text{、}r\text{會等於}\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^{3k+1}$$

$$\left(\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}\right)^k\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix} \text{不看}p\text{、}q\text{、}r\text{會等於}\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^{3k+2}$$

當畫了四次切線：$rqp\begin{pmatrix}p\mu_4 & pr\alpha_4\\ \nu_4 & r\beta_4\end{pmatrix}\to R(S(x))$

當畫了五次切線：$r^2qp\begin{pmatrix}p\mu_5 & pr\alpha_5\\ \nu_5 & q\beta_5\end{pmatrix}\to Q(R(S(x)))$

當畫了六次切線：$r^2q^2p\begin{pmatrix}p\mu_6 & p^2\alpha_6\\ \nu_6 & p\beta_6\end{pmatrix}\to P(Q(R(S(x))))=S_2(x)$

我們可以得知：任意三角形的切線不管畫了幾次，當不看p、q、r時都與正三角形的矩陣相同，又在從矩陣提出的p、q、r轉換為分數時可被約分，因此矩陣只會有三種型態：

$$\begin{pmatrix}p\mu_k & p^2\alpha_k\\ \nu_k & p\beta_k\end{pmatrix}\text{、}\begin{pmatrix}p\mu_{k+1} & pr\alpha_{k+1}\\ \nu_{k+1} & q\beta_{k+1}\end{pmatrix}\text{、}\begin{pmatrix}p\mu_{k+2} & pr\alpha_{k+2}\\ \nu_{k+2} & r\beta_{k+2}\end{pmatrix}$$

當$\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$對$k$取極限並轉換為分數時會等於$\dfrac{(-3A+3a)\left(-\sqrt{3}a+A\right)+6\left(-\sqrt{3}a+A\right)x}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}A+3a\right)+6(-2\sqrt{3}a)x}$

所以$\left(\begin{pmatrix} p\mu & pr\alpha \\ \nu & r\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\mu & rq\alpha \\ \nu & q\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q\mu & qp\alpha \\ \nu & p\beta \end{pmatrix}\right)^k$對 k 取極限後，相當於落點在$\overline{\text{BC}}$上，

且與外三角形頂點距離為：

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \frac{p^2(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6p(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}p(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x} = p\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

$\left(\begin{pmatrix} p\mu & pr\alpha \\ \nu & r\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\mu & rq\alpha \\ \nu & q\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q\mu & qp\alpha \\ \nu & p\beta \end{pmatrix}\right)^k \begin{pmatrix} r\mu & rq\alpha \\ \nu & q\beta \end{pmatrix}$對 k 取極限後，相當於落點在$\overline{\text{AB}}$上，

且與外三角形頂點距離為：

$$\lim_{k\to\infty} R(S_k(x)) = \frac{pr(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6r(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}p(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x} = r\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

$\left(\begin{pmatrix} p\mu & pr\alpha \\ \nu & r\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\mu & rq\alpha \\ \nu & q\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q\mu & qp\alpha \\ \nu & p\beta \end{pmatrix}\right)^k \begin{pmatrix} r\mu & rq\alpha \\ \nu & q\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q\mu & qp\alpha \\ \nu & p\beta \end{pmatrix}$對 k 取極限後，

相當於落點在$\overline{\text{AC}}$上，且與外三角形頂點距離為：

$$\lim_{k\to\infty} Q(R(S_k(x))) = \frac{pq(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6q(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}q(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x} = q\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

性質八：當出現收斂三角形後，因為每邊長不同，使得收斂點與外三角形頂點距離在每邊上皆不等長，但「外三角形邊長」與「收斂點與外三角形頂點距離」比例皆相等。

說明：當出現收斂三角形時：

$$ap：p\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right) = a：\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

$$aq：q\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right) = a：\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

$$ar：r\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right) = a：\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

每邊上的比例皆為$a：\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$。

性質九：同正三角形，若兩任意三角形存在收斂三角形，且當內三角形邊長為 1，外三角形的邊長為 a，則 a 的範圍為$1 \le a \le 4$，也就是當$a > 4$並不存在收斂三角形。

說明：從研究七得

$$x = p\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right), r\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right), q\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$$

而x為實數必須$-(a-4)a \ge 0$，也就是$a \le 4$，又 a 為大三角形的邊長，

因此$a \ge 1$，所以$1 \le a \le 4$。

性質十：同正三角形，若兩任意三角形存在收斂三角形，則當起始點跟頂點的距離

$x <\ p\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$(當$p$代換為$q, r$時同理)，

最後會收斂到收斂點距離頂點 $p\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$處。

而當起始點跟頂點的距離等於 $p\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，則此點不移動。

說明：

情況一： $p\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$為單一收斂點，

只有當$x = p\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$時會持續落在這個點上。

情況二：當 $p\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right) < x < p\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，

可觀察到$P(x)$為遞減函數，遞減到趨近於 $p\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$。

情況三：當$x<p\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，可觀察到$P(x)$為遞增函數，

遞增到趨近於 $p\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$。

情況四：當$x>p\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，可觀察到$P(x)$為遞增函數，

但遞增後會大於a，所以並不會有收斂三角形。

做到最後我們發現：原題目中作者的原意應該是要我們發現收斂三角形的**邊長會是內、外三角形邊長的幾何平均數**，但在我們進一步研究中發現了許多出乎意料的結果，也讓我們的報告變得多采多姿！

至此，我們已經研究完任意三角形跟正n邊形，但都是利用代數的方法進行探討，接下來希望可以直接利用幾何作圖找出收斂點位置，並與之前代數結果作比較。

六、 以幾何作圖探討收斂點及其相關性質

研究八：以Q、G、R三點畫圓(圓O_1)，則此圓與外三角形的交點(K、K'點)即為收斂點。

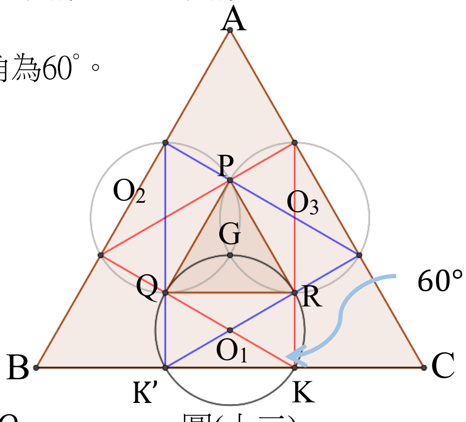
說明：從前面得知，若內外三角形皆為正三角形時，則收斂三角形為正三角形，

因此內三角形相鄰兩頂點與收斂點(K點)所形成的夾角為60°。

又$\angle QGR=120^\circ$，則四邊形$QGRK$為圓內接四邊形，

即過Q、G、R的圓O_1必通過K點，如圖(十三)，

$\angle QKR=\frac{1}{2}QR=60^\circ$。



圖(十三)

在這裡可發現，因$\angle QGR=120^\circ$，故圓O_1的圓心O_1恰為G點對$\overline{QR}$所作之對稱點，對$\overline{PQ}$、$\overline{PR}$亦可得出O_2、O_3。

接下來利用幾何作圖印證研究二用代數計算的結果，如(圖十四)。

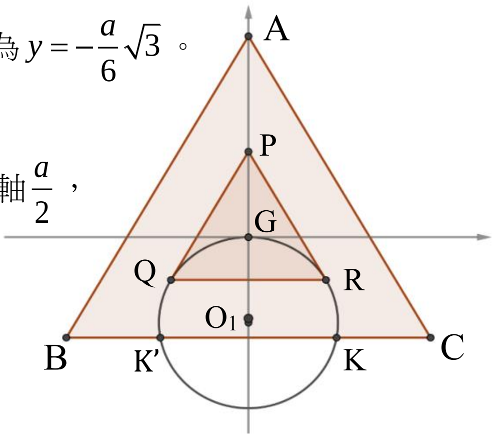
設正三角形的重心G於$(0,0)$，所以圓O_1的圓心O_1位於$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，半徑為$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

圓O_1的方程式為$x^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$，$\overline{BC}$的直線方程式為$y=-\frac{a}{6}\sqrt{3}$。

