中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030417

「坐」不兩立

學校名稱：新北市立淡水國民中學

作者：	指導老師：
國二 韋載祐 國二 陳澤榮	蔡燦輝

關鍵詞：滿意座位、獨立集、費氏數列

摘要

一群人依序入座在 r 列 c 行的座位中，每個人都盡可能地不坐在其他人的旁邊。我們定義在某一入座順序中，入座時的座位，相鄰座位都還沒有人入座，此時我們稱這個座位為滿意座位，否則就稱非滿意座位。明顯地，滿意座位不能與其他的滿意座位相鄰。而滿意座位分布狀況就是圖論中的極大獨立點集問題。

我們先以 Excel VBA 程式進行模擬，對座位排列進行確認及優化，再利用程式模擬的結果及根據極大獨立集定義，探討極大獨立集的基數狀況。當矩形的列數和極大獨立集基數固定時，我們運用極大獨立集零件拼接的變化求出極大獨立集的排列數。此外，當極大獨立集基數固定時，極大獨立集圖形藉由獨立點移動而擴大的規則，我們意外發現其狀況與費氏數列有關。

壹、研究動機

一、緣起：

某次上課老師提到了某明星高中科學班甄選入學科學能力檢定題目[5]，題目如下：

有七個人依次坐在有七個座位的長凳上，每個人都盡可能地不坐在其他人的旁邊。所謂盡可能的意思是，如果可以選擇不坐他人的旁邊就不得坐在已經有人坐的座位旁邊。譬如，如果第一個人選坐最左邊的座位，那麼第二個人就不會選坐左邊第二個座位，那是因為他可以「順心」地選坐其他五個座位。若是真的無法「順心」地選坐座位，只能「勉強」地任意選坐座位，以這個次序為例：

4	5	1	6	3	7	2

其中次序「1,2,3,4」的人是可以「順心」地選坐，但是次序「5,6,7」的人「勉強」地選坐，因為有 4 個人是「順心」地選坐，所以我們稱此為「滿意度為 4」的「滿意次序坐法」，試問共有多少種「滿意次序坐法」？又所有「滿意次序坐法」的滿意度總和是多少？我們後來搜索相關資料，發現之前已經有作品〈這樣排，滿意了嗎？〉[4]，研究過此題目。該作品有研

究到平面的滿意座位分佈排列的狀況，但只研究到3×3。我們以此作品往下進行研究。

二、改變題目，轉換成圖論問題：

我們不討論入座順序，將所有座位視為不同，將以上1×7座位改成$r\times c$座位，其中$r,c\in\mathbb{N}$，只討論「滿意次序坐法」。另外將題目轉換成圖論問題，其實例如下：如圖 1，3×3正方形的 A、B、C、D、E、F、G、H、I 視為 9 個不同座位，將這 9 個不同座位當做平面上 9 個相異點。所有相鄰座位連成邊，如 AB、AD、BC、BE、ED、EF、EH、…等。而原始題目所要求的「滿意次序坐法」，就相當於是圖論中的「極大獨立集(maximal independent set)」，如圖 2，{A, F, H}即是一個極大獨立集的實例，而最大獨立集就是基數最大的極大獨立集。

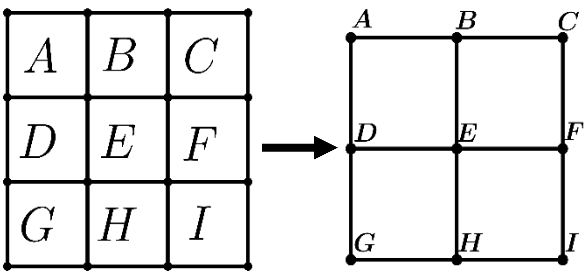


圖 1：原始題目轉換成圖論的點和邊。

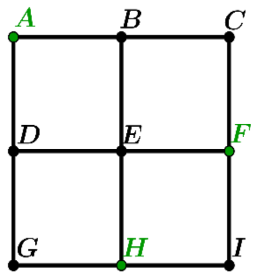


圖 2：綠色標記位置即是一個極大獨立集(maximal independent set)的實例。

貳、研究目的與問題

一、名詞定義與解釋[1][7]：

(一) 圖(graph)：圖 G 是由一些頂點(vertex)與邊(edge)所組合而成的結構。設圖 G 所有的頂點所成集合為$V(G)$，且圖 G 所有的邊所成集合為$E(G)$。圖 G 中的每一條邊都是連接$V(G)$中的兩個不同的頂點。也就是說，對於兩個不同的頂點$u,v\in V(G)$，若存在一條邊連結頂點 u, v，我們可以將此邊記為uv，即$uv\in E(G)$。