解出圓O_1與$\overline{BC}$交點為$\left(\frac{\pm\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6},0\right)$，又$C$距離$y$軸$\frac{a}{2}$，

所以頂點距離收斂點為$\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$，

此幾何作圖結果與代數計算結果相符。

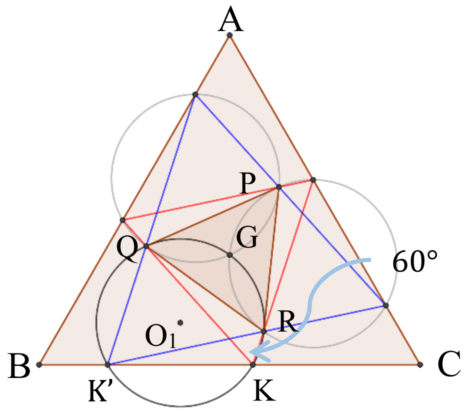


圖(十四)

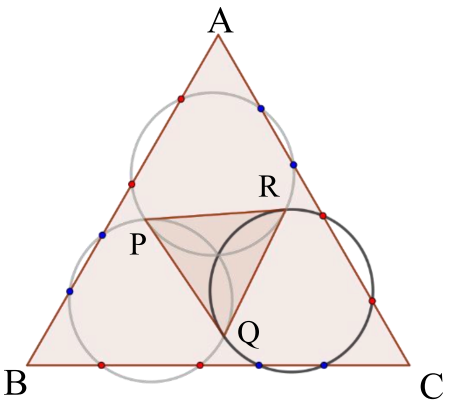
接下來我們改變原題，將內正三角形旋轉，找出其收斂點及其相關性質。之前有想用代數計算，但非常困難，所以想用幾何來進行研究。

研究九：以Q、G、R三點畫圓(圓O_1)，則此圓與外三角形的交點(K、K'點)即為收斂點。

說明：同研究八， 若內外三角形皆為正三角形時，則收斂三角形為正三角形，且圓O_1、圓O_2、圓O_3分別與外三角形交於兩點，即為收斂點，如圖(十五)。



圖(十五)



圖(十六)

此時發現兩收斂三角形不再全等且鏡射，故暫不討論收斂三角形之邊長。上述有例外的情形如圖(十六)，內外三角形在特定邊長比及旋轉角度下，圓可能與外三角形有四交點，由外三角形$\overline{BC}$邊上的點向旋轉後的內三角形Q點作切線，此時$\overline{BC}$邊上的點若取紅色兩點，則形成逆時針的收斂三角形，故在此稱紅色點為逆收斂點，不在我們的討論範圍。

接下來以旋轉的三角形，探討其收斂點，並以座標探討收斂點與頂點距離之關係。

研究十：若內正三角形以重心G為圓心順時針旋轉θ，則收斂點與外正三角形頂點距離為

$$\frac{a}{2}-\left(\frac{\sqrt{4-(a+2\cos\theta)^2}-2\sin\theta}{2\sqrt{3}}\right)。$$

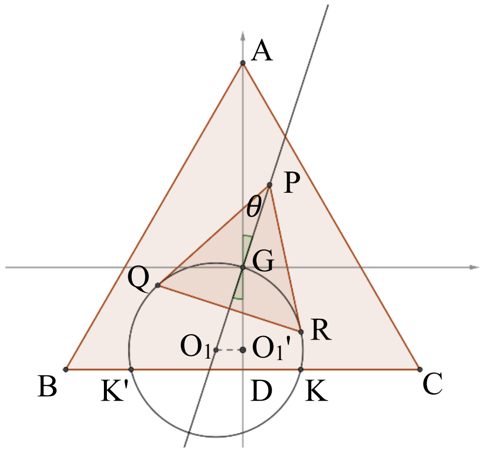
說明：為方便表示，將圖形置於直角坐標系上，且內外三角形重心G與原點(0,0)重合，如圖(十七)，以$\overline{QR}$為對稱軸，設O_1為G的對稱點，O_1'為O_1至$\overleftrightarrow{AG}$的垂足。

由ΔPQR邊長為1，可得$\overline{GO_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且由順時針旋轉$\theta$，得$\angle AGP=\angle O_1GO_1'=\theta$

利用三角函數得$\cos\theta=\frac{\overline{GO_1'}}{\overline{GO_1}}$，$\sin\theta=\frac{\overline{O_1O_1'}}{\overline{GO_1}}$

又$\overline{GO_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，則$\overline{GO_1'}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta$，$\overline{O_1O_1'}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$

得O_1之坐標為$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta,-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)$



圖(十七)

由半徑$\overline{GO_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，圓心$O_1=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta,-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)$

可得圓O_1方程式為$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

利用ΔABC邊長為a可得$\overline{BC}$上的高$\overline{AD}$為$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，且G為重心，則$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$

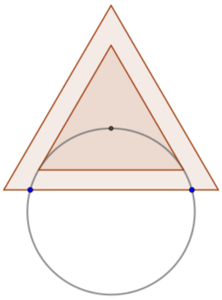
得$\overline{GD}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，又$G$點為原點(0,0)，得$\overleftrightarrow{BC}$方程式為$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}a$。

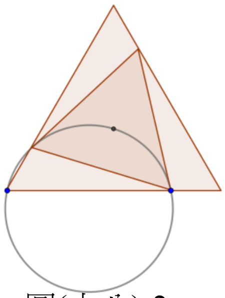
求得$\overleftrightarrow{BC}$與圓O_1交點座標為

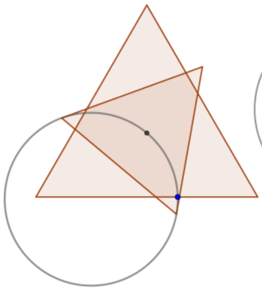
求得$\left(\frac{\pm\sqrt{4-(a-2\cos\theta)^2}-2\sin\theta}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$即為收斂點$K$與$K'$之$x$坐標

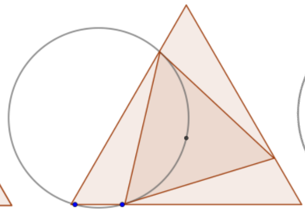
故收斂點與頂點之距離為$\frac{a}{2}-\left(\frac{\pm\sqrt{4-(a-2\cos\theta)^2}-2\sin\theta}{2\sqrt{3}}\right)$

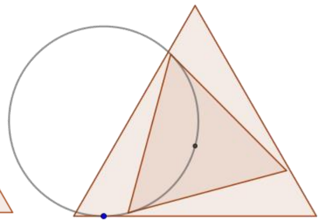
我們利用 GGB 觀察$1 \le a \le 2$旋轉三角形時發現以下幾點情形


圖(十八)-1


圖(十八)-2


圖(十八)-3


圖(十八)-4


圖(十八)-5

1.三角形未旋轉前有兩個收斂點，如圖(十八)-1。

2.將內三角形頂點旋轉到外三角形邊上時有兩個收斂點，一個與外三角形頂點重疊、一個與內三角形頂點重疊，如圖(十八)-2。

3.內三角形頂點旋轉後超出外三角形，與圓有交點但並非收斂點，如圖(十八)-3。

4.將內三角形頂點再度旋轉到外三角形邊上時有兩個收斂點，一個與外三角形頂點重疊、一個與內三角形頂點重疊，如圖(十八)-4。

5.將圓旋轉至與外三角形底邊切於一點，可得到唯一收斂點，如圖(十八)-5。

我們想知道旋轉幾度時會有收斂三角形

性質十一：當內三角形旋轉$\boldsymbol{\theta}$時，若$\boldsymbol{\theta}$的範圍為

$$if\ \ 1 \le a \le 2 \begin{cases} 0^\circ \le \theta \le 60^\circ - \cos^{-1}\dfrac{a}{2} \\ 60^\circ + \cos^{-1}\dfrac{a}{2} \le \theta \le 90^\circ + \cos^{-1}\dfrac{2-a}{2} \end{cases},$$

$$if\ \ 2 \le a \le 4 \quad \frac{a}{2} - 1 \le \cos\theta \le \frac{a}{2} + 1$$ **可形成收斂三角形。**

此時因$\dfrac{a}{2} - \left(\dfrac{\pm\sqrt{4-(a-2\cos\theta)^2} - 2\sin\theta}{2\sqrt{3}} \right)$根號內為正數，故可得知

$\dfrac{a}{2} - 1 \le \cos\theta \le \dfrac{a}{2} + 1$(因$-1 \le \cos\theta \le 1$故$\dfrac{a}{2} + 1$可視為1)。

但在$1 \le a \le 2$時，內三角形頂點旋轉後可能會超過外三角形，故θ範圍改變。

已知內三角形的外接圓方程式為 $x^2+y^2=\frac{1}{3}$，$\overleftrightarrow{BC}=-\frac{\sqrt{3}}{6}a$，交點為 $\left(\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}a^2},-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)(1\le a\le 2)$，因此在$1\le a\le 2$時內三角形旋轉後有可能超過外三角形。

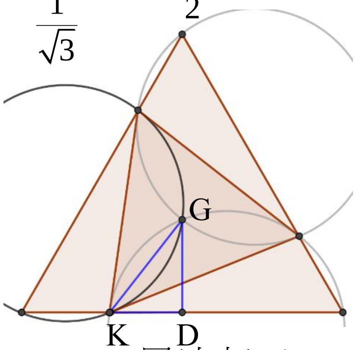
如圖(十九)-1、(十九)-2，設$\theta_1=\angle KGD$，$\theta_2=\angle O_1GF$，利用餘弦定理可知

$$\cos\theta_1=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}a^2\right)}{2\times\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{a}{2}$$

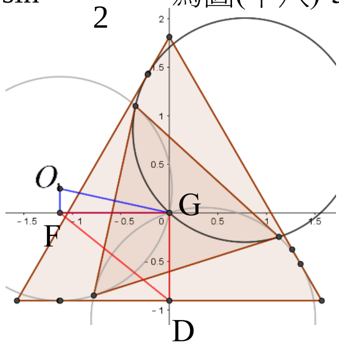
，因此$\theta\le 60^\circ-\cos^{-1}\frac{a}{2}$為圖(十八)-2的情形，$\theta\ge 60^\circ+\cos^{-1}\frac{a}{2}$為圖(十八)-4的情形。接下來要求得$\theta$的最大範圍，

$$\sin\theta_2=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2-a}{2}$$

，θ的最大值為$90^\circ+\sin^{-1}\frac{2-a}{2}$，為圖(十八)-5的情形。



圖(十九) -1

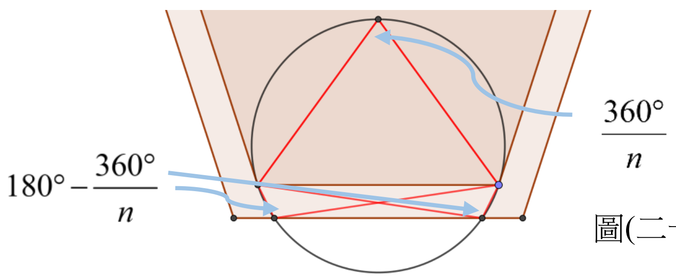


圖(十九) -2

接下來以幾何作圖方式繼續研究正n邊形

研究十一：若作一圓過內正n邊形相鄰兩頂點及重心，則此圓與外正n邊形交點即收斂點。

說明：如圖(二十)，在正n邊形中，兩頂點與重心所夾度數為$\frac{360^\circ}{n}$，且收斂正n邊形也為正n邊形，其一內角為$180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$，可推得內正$n$邊形相鄰兩頂點、重心、收斂點必共圓，因此過內正$n$邊形相鄰兩頂點、重心之圓必通過收斂點，即此圓與外三角形的交點為收斂點。



圖(二十)

接著當然我們也可以探討底下兩個性質

1. 當旋轉內正n邊形，收斂圓與外正n邊形的交點情形
2. 當旋轉內正n邊形，收斂點與外正n邊形頂點之距離通式

由於上述兩點探討方式與研究九與研究十相同，故於此不再贅述。

由以上研究可以發現，使用幾何作圖可以協助我們快速地找出正n邊形與旋轉三角形的收斂點。

伍、 結論

令$\frac{1}{a}$為內、外多邊形的邊長比值，x 為邊上任一點與頂點之距離，$f(x)$為多邊形連接小正 n 邊形頂點的切線會交大正 n 邊形下一邊上的點與頂點的距離。

一、連接內多邊形頂點的切線會交外多邊形下一邊上的點與頂點的距離

(一)正三角形: $f(x)=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$

(二)正方形： $f(x)=\dfrac{(a^2-a)+(1-a)x}{(a+1)+(-2)x}$

(三)正 n 邊形： $f(x)=\dfrac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$

(四)任意三角形：

1.如果落點在$\overline{AB}$，通式為$R(x)=\dfrac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}$

2.如果落點在$\overline{AC}$，通式為$Q(x)=\dfrac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}$

3.如果落點在$\overline{BC}$，通式為$P(x)=\dfrac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$

二、收斂點與外多邊形頂點的距離

(一)正三角形： $x=\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

(二)正方形： $x=\dfrac{1}{2}a\pm\sqrt{2a-a^2}$

(三)正 n 邊形： $x=\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

(四)任意三角形：

1.如果落點在$\overline{\mathrm{AB}}$，則 $x = r\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

2.如果落點在$\overline{\mathrm{AC}}$，則 $x = q\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

3.如果落點在$\overline{\mathrm{BC}}$，則 $x = p\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

(五)旋轉三角形: 若內正三角形以重心為圓心順時針旋轉θ，則

$$x=\frac{a}{2}-\left(\frac{\pm\sqrt{4\text{-}(a+2\cos\theta)^2}-2\sin\theta}{2\sqrt{3}}\right)$$

三、各種多邊形可形成收斂多邊形的內、外多邊形的邊長比例範圍

(一)正三角形：$1\le a\le 4$　　　(二)正方形：$1\le a\le 2$

(三)正 n 邊形：$1\le a\le \frac{2}{1-\cos\theta}$　(θ 為正 n 邊形之一個內角角度)

(四)任意三角形：$1\le a\le 4$

四、收斂範圍

(一)正三角形: $x \le \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

(二)正方形: $x \le \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{-(a-2)a}}{2}$

(三)正 n 邊形: $x \le \frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

(四)任意三角形 : $x \le p\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$**($\boldsymbol{q,r}$ 同理)**

五、內、外多邊形與收斂多邊形的邊長比

不論是正三角形、正方形、正 n 邊形，邊長比皆為$1:\sqrt{a}:a$ ，

即收斂多邊形邊長為內、外多邊形邊長的幾何平均數。

六、幾何作圖尋找收斂點

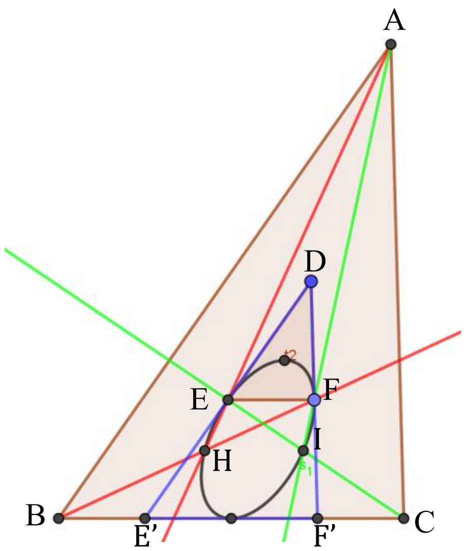
不論是正三角形、正n邊形、旋轉三角形、旋轉n邊形，若作一圓通過內n邊形相鄰兩頂點及重心，則此圓與外n邊形的交點即為收斂點。

到這裡，我們的研究告一個段落，完成了前面所設下的大部分目標。研究了正三角形、正多邊形、任意三角形之**距離函數、收斂點與頂點的距離、收斂多邊形的內、外多邊之邊長比例範圍、收斂範圍**以及**內、外、收斂多邊形的邊長比**。最後也發現使用**幾何作圖**能協助我們更快速的找到收斂點。