(二) 度(Degree)：圖 G 中點 v 的度(或度數)(degree)為所有與 v 相連的邊的個數，記為 $\deg(v)$。

(三) 格子圖(Lattice Graph)：我們以$U_{r\times c}=(V_{r\times c},E_{r\times c})$表示(如圖 3 為$U_{3\times3}$)，其中

$V_{r\times c}=\{v_{(i,j)}\mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,c\}$，$v_{(i,j)}$ 表示 $r\times c$ 格子圖中，第 i 列，第 j 行的點。

$E_{r\times c}=\{v_{(i,j)}v_{(i+1,j)}\mid i=1,\dots,r-1,\ j=1,\dots,c\}\cup\{v_{(i,j)}v_{(i,j+1)}\mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,c-1\}$。

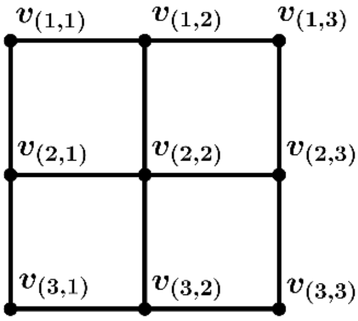


圖 3：$U_{3\times3}=(V_{3\times3},E_{3\times3})$

(四) 獨立點集(independent set)[3]：若圖 G 中有一點集 $X\subseteq V(G)$，且 X 中任意相異兩個頂點沒有邊連結，我們稱 X 為獨立點集或獨立集。

(五) 點的分類：我們根據原題目將點分成以下兩種。

1. 獨立點：極大獨立集的元素，即滿意座位。

2. 非獨立點：若極大獨立集為 A，非獨立點是 $V_{r\times c}-A$ 的元素，即不滿意座位。

3. 如圖 4，圖中紅色格子點為非獨立點，綠色格子點為獨立點。

(六) 極大獨立集基數：就是極大獨立集所含獨立點的數量，即「滿意度」。

(七) 合理排列：

獨立點和非獨立點必須構成一個完整的 $r\times c$ 矩形格子點（如圖 5），才稱作 $r\times c$ 的一種合理排列。圖 5 和圖 6 視為不同排列。

(八) 2 維的哈密頓距離[6]認定：如果兩個格子點的座標分別為 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2)，$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{N}$，則兩個格子點的哈密頓距離為 $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$。所以兩個相異格子點的哈密頓距離必為正整數。

(九) 最密集極大獨立集：不一定是最大獨立集，若極大獨立集中與任何獨立點的哈密頓距離最短的格子點皆為獨立點，則稱此極大獨立集為最密集極大獨立集。又因獨立點不能相鄰，當獨立點與其他獨立點的哈密頓距離為 1 時會違反定義，承定義(八)可知：最密集極大獨立集中，與任何獨立點的哈密頓距離為 2 的格子點皆為獨立點。