陸、 未來展望

在本研究當中我們討論了正三角形以及正 n 邊形的收斂圓，所以我們想要延伸至任意三角形。

如圖(二十一)，將內三角形的頂點(E、F)、內三角形的重心以及 H 點($\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{BF}$交點)和 I 點($\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CE}$交點)這五點利用圓椎曲線畫出橢圓，觀察出橢圓與外任意三角形的交點就是收斂點，而將$\overline{DE}$ 、 $\overline{DF}$ 延伸後，發現這個橢圓是 $\Delta DF'E'$ 的內切橢圓，而且是三角形的最大內切橢圓，但尚未證明完畢，所以未來希望可以朝任意三角形繼續努力。



圖(二十一)

在本研究中我們討論了三角形、正方形、正 n 邊形的收斂情形。未來希望可以不局限於正多邊形，朝著任意四邊形，甚至任意 n 邊形做研究，這將會非常有趣，但礙於時間以及我們的先備知識不足。希望未來有機會能繼續加廣研究的內容！

柒、 參考資料及其他

一、森棚教官的數學題。科學研習月刊57-7

二、高二下學期數學課本第三單元-矩陣。

三、中華大學開放式課程，工程數學(二)

【教學講義】提要198：矩陣 A 之 m 次方的計算方式檔案

四、59 屆全國科展國小組數學科形中有形

【評語】030418

作品研究邊長比為１：a 的兩個重心重合且邊兩兩平行的正三角形，取外部三角形的邊上一點為起始點，朝著內正三角形的頂點畫切線，與外部大正三角形交於另一點，重複操作上述的動作，在同一邊上得出的點是否會趨向某一特定點？如果是，這些特定點所連成的三角形又具有何種特性？這是科學月刊中介紹的一個問題，問題非常有意思。作者們透過巧妙的處理方式，針對原始問題給出了完整的解答，並把結果進一步的推廣到正多邊形以及任意的三角形。說明清楚而且簡潔，十分難得。有部分的論述以及計算稍嫌繁複，可以嘗試再更進一步的簡化。針對一般的三角形的分析結果似乎顯示著有可能可以給出一個非計算式的論證，如果真的如此，應該會非常有趣。最後一部分關於考慮內部小三角形經過旋轉後，是否還可以保持原本收斂性質的討論好像並不完全，如果可以說的更仔細些會更好。

作品海報

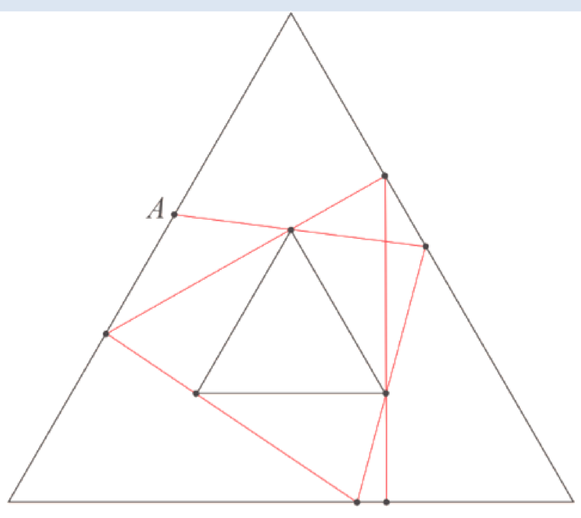
壹、原題介紹

「如圖，正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間為開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的 A 點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊然後再從這個點出發，反覆一直跑下去。如圖紅線為跑了五趟之後的結果。觀察這個結構並做一些實驗。請問聰明的讀者，你可以得到什麼結論？」

貳、研究目的

我們想深入探討畫了無限多圈後路線圖的收斂情形，我們要解決的問題如下：

一、找出同時「外切」於內正三角形、「內接」於外正三角形的收斂三角形
二、找出內、外正三角形邊長的最小比值及與收斂三角形之邊長比例關係
三、找到收斂三角形頂點與外正三角形頂點的距離通式
四、找出可形成收斂三角形的最大起始點範圍
五、推廣至正方形、正n邊形、任意三角形的收斂情形
六、使用幾何作圖尋找收斂點



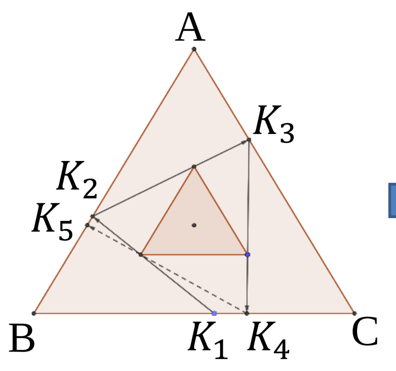
參、研究過程或方法

一、觀察原始題目中的變化

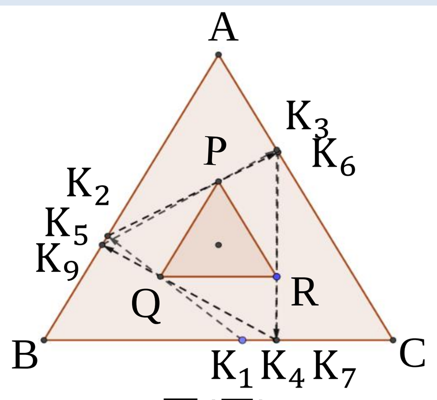
我們利用*GeoGebra*畫出符合題意的圖形，可以發現以下性質。

(一)收斂三角形

如圖(一)、(二)，重複多次後可發現路徑會逐漸形成三角形，稱之為**收斂三角形**。



圖(一)

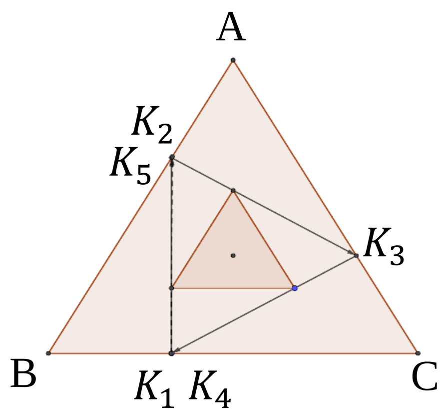


圖(二)

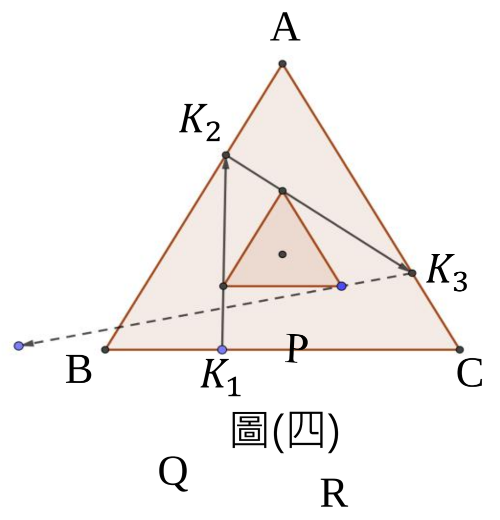
(二)發散&鏡像三角形

如圖(三)，接下來我們將起始點向左移，發現當移動到某一點時，可形成另一個三角形，稱之為**鏡像三角形**，除非起始點直接在此鏡像三角形頂點上，否則無論如何都不會收斂在此三角形上。

如圖(四)，繼續將起始點向左移後，發現$\overrightarrow{K_3R}$與$\overline{BC}$已無交點，無法形成收斂三角形，我們稱此情形為**發散**。



圖(三)



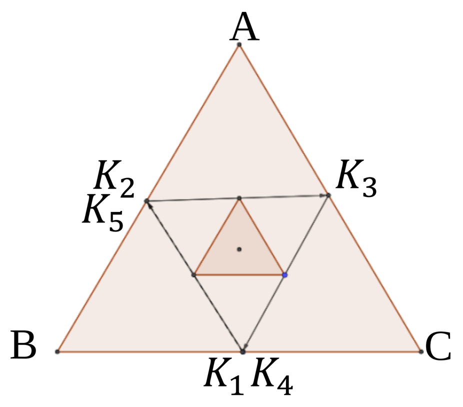
圖(四)

(三)最大邊長比例

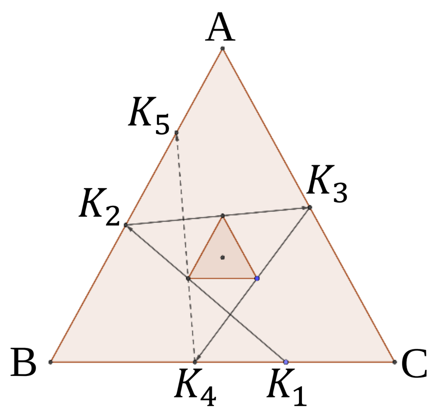
接著，改變內、外三角形的邊長比例。如圖(五)，在內、外三角形比例為1：4時，僅畫出唯一的收斂三角形。但在1：5時卻**畫不出任何收斂三角形**，如圖(六)。

從觀察中可發現幾點特性：

觀察一：當可形成收斂三角形時，內、外三角形邊長最小比值為$\frac{1}{4}$ 。
觀察二：當內、外三角形邊長比值大於$\frac{1}{4}$ 時，則有兩收斂三角形。
觀察三：當內、外三角形邊長比值等於$\frac{1}{4}$ 時，只有一收斂三角形。
觀察四：當起始點位於鏡像三角形頂點左側，則無法形成收斂三角形。



圖(五)



圖(六)

二、初步探討正三角形之頂點與收斂三角形的距離通式

如圖(七)，令$\overline{BC}$上的K_1為起始點，K_2為$\overrightarrow{K_1Q}$與$\overline{AB}$的交點，K_3為$\overrightarrow{K_2P}$與$\overline{AC}$的交點，K_4為$\overrightarrow{K_3R}$與$\overline{BC}$的交點，以此類推。可觀察到當內、外正三角形的邊長比改變，「切線與外正三角形邊上交點」與「外正三角形頂點」的距離也會改變，我們希望不只討論邊長比為1：3的情形，而是能得到在任意比例時的通式。以下研究皆令**內正三角形邊長為1、外正三角形邊長為a**。

研究一：若我們令$\overline{K_1C}=x$，則可以得到$\overline{K_2B}=\frac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$

證明：令 $\overline{K_1C}=x$，則 $\overline{K_1B}=\overline{BC}-\overline{K_1C}=a-x$ ，如圖(七)

作$\overline{BC}$上的高$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於D點，交$\overline{QR}$於S點，且G為重心

$\overline{DP}=\overline{GD}+\overline{GP}=\frac{\sqrt{3}a}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

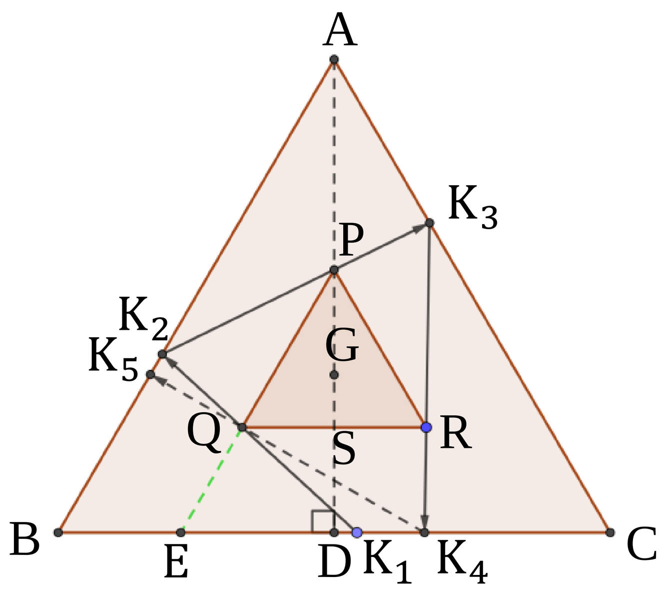
延長$\overline{PQ}$交$\overline{BC}$於E點$\Longrightarrow \overline{QE}//\overline{K_2B}$

$\overline{PE}=\frac{2\overline{DP}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}+\frac{2}{3}$，$\overline{DE}=\frac{\overline{DP}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{6}+\frac{1}{3}$，$\overline{QE}=\overline{PE}-\overline{PQ}=\frac{a}{3}+\frac{2}{3}-1=\frac{a}{3}-\frac{1}{3}$

$\overline{BE}=\overline{DB}-\overline{DE}=\frac{a}{2}-(\frac{a}{6}+\frac{1}{3})=\frac{a}{3}-\frac{1}{3}$ ，$\overline{K_1E}=\overline{K_1B}-\overline{BE}=a-x-(\frac{a}{3}-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}a-x+\frac{1}{3}$

$\because \overline{QE}//\overline{K_2B} \Longrightarrow \Delta K_1QE\sim\Delta K_1K_2B$，$\therefore \overline{K_1E}:\overline{K_1B}=\overline{QE}:\overline{K_2B}$

$(\frac{2}{3}a-x+\frac{1}{3}):(a-x)=(\frac{a}{3}-\frac{1}{3}):\overline{K_2B}$ 整理得 $\overline{K_2B}=\frac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$ 故得證#



圖(七)

當我們令 $f(x)=\overline{K_2B}=\frac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$ ，由研究一的結果可類推$\overline{K_3A}=f(f(x))$、$\overline{K_4C}=f(f(f(x)))$，

為了方便表示，我們令$f_2(x)=f(f(x))$，$f_3(x)=f(f(f(x)))$，以此類推。

討論一：$a=3$

$f(x)=\frac{6-2x}{7-3x}, f_2(x)=\frac{30-14x}{31-15x}, f_3(x)=\frac{126-62x}{127-63x}, f_4(x)=\frac{510-254x}{511-255x}$ 觀察分子、分母係數間的規律，可推得 $f_k(x)=\frac{2^{2k+1}-2-(2^{2k}-2)x}{2^{2k+1}-1-(2^{2k}-1)x}$

我們將$f_k(x)$取極限， $\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k+1}-2-(2^{2k}-2)x}{2^{2k+1}-1-(2^{2k}-1)x}=1$ 也就是三邊的收斂點與頂點的距離都等於1，此時收斂三角形為正三角形。

討論二：$a=4$

$f(x)=\frac{4-x}{3-x}, f_2(x)=\frac{8-3x}{5-2x}, f_3(x)=\frac{12-5x}{7-3x}, f_4(x)=\frac{16-7x}{9-4x}$ 觀察分子、分母係數間的規律，可推得 $f_k(x)=\frac{4k-(2k-1)x}{2k+1-kx}$

我們將$f_k(x)$取極限，$\lim_{k\to\infty}\frac{4k-(2k-1)x}{2k+1-kx}=2$，也就是三邊的收斂點與頂點的距離都等於2，此時收斂三角形也會是正三角形。

討論三：$a=2$

$f(x)=\frac{2-x}{5-3x}, f_2(x)=\frac{8-5x}{19-12x}, f_3(x)=\frac{30-19x}{71-45x}, f_4(x)=\frac{112-71x}{265-168x}$ 我們觀察分子的常數項得到遞迴關係式:$a_k=4(a_{k-1})-a_{k-2}$

經遞迴運算後解得分子的常數項： $a_k=\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^k-\frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^k$ 同理，分子分母其餘係數推導方式亦同，因此在此省略。

最後，我們推導出通式並取極限：$\lim_{k\to\infty}f(x)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^k+\frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^k-(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(2+\sqrt{3})^k+\frac{\sqrt{3}+1}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}(2+\sqrt{3})^k+\frac{\sqrt{3}-1}{2}(2-\sqrt{3})^k-(\frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^k+\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^k)x}=\frac{2\sqrt{3}-(3\sqrt{3}-3)x}{3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}x}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

也就是三邊的收斂點與頂點的距離會趨近於 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 且收斂三角形也是正三角形。