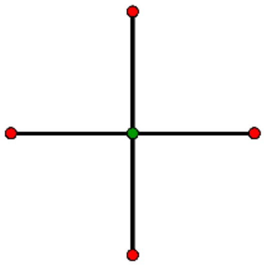


圖 4：獨立點和非獨立點。

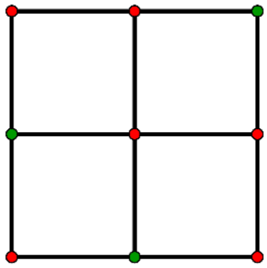


圖 5：獨立點和非獨立點構成的完整 3×3 矩形。

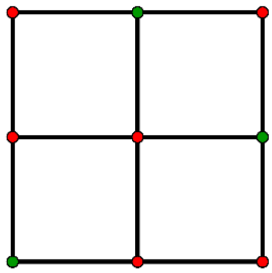


圖 6：獨立點和非獨立點構成的完整 3×3 矩形。

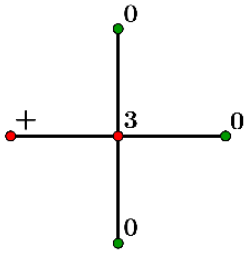


圖 7：格子點獨立數。

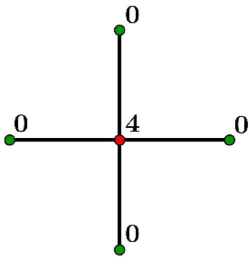
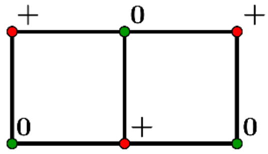


圖 8：格子點獨立數。



$$\begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \end{bmatrix}$$

圖 9：矩陣圖形範例。

(十) 獨立數定義：如圖 7、圖 8。

1. 獨立點：獨立點的獨立數為 0，表示獨立點沒有相鄰其他獨立點。

   註：之後部分的「獨立點」會用 0 作代替。

2. 非獨立點：非獨立點的獨立數為其相鄰的獨立點個數。為方便分辨獨立點與非獨立點，將非獨立點皆記為「+」。

3. 不同位置的格子點，其獨立數的範圍如下：令點 $v_{(i,j)}$ 的獨立數為 k，則 $0 \le k \le \deg(v_{(i,j)})$，$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。

(十一)矩陣[2]表示：為了方便記錄，所以使用矩陣進行表示。

圖形矩陣有 r 列、c 行，記為 $r\times c$，$(r,c \in \mathbb{N})$ 如圖 9 為 2×3 矩陣圖形。a_{ij} 是第 i 列第 j 行的格子點，若我們在 a_{ij} 處，以符號「+」填入，代表位於第 i 列第 j 行是獨立數為正的非獨立點。如果敘述格子點性質的文字有顏色，可與旁邊的圖片對應。

二、研究目的：探討點獨立集分佈的規則，我們分成以下幾種方向。

(一) 研究目的一：當 r,c 的值固定時，討論 $U_{r\times c}$ 極大獨立集的狀況。

1. 以 Excel VBA 程式進行模擬排列狀況並加以整理。

2. 極大獨立集的基數範圍。

(二) 研究目的二：$U_{1\times c}$ 或 $U_{2\times c}$ 圖形極大獨立集基數固定為 s 時，求其極大獨立集排列數。

(三) 研究目的三：$U_{1\times c}$ 或 $U_{2\times c}$ 圖形，固定 c 值大小時，求其極大獨立集的確定基數。

(四) 研究目的四：極大獨立集的基數固定時，討論如何從 $U_{r\times c}$ 最密集極大獨立集，變成其他大小長方形的極大獨立集。

我們在觀察圖形時，發現滿意座位分布的密集程度會有差異，我們固定極大獨立集基數，改變圖形大小觀察極大獨立集的變化，又最密集的極大獨立集狀況較單一，比較容易觀察，所以我們決定從最密集極大獨立集開始研究。

參、研究設備及器材

一、硬體部分：紙、筆、電腦。

二、軟體部分：Word，Excel，Excel VBA，Mathtype 5.0，PowerPoint，GeoGebra 5.0。

肆、研究過程或方法

一、研究目的一：在 r, c 的值固定時，$U_{r\times c}$ 極大獨立集的狀況討論：

(一) 在 r, c 的值固定時，演算出 $U_{r\times c}$ 所有極大獨立集的狀況：詳見實驗日誌。

1. 程式研究發展：

(1)程式版本及演算法不斷優化：

a. 自動產生程式碼：詳見實驗日誌。

b. 減少迴圈：詳見實驗日誌。

c. 包圍程式：詳見實驗日誌。

d. 即時篩選：詳見實驗日誌。

e. 即時篩選優化版（目前最成功的版本）：詳見實驗日誌。

(2)效率不斷提升：

在版本不斷優化的同時程式效率也不斷提升：

我們從定義出發不斷以幾個目標進行優化：1.迴圈數 2.篩選機制 3.跳過。我們也產生了各種程式版本（詳見實驗日誌），其中最成功的就是即時篩選優化版，在此版本中運算$U_{4\times 6}$合理排列在幾秒內就可以輸出所有正確答案，但最原始的程式運行一整天也無法得到任何數據。