三、探討正三角形之收斂三角形的通式及相關性質

已知內正三角形PQR邊長為1，而外正三角形ABC邊長為a，假設存在三角形DEF為其收斂正三角形，如圖(八)。

由討論一～三知道，三邊的收斂點到頂點的距離會相等，因此可得到研究二。

研究二：若令收斂點與外正三角形ABC頂點的距離$\overline{CE}=\overline{BF}=\overline{AD}=x$，則$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

證明：延伸$\overline{PQ}$交$\overline{BC}$於H點，同研究一的作法，可知:

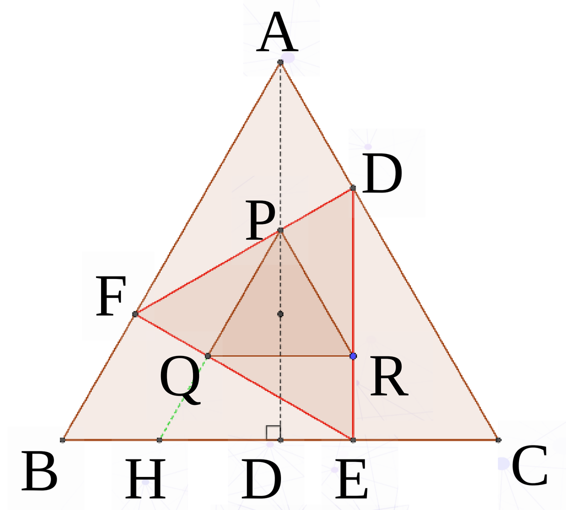
$\overline{EH}:\overline{EB}=\overline{QH}:\overline{FB}\rightarrow(\frac{2}{3}a-x+\frac{1}{3}):(a-x)=(\frac{a}{3}-\frac{1}{3}):x$ 化簡得 $x^2-ax+\frac{a^2}{3}=0$，解得$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

從研究二可知每邊有兩個收斂點，與我們觀察二相同，且由收斂點連線所成的三角形為正三角形。而藉由研究二，我們發現了三個性質：

性質一：若兩正三角形存在收斂三角形，且當內正三角形邊長1，外正三角形的邊長a，則a的範圍為$1 \le a \le 4$，也就是當$a > 4$並不存在收斂三角形。

性質二：若兩正三角形存在收斂三角形，則當起始點與頂點的距離 $x < \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$ 最後則會收斂到收斂點距離頂點 $\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$ 處。而當起始點與頂點的距離為 $\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$ 則持續落在此點。

性質三：已知內正三角形PQR邊長為1，而外正三角形ABC邊長為a，假設存在三角形DEF為其收斂三角形，則三角形DEF的邊長為$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$。也就是收斂三角形的邊長為內、外正三角形邊長的幾何平均數。


圖(八)

後來我們發現換個方式表示，對我們的推論會有很大的幫助。

首先，我們將 $f(x) = \frac{a^2 - a - ax + x}{2a - 3x + 1}$ 整理成 $f(x) = \frac{a^2 - a + (1-a)x}{2a+1+(-3)x}$ 並改寫成 $f(x) = \frac{\alpha + \beta x}{\mu + \nu x}$，其中 $\alpha = a^2 - a, \beta = 1 - a, \mu = 2a + 1, \nu = -3$

則 $f_2(x) = \frac{\alpha + \beta f(x)}{\mu + \nu f(x)} = \frac{\alpha + \beta\left(\frac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}\right)}{\mu + \nu\left(\frac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}\right)}$ 化簡得 $f_2(x) = \frac{(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x}{(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x}$ 。

我們將 $f(x) = \frac{\alpha+\beta x}{\mu+\nu x}$ 的分子、分母係數表示為$\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}$，且將 $f_2(x)$ 分子、分母的係數表示成$\begin{pmatrix}\mu_2 & \alpha_2 \\ \nu_2 & \beta_2\end{pmatrix}$

我們想將 $f_2(x) = \frac{(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x}{(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x}$ 的分子、分母的係數表示成矩陣， $f_2(x)$ 的分子 $(\alpha\mu+\alpha\beta)+(\alpha\nu+\beta^2)x$ 可以寫成 $(\mu \quad \alpha)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} + (\nu \quad \beta)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}x$

$f_2(x)$ 的分母 $(\mu^2+\alpha\nu)+(\mu\nu+\beta\nu)x$ 可以寫成 $(\mu \quad \alpha)\begin{pmatrix}\mu \\ \nu\end{pmatrix} + (\nu \quad \beta)\begin{pmatrix}\mu \\ \nu\end{pmatrix}x$，因此，$\begin{pmatrix}\mu_2 & \alpha_2 \\ \nu_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^2$

可得到 $f_k(x)$ 分子、分母的係數$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k \\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$

研究三：若兩正三角形重心重疊，且當內正三角形邊長1，外正三角形的邊長a，其中$1 \le a \le 4$，則收斂點距離外三角形頂點$\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

證明：在研究一證明了當起始點距離外正三角形一邊頂點x時，連接內正三角形頂點的切線會交外正三小形下一邊上的點與頂點的距離為 $f(x) = \frac{a^2 - a - ax + x}{2a - 3x + 1}$

令 $f_k(x) = \frac{\alpha_k + \beta_k x}{\mu_k + \nu_k x}$ 在前面我們提到 $f_k(x)$ 分子、分母的係數可表示成矩陣$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k \\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$，我們想要化簡 $f_k(x) = \frac{\alpha_k + \beta_k x}{\mu_k + \nu_k x}$

因此利用線上數學軟體$WolframAlpha$將矩陣對角化得$\begin{pmatrix}\mu_k & \alpha_k \\ \nu_k & \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \alpha \\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}(\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a} - 3a) & \frac{1}{6}(-3a - \sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}) \\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(a - \sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}) + 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a + \sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}) + 2\end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} & \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} + 1) \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} & \frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-(a-4)a}} + 1)\end{pmatrix}$$

為使化簡方便，令$\sqrt{-(a-4)a} = A$

情況一：當$a \ne 4$時，因$a = 4$時會使分母為0，故另外於情況二討論

當$1 \le a < 4$時，$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$

情況二：當$a = 4$時，$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k x}{\mu_k + \nu_k x} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k + (1-2k)x}{(2k+1) - kx} = \frac{4-2x}{2-x} = 2$

$a = 4$，$\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6} = 2 = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$

四、探討正多邊形之收斂正n邊形的通式及相關性質(以下θ為正多邊形一內角)

(正方形與正n邊形的研究與性質證明類似於正三角形，故正方形的研究四~五與性質四~六及正多邊形的性質十在此省略，詳見說明書)

研究四：若令$\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6} = 2 = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$**，則可得到** $f(x) = \overline{K_2C} = \frac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$

研究五：若兩正多邊形重心重疊，且當內正n邊形邊長1，外正n邊形的邊長a，則$1 \le a \le \frac{2}{1-\cos\theta}$。

性質七：當內、外n邊形皆為正n邊形時，收斂n邊形也是正n邊形。

性質八：若兩正n邊形存在收斂正n邊形，且當內正n邊形邊長1，外正n邊形的邊長a，則a的範圍為$1 \le a \le \frac{2}{1-\cos\theta}$

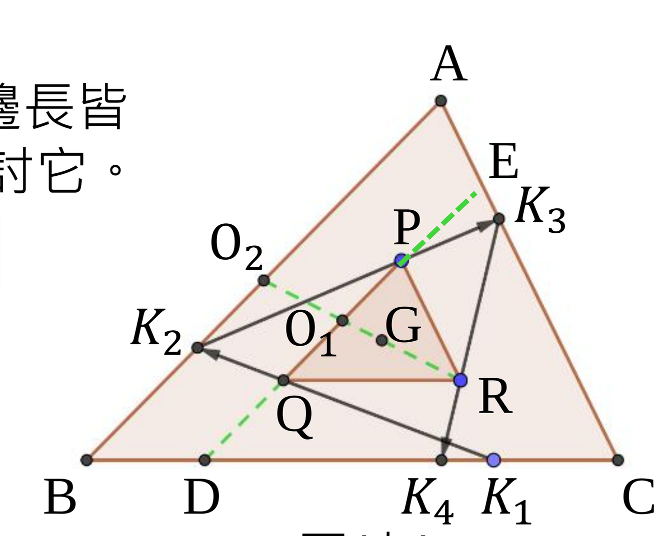
也就是當$1 \le a \le \frac{2}{1-\cos\theta}$**並不存在收斂正$n$邊形。**