(二) 極大獨立集基數範圍：

1. 基礎設定及格子點個數定義：

(1)獨立點個數依其度數分類，度數為 m 者其個數為s_m，可分為s_1、s_2、s_3、s_4，所有獨立點個數(極大獨立集基數)為 s。

(2)非獨立點個數依其獨立數分類，獨立數為 n 者其個數為x_n，可分為x_1、x_2、x_3、x_4。

2. 格子點總數及總相鄰值聯立方程式：

(1)方程式定義：

a.格子點總數方程式：

全部格子點($r\times c$)＝獨立點個數($s_1+s_2+s_3+s_4$)加上非獨立點個數($x_1+x_2+x_3+x_4$)，可記為$r\times c=s_1+s_2+s_3+s_4+x_1+x_2+x_3+x_4$。

b.總相鄰值方程式：

因為一個度數為 m 的獨立點能使相鄰的 m 個非獨立點的獨立數+1，

所以全部度數為 m 的獨立點能使任意非獨立點的獨立數+1 共($m\times s_m$)次，

所以全部的獨立點能使任意非獨立點的獨立數+1，共($s_1+2s_2+3s_3+4s_4$)次，

即為非獨立點獨立數的加總，又格子點獨立數加總為$x_1+2x_2+3x_3+4x_4$，(因為獨立數為 n 的非獨立點加總為$n\times x_n$)，所以兩多項式相等，

可記為$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=s_1+2s_2+3s_3+4s_4$。

(2)$U_{1\times c}$極大獨立集基數範圍：$\frac{1}{3}\times(1\times c)\le s\le\frac{2}{3}\times(1\times c)$。

(3)$U_{2\times c}$($c\ge 2$)圖形極大獨立集基數範圍：$\frac{1}{4}\times(2\times c)<s<\frac{5}{12}\times(2\times c)$。

($U_{1\times c}$ 與 $U_{2\times c}$ 圖形解方程式過程請參考實驗日誌)

(4) $U_{r\times c}$ 方程式簡化 $(r,c\geq 3)$：

a. 其他定義：因為在 $U_{r\times c}$ 中，獨立點只有 $(s_2+s_3+s_4)$ 個，

非獨立點只有 $(x_2+x_3+x_4)$ 個，所以方程式為

$$\begin{cases} r\times c = s_2+s_3+s_4+x_1+x_2+x_3+x_4 \\ 2s_2+3s_3+4s_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \end{cases}$$ 。

b. 求出極大獨立集基數範圍的上限：

依題意可知：$\begin{cases} r\times c = s_2+s_3+s_4+x_1+x_2+x_3+x_4 \\ 2s_2+3s_3+4s_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \end{cases}$，

所以 $4rc = 4s_2+4s_3+4s_4+4x_1+4x_2+4x_3+4x_4$，

所以 $4rc = 4s_2+4s_3+4s_4+3x_1+2x_2+x_3+(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)$，

又 $2s_2+3s_3+4s_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$，

所以 $4rc = 4s_2+4s_3+4s_4+3x_1+2x_2+x_3+(2s_2+3s_3+4s_4)$，

所以 $4rc = 6s_2+6s_3+6s_4+(3x_1+2x_2+x_3+s_3+2s_4)$，又 $3x_1+2x_2+x_3+s_3>0$，

$2s_4\geq 0$，所以 $4rc>6s_2+6s_3+6s_4$，所以 $s_2+s_3+s_4<\dfrac{2}{3}rc$ 。

c. 求出極大獨立集基數範圍的下限：

依題意可知：$\begin{cases} r\times c = s_2+s_3+s_4+x_1+x_2+x_3+x_4 \\ 2s_2+3s_3+4s_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \end{cases}$，

所以 $rc+x_2+2x_3+3x_4 = s_2+s_3+s_4+(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)$，

又 $2s_2+3s_3+4s_4 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$，

所以 $rc+x_2+2x_3+3x_4 = s_2+s_3+s_4+(2s_2+3s_3+4s_4)$，

所以 $rc+x_2+2x_3+3x_4 = 5s_2+5s_3+5s_4-(2s_2+s_3)$，

所以 $rc+x_2+2x_3+3x_4+2s_2+s_3 = 5s_2+5s_3+5s_4$，

又 $2s_2+s_3>0$，$x_2+2x_3+3x_4\geq 0$，所以 $rc<5s_2+5s_3+5s_4$，

所以 $5s_2+5s_3+5s_4>rc$，所以 $s_2+s_3+s_4>\dfrac{1}{5}rc$ 。

d.由以上可得出$U_{r\times c}$極大獨立集基數範圍：$\frac{1}{5}rc < s_2 + s_3 + s_4 < \frac{2}{3}rc$，

即$\frac{1}{5}(r\times c) < s < \frac{2}{3}(r\times c)$。

二、研究目的二：若$U_{1\times c}$或$U_{2\times c}$極大獨立集基數固定為s時，極大獨立集的排列數討論。

基本零件有四種：如圖 10、圖 11、圖 12、圖 13 分別為1×3最大獨立集、2×2最大獨立集、1×4最大獨立集、2×3次大獨立集。

(一) $U_{1\times c}$極大獨立集之排列數：圖 10 與圖 12 為$r=1$極大獨立集的構成零件，其圖形的變化如下：

1. 零件的變化：在組裝零件時，相接的兩個零件之間會將 0 重疊(如圖 14)，所以零件數即為$s-1$，又每個零件都有 2 種變化，所以全部零件的變化為2^{s-1}。

2. 兩端的變化：兩端可選擇有無外加一個非獨立點，共有$2\times 2 = 2^2$種變化。

3. 綜上可得知，若$U_{1\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其極大獨立集之排列數為

   $2^{s-1}\times 2^2 = 2^{s+1}$。

(二) $U_{2\times c}$極大獨立集之排列數：圖 11 與圖 13 為$U_{2\times c}$極大獨立集的構成零件，其圖形的變化如下：

1. 零件的變化：在組裝零件時，相接的兩個零件之間會將 0 重疊(如圖 15)，所以零件數即為$s-1$，又每個零件都有 2 種變化，所以全部零件的變化為2^{s-1}。

2. 翻轉的變化：第 1 個之後每個 0 皆位於前一個 0 的另一列，

   所以第 1 個 0 在第 1 列時，第 2 個 0 在第 2 列，第 3 個 0 在第 1 列…，以此類推；

   當第 1 個 0 在第 2 列時，第 2 個 0 在第 1 列，第 3 個 0 在第 2 列…，以此類推，

   所以每一種零件排列皆可翻轉成 2 種極大獨立集，即有2^1種變化。

3. 綜上可得知，若$U_{2\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其極大獨立集之排列數為

   $2^{s-1}\times 2^1 = 2^s$。

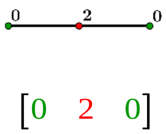


圖 10：1×3最大獨立集。

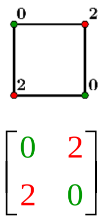


圖 11：2×2最大獨立集。

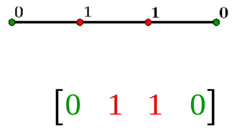


圖 12：1×4最大獨立集。

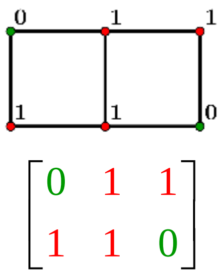


圖 13：2×3次大獨立集。

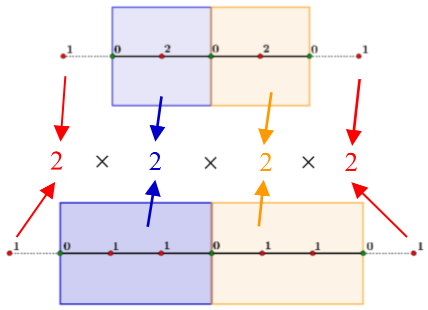


圖 14：$1\times c$零件排列狀況。

三、研究目的三：$U_{1\times c}$ 或$U_{2\times c}$ 圖形，固定 c 值大小時，可以求其極大獨立集的確定基數。

(一) $U_{1\times c}$ 極大獨立集之排列數：

1. 圖形基數：假設$U_{1\times c}$ 由 x 個1×3零件及 y 個1×4 零件構成，每個零件皆含有兩個獨立點，又零件在組裝時相接的兩個零件之間會將獨立點重疊，所以$U_{1\times c}$ 極大獨立集基數為 $2x+2y-(x+y-1) = x+y+1$。