性質九：若兩n邊形存在收斂正n邊形，則當起始點跟頂點的距離 $x < \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta - a + 2)}}{2(\cos\theta+1)}$**，最後會收斂到收斂點距離頂點** $\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta - a + 2)}}{2(\cos\theta+1)}$ **處。而當起始點跟頂點的距離為** $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta - a + 2)}}{2(\cos\theta+1)}$ **，則持續落在此點。**

五、探討任意三角形之收斂任意三角形的通式及相關性質

因為原始題目為正三角形，所以我們希望可以推廣至任意三角形(邊長比$1:a$)。

已知內三角形PQR邊長為p、q、r，而外三角形ABC邊長為ap、aq、ar，在經過$GeoGebra$畫圖之後，發現當三邊長皆不同時，收斂三角形不與內、外三角形相似，且找不到收斂三角形的邊長與p、q、r的關係，這使我們更加想要去探討它。


圖(九)

研究六：若令收斂點與外三角形ABC頂點的距離$\overline{K_1C} = x$，$\overline{K_2B} = R(x)$，$\overline{K_3A} = Q(x)$，如圖(九)

$\overline{K_4C} = P(x)$，設$\overline{RO_1} = y$，$\overline{AB} = ar$、$\overline{AC} = aq$、$\overline{BC} = ap$，則$\overline{GC} = \frac{2}{3}ay$、$\overline{GO_1} = \frac{1}{3}y$、$\overline{CO_1} = \overline{GC} + \overline{GO_1} = \frac{2}{3}ay + \frac{1}{3}y$

$\overline{CO_1} : \overline{CO_2} = \overline{DE} : \overline{AB} \to \left(\frac{2}{3}ay + \frac{1}{3}y\right) : ay = \overline{DE} : ar$，$\overline{DQ} = \frac{\overline{DE} - r}{2} = \frac{\frac{2}{3}ar - \frac{2}{3}r}{2} = \frac{r(a-1)}{3}$ $\left(\overline{BD} = \frac{p(a-1)}{3}\right)$

$\overline{DK_1} : \overline{BK_1} = \overline{DQ} : R(x) \to \left(ap - x - \frac{p(a-1)}{3}\right) : (ap - x) = \left(\frac{r(a-1)}{3}\right) : R(x) \to (3ap - 3x - p(a-1)) : (ap - x) = r(a-1) : R(x)$

因為任意三角形每個邊長不同，無法皆用單一型態表示，所以我們分別用$P(x)$、$R(x)$、$Q(x)$表示：

落點在$\overline{AB}$，$R(x) = \frac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}$ 落點在$\overline{AC}$，$Q(x) = \frac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}$ 落點在$\overline{BC}$，$P(x) = \frac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$

從上述式子中，無法計算收斂點與外三角形頂點距離，所以我們優先從矩陣開始計算。

研究七：在研究六我們找出了當起始點距離外三角形一邊頂點x時，連接內三角形頂點的切線會交外三角形下一邊上的點與頂點的距離通式。

接下來我們會如正三角形一樣用矩陣來證明它。

我們可以發現任意三角形的$R(x)$、$Q(x)$、$P(x)$不看p、q、r，常數及x項係數都與正三角形相同

$$R(x)=\frac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}\qquad Q(x)=\frac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}\qquad P(x)=\frac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$$

其中$\alpha=a^2-a$，$\beta=(1-a)$，$\mu=(2a+1)$，$\nu=-3$ ，為了方便後續描述，我們令$P\left(Q\left(R(x)\right)\right)=S(x)$

$$R(x)=\frac{pr\alpha+r\beta x}{p\mu+\nu x}\to\begin{pmatrix}p\mu & pr\alpha\\ \nu & r\beta\end{pmatrix}\qquad P(x)=\frac{pq\alpha+p\beta x}{q\mu+\nu x}\to\begin{pmatrix}q\mu & qp\alpha\\ \nu & p\beta\end{pmatrix}\qquad Q(x)=\frac{rq\alpha+p\beta x}{r\mu+\nu x}\to\begin{pmatrix}r\mu & rq\alpha\\ \nu & q\beta\end{pmatrix}$$

我們運算得知：任意三角形的切線不管畫了幾次，當不看p、q、r時都與正三角形的矩陣相同，又在從矩陣提出的p、q、r轉換為分數時可被約分，因此矩陣只會有三種型態：$\begin{pmatrix}p\mu_k & p^2\alpha_k\\ \nu_k & p\beta_k\end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix}p\mu_{k+1} & pr\alpha_{k+1}\\ \nu_{k+1} & q\beta_{k+1}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}p\mu_{k+2} & pr\alpha_{k+2}\\ \nu_{k+2} & r\beta_{k+2}\end{pmatrix}$

當 $\begin{pmatrix}\mu & \alpha\\ \nu & \beta\end{pmatrix}^k$ 轉換為分數並對k取極限時會等於$\dfrac{(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x}$

所以轉換為分數並對k取極限分別與外三角形頂點距離為：

落點在$\overline{BC}$上：$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\frac{p^2(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6p(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}p(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x}=p\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

落點在$\overline{AB}$上：$\displaystyle\lim_{k\to\infty}R(S_k(x))=\frac{pr(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6r(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}p(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x}=r\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

落點在$\overline{AC}$上：$\displaystyle\lim_{k\to\infty}Q(R(S_k(x)))=\frac{pq(-3A+3a)(-\sqrt{3}a+A)+6q(-\sqrt{3}a+A)x}{2\sqrt{3}q(\sqrt{3}A+3a)+6(-2\sqrt{3}a)x}=q\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

性質八：當出現收斂三角形後，因每邊長不同，使得收斂點與外三角形頂點距離在每邊上皆不等長，但「外三角形邊長」與「收斂點與外三角形頂點距離」比例皆相等。 說明：當出現收斂三角形時：每邊上的比例皆為 $a:\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

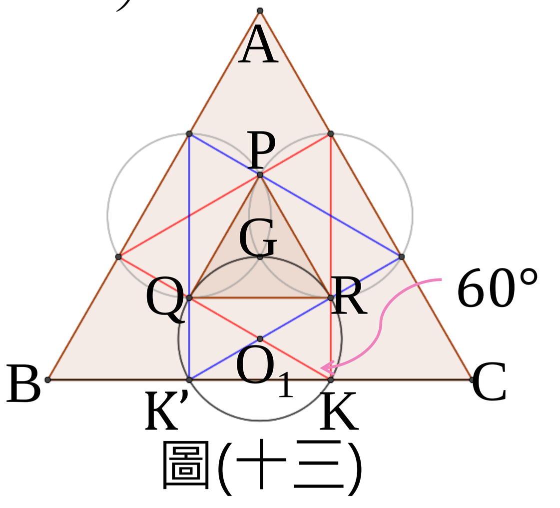
性質九：同正三角形，若兩任意三角形存在收斂三角形，且當內三角形邊長為1，外三角形的邊長為a，則a的範圍為

$1\le a\le 4$，也就是當$a>4$並不存在收斂三角形

性質十：若兩任意三角形存在收斂三角形，則當起始點跟頂點的距離 $x<p\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$ (當p代換為q,r時同理)，最後會收斂到收斂點距離頂點 $p\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$ 處。而當起始點跟頂點的距離等於 $p\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$ 則此點不移動。