2. 圖形大小：每個1×3零件及1×4 零件分別占 3 個點和 4 個點，且零件在組裝時相接的兩個零件之間會將獨立點重疊，由以上零件構成的圖形，兩端是否加入 a 個非獨立點，有三種變化：$a=0$（如圖 16）、$a=1$（如圖 17）、$a=2$（如圖 18），所以 $3x+4y-(x+y-1)+a=|V_{1\times c}|=c$，化簡後得$2x+3y+a+1=c$，又為了得到$(x,y)$整數解，令$c=6k+t$，其中$t,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$t\in\{n \mid 0\le n<6, n\in\mathbb{Z}\}$，

所以$2x+3y=6k+(t-a-1)$，其中$x,y,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。(詳細過程請參考實驗日誌)

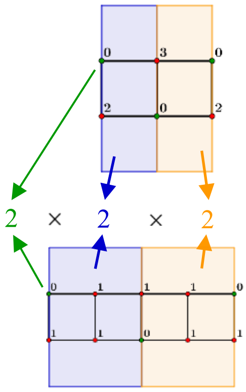


圖 15：$U_{2\times c}$ 零件排列狀況。

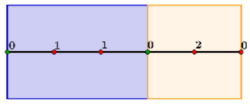


圖 16：$U_{1\times 6}$ 範例，由一個1×3零件及一個1×4零件構成，且兩邊皆不增加非獨立點。

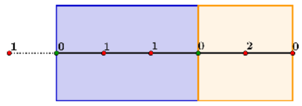


圖 17：$U_{1\times 6}$ 範例，由一個1×3零件及一個1×4零件構成，且增加一個非獨立點。

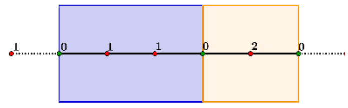


圖 18：$U_{1\times 8}$ 範例，由一個1×3零件及一個1×4零件構成，且兩邊皆增加一個非獨立點。

表 1： $c \geq 6$時，$U_{1\times c}$ 極大獨立集基數。

c	$6k+0$	$6k+1$	$6k+2$
極大獨立集基數	$2k \sim 3k$	$2k+1 \sim 3k+1$	$2k+1 \sim 3k+1$
c	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
極大獨立集基數	$2k+1 \sim 3k+2$	$2k+2 \sim 3k+2$	$2k+2 \sim 3k+3$

(二) $U_{2\times c}$ 極大獨立集基數：(詳細過程請參考實驗日誌)

表 2：$c \geq 2$時，$U_{2\times c}$ 極大獨立集基數。

c	$2k+0$	$2k+1$
極大獨立集基數	$k+1 \sim 2k$	$k+1 \sim 2k+1$

四、研究目的四：極大獨立集基數固定時，如何從$U_{r\times c}$ 最密集極大獨立集，變成其他格子圖大小的極大獨立集。

(一) 求出$U_{r\times c}$ 最密集極大獨立集的基數：

我們將$V_{r\times c}$ 切割成 c 個$V_{r\times 1}$ 來觀察，其中$V_{r\times 1} \subseteq V_{r\times c}$ 。

以圖 19 為$V_{4\times 3}$ 切割成 3 個$V_{4\times 1}$的例子。

1. r 為奇數：

(1)r 為奇數時，$U_{r\times 1}$ 的狀況：r 為奇數時，$U_{r\times 1}$ 明顯有以下 2 種最密集極大獨立集。

a.子集 A：如圖 20-a， $A \subseteq V_{r\times c}$ ，A 為$U_{r\times 1}$最密集極大獨立集，$v_{(1,1)}$的獨立數為 0，$v_{(r,1)}$的獨立數也為 0，$|A| = \dfrac{r+1}{2}$ 。

b.子集 B：如圖 20-b， $B \subseteq V_{r\times c}$ ，B 為$U_{r\times 1}$最密集極大獨立集，$v_{(1,1)}$與$v_{(r,1)}$的獨立數皆記為「+」，$|B| = \dfrac{r-1}{2}$ 。