六、以幾何作圖探討收斂點及其相關性質

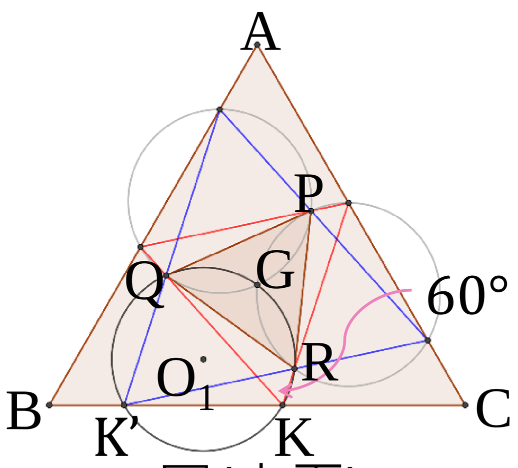
研究八：以Q、G、R三點畫圓(圓O_1)，則此圓與外三角形的交點(K、K'點)即為收斂點。



圖(十三)

說明：從前面得知，若內外三角形皆為正三角形時，則收斂為正三角形，因此內三角形相鄰兩頂點與收斂點(K點) 之夾角為60°。又$\angle QGR=120°$，則四邊形為圓內接四邊形，即過Q、G、R的圓O_1必過K點，如圖(十三)，$\angle QKR=\frac{1}{2}QR=60°$。

如圖(十五)接下來我們改變原題，將內正三角形旋轉，找出其收斂點及其相關性質。使用幾何作圖進行**研究九**，可得到與**研究八**相同的結果。

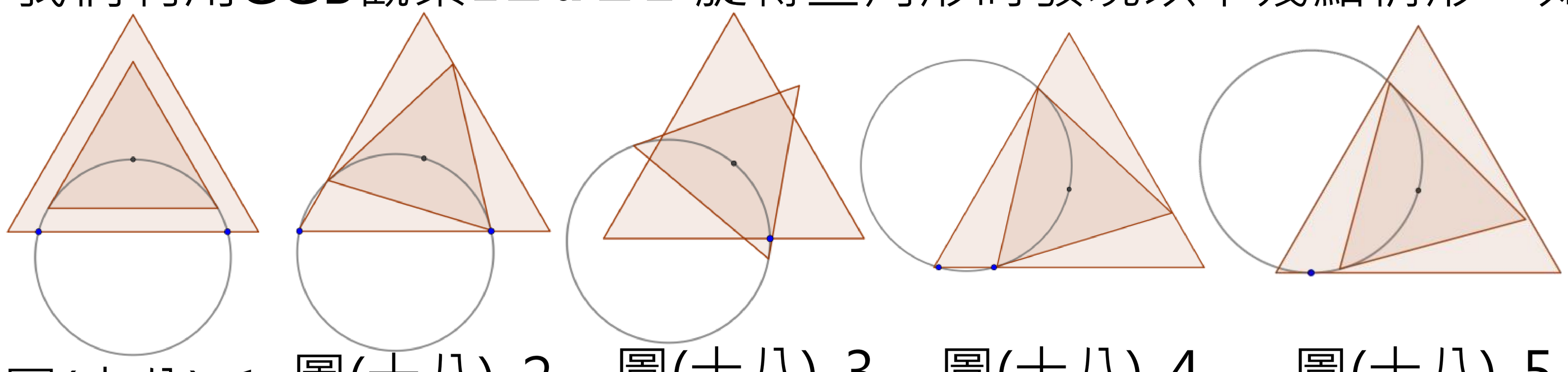


圖(十五)

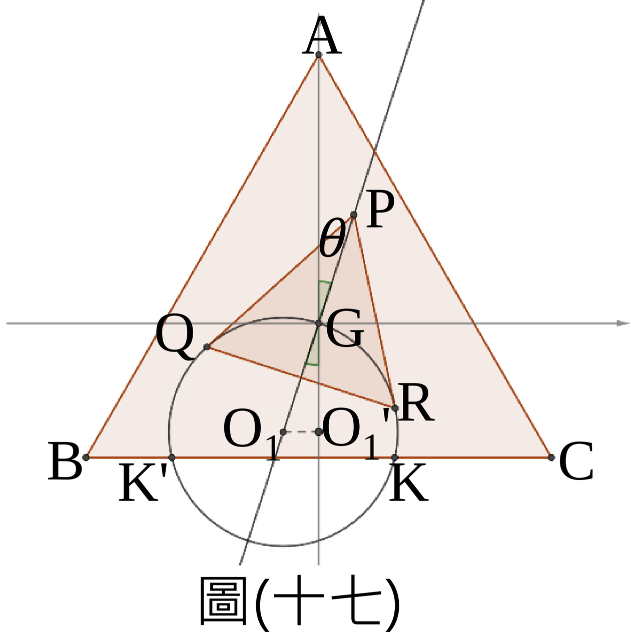
接下來以旋轉的三角形，探討其收斂點，並以座標探討收斂點與頂點距離之關係。

研究十：如圖(十七)，若內正三角形以重心以重心G為圓心順時針旋轉θ，則收斂點與外正三角形頂點距離為 $\dfrac{a}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{4-(a+2\cos\theta)^2}-2\sin\theta}{2\sqrt{3}}\right)$

我們利用GGB觀察$1\le a\le 2$ 旋轉三角形時發現以下幾點情形，如圖(十八)-1~5



圖(十八)-1 圖(十八)-2 圖(十八)-3 圖(十八)-4 圖(十八)-5



圖(十七)

我們想知道旋轉幾度時會有收斂三角形，可得到**性質十一：**當內三角形旋轉θ時，若θ的範圍為$if\ 1\le a\le 2\begin{cases}0°\le\theta\le 60°-\cos^{-1}\frac{a}{2}\\ 60°+\cos^{-1}\frac{a}{2}\le\theta\le 90°+\cos^{-1}\frac{2-a}{2}\end{cases}$ ，$if\ 2\le a\le 4\quad \frac{a}{2}-1\le\cos\theta\le\frac{a}{2}+1$ ，可形成收斂三角形。

接下來以幾何作圖方式繼續研究正n邊形

研究十一：若作一圓過內正 n 邊形相鄰兩頂點及重心，則此圓與外正 n 邊形交點即收斂點。

由以上研究可以發現，使用幾何作圖可以協助我們快速地找出正 n 邊形與旋轉三角形的收斂點。

肆、結論

一、連接內多邊形頂點的切線會交外多邊形下一邊上的點與頂點的距離

(一)正三角形：$f(x)=\dfrac{a^2-a-ax+x}{2a-3x+1}$ (二)正n邊形：$f(x)=\dfrac{(a^2-a)+(1-a)x}{((2(\cos\theta+1)-1)a+1)+(-2(\cos\theta+1))x}$

(三)任意三角形：落點在$\overline{AB}$，通式為$R(x)=\frac{pr(a^2-a)+r(1-a)x}{p(2a+1)-3x}$ ，落點在$\overline{AC}$，通式為$Q(x)=\frac{rq(a^2-a)+q(1-a)x}{r(2a+1)-3x}$

落點在$\overline{BC}$，通式為$P(x)=\frac{qp(a^2-a)+p(1-a)x}{q(2a+1)-3x}$

二、收斂點與外多邊形頂點的距離

(一)正三角形：$x=\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$ (二)正n邊形： $x=\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

(三)任意三角形：落點在$\overline{AB}$時， $x=r\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，在$\overline{AC}$時， $x=q\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$，在$\overline{BC}$時， $x=p\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$

三、各種多邊形可形成收斂多邊形的內、外多邊形的邊長比例範圍

(一)正三角形：$1\le a\le 4$ (二)正n邊形：$1\le a\le\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ (正n邊形內角為θ) (三)任意三角形：$1\le a\le 4$

四、收斂範圍

(一)正三角形：$x\le\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}$ (二)正n邊形：$x\le\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{a(\cos\theta+1)(a\times\cos\theta-a+2)}}{2(\cos\theta+1)}$

(三)任意三角形：$x\le p\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-(a-4)a}}{6}\right)$ (q、r同理)

五、收斂多邊形邊長為內、外正多邊形邊長的幾何平均數：內、收斂、外多邊形邊長比為$1:\sqrt{a}:a$

六、幾何作圖尋找收斂點：作一圓通過內n邊形相鄰兩頂點及重心，則此圓與外n邊形之交點即為收斂點。