c.為符合定義：「獨立點互不相鄰」，子集 A 必定與子集 B 相鄰，子集 B 也必定與子集 A 相鄰。

$$\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\end{bmatrix}$$

圖 19：最密集極大獨立集切割方式。

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\\ a & b\end{array}$$

圖 20：子集 A 與子集 B 的結構。

$$\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix}$$

圖 21：r 與 c 為奇數，且子集 A 較多的狀況。

(2)r 為奇數時，求最密集極大獨立集基數：我們再分成以下兩種狀況：

a.c 為奇數：依兩種子集數量的多寡再分成 2 種狀況：

(a)子集 A 較多：如圖 21，共有$\dfrac{c+1}{2}$個子集 A、與$\dfrac{c-1}{2}$個子集 B，

所以此狀況$U_{r\times c}$的最密集極大獨立集基數

$$= \left(\frac{(c+1)}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{(c-1)}{2}+1\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)+\frac{(r+1)}{2}$$

$$= \frac{(c-1)}{2}\left(\frac{(r+1)}{2}+\frac{(r-1)}{2}\right)+\frac{(r+1)}{2} = \frac{(c-1)}{2}\times r+\frac{(r+1)}{2}$$

$$= \frac{r(c-1)+(r+1)}{2} = \frac{rc-r+r+1}{2} = \frac{rc+1}{2} 。$$

(b)子集 B 較多：如圖 22，共有$\dfrac{c-1}{2}$個子集 A、與$\dfrac{c+1}{2}$個子集 B，

所以此狀況$U_{r\times c}$的最密集極大獨立集基數

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c+1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)\\
&=\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c-1)}{2}+1\times\frac{(r-1)}{2}\right)\\
&=\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{(c-1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)+\frac{(r-1)}{2}\\
&=\frac{(c-1)}{2}\left(\frac{(r+1)}{2}+\frac{(r-1)}{2}\right)+\frac{(r-1)}{2}=\frac{(c-1)}{2}\times r+\frac{(r-1)}{2}\\
&=\frac{r(c-1)+(r-1)}{2}=\frac{rc-r+r-1}{2}=\frac{rc-1}{2}\text{ 。}
\end{aligned}
$$

b.c 為偶數：如圖 23，共有$\frac{c}{2}$個子集 A、與$\frac{c}{2}$個子集 B，

所以此狀況的$U_{r\times c}$最密集極大獨立集基數

$$=\left(\frac{c}{2}\times\frac{(r+1)}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\times\frac{(r-1)}{2}\right)=\frac{c}{2}\left(\frac{(r+1)}{2}+\frac{(r-1)}{2}\right)=\frac{c}{2}\times r=\frac{rc}{2}\text{ 。}$$

2. r 為偶數：r 為偶數時，$U_{r\times 1}$最密集極大獨立集只有 1 種。

子集 C：如圖 24，$C\subseteq V_{r\times c}$，C 為$U_{r\times 1}$最密集極大獨立集，$|\,C\,|=\frac{r}{2}$ 。

又 r 為偶數時，此極大獨立集共有 c 個子集 C，(如圖 25)

所以此狀況的$U_{r\times c}$最密集極大獨立集基數$=c\times\frac{r}{2}=\frac{rc}{2}$ 。

3. 綜上可得：

(1)如果 r 與 c 皆為奇數，則最密集極大獨立集基數為$\frac{rc+1}{2}$或$\frac{rc-1}{2}$ 。

(2)如果 r 和 c 至少有一數為偶數，則最密集極大獨立集基數為$\frac{rc}{2}$ 。

$$\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}$$

圖 22：r 與 c 為奇數，且子集 B 較多的狀況。

$$\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\\+\end{bmatrix}$$

圖 23：r 為奇數，c 為偶數的狀況。

$$\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\end{bmatrix}$$

圖 24：子集 C 的結構。

$$\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\+\\0\\+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+\\0\\+\\0\end{bmatrix}$$

圖 25：r 為偶數的狀況。

(二) 0(獨立點)移動的極大獨立集擴大：我們定義 0(獨立點)可以移動改變極大獨立集結構而使極大獨立集擴大。以下是獨立點的移動定義：

1. 獨立點移動時，會使附近的格子點獨立數改變，圖 26 為由 0 移動至 0 的過程。另外，原為 0 的格子點獨立數會變成 1。

$$\begin{bmatrix} & -1 & +1 & \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ & -1 & +1 & \end{bmatrix}$$

圖 26：0 移動至 0 後，其他格子點的獨立數變化。

2. 0 移動至 0 後，此圖必須是合理排列。

   且除了上段 0、0 的兩個點外；

   其他的點，獨立數記為「+」者不能變成 0，獨立數為 0 者不能變成「+」。

(三) 0 移動的限制：

0 移動後，此圖必須是合理排列，可分成兩個限制：(如圖 27)

1. 0 不能移動到 0 的旁邊：

   因為只有大於 1 的格子點會相鄰其他 0，所以 0 不能移動到大於 1 的格子點上。

2. 不能出現不相鄰 0 的「+」：

   因為只有 1 相鄰 1 個 0，所以 0 不能從 1 旁邊移走。

$$\begin{bmatrix} & (0) & \\ 0 & 2 & (0) \\ & (0) & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & (0) & \\ & 0 & (0) \\ & (0) & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & + & \\ + & 1 & + \\ & 0 & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & + & \\ + & 1 & + \\ & + & \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

圖 27：0 移動的限制。

3. 由以上兩個限制，可統整出 0 移動的條件：

   (1)內部的 0 移動條件：(由 0 移至 ?)

$$\begin{bmatrix} & ? & ? & \\ ? & 0 & ? & ? \\ & ? & ? & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & + & + & \\ + & 0 & ? & + \\ & + & + & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & >1 & + & \\ >1 & 0 & 1 & + \\ & >1 & + & \end{bmatrix}$$

   (2)邊界或角的 0 往極大獨立集外移動的條件：

$$\begin{bmatrix} & ? \\ ? & 0 \\ & ? \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & ? & \\ ? & & 0 \\ & ? & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & ? \\ ? & 0 \\ & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & + \\ + & 0 \\ & + \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & >1 \\ >1 & 0 \\ & >1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

4. 由以上兩種狀況可歸納出「0(獨立點)移動定理」：

   (1)當 0 相鄰 1 個 1 時，只能往 1 的方向移動，否則不能移動。

   (2)當「邊界或角的 0」沒有相鄰 1 時，只能往極大獨立集外移動。

(四) 0 移動後對其他 0 能否移動的影響：

已知「內部 0 的移動條件」及「邊界或角 0 的移動可能」，但 0 移動會使極大獨立集

結構改變，就可能使其他 0 能否移動的狀況改變，所以以「0(獨立點)移動定理」:「當 0 相鄰 1 個 1 時，只能往 1 的方向移動」為基礎，探討 0 移動對其他 0 能否移動的影響。

1.「0 移動影響其他 0 能否移動」的定義：

(1)將被影響的 0 稱為「目標 0」。

(2)本實驗只判別 1 個 0 移動 1 次是否影響目標 0 能否移動。

(3)影響：代表某 0 移動後，改變了目標 0 能否移動，

目標 0 的狀況包的狀況括「不能動→能動」及「能動→不能動」。

(4)不影響：代表某 0 移動後沒有改變目標 0 能否移動，

目標 0 的狀況包括「能動→能動」及「不能動→不能動」。

(5)*：代表沒有設定格子點值的格子點，不會影響其他格子點的格子點值。

(表示格子點間的距離)。

2. 先前的 0 移動後，目標 0 能否移動的判別條件：因為「目標 0 能否移動」的條件是「目標 0 只相鄰 1 個 1」，所以先前的 0 移動後，目標 0 能否移動的判別條件：先前的 0 移動後，是否使「目標 0 相鄰 1 個 1」的對錯性質改變。所以「使目標 0 能動」，即「使目標 0 相鄰 1 的個數為 1」,「使目標 0 不能動」，即「使目標 0 相鄰 1 的個數不為 1」。

3.「0 移動影響其他 0 能否移動」的性質：(詳細推論過程請參考實驗日誌)

(1)性質 2-1：如果目標 0 沒有相鄰 1，不能移動，且該目標 0 有相鄰至少一個 2，則當相鄰「1 個與目標 0 相鄰的 2」，且不與其他「與目標 0 相鄰的 2」相鄰的另一個 0 移走時，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

(2)性質 2-2：如果目標 0 相鄰 1 個 1，能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的 1」旁邊，原本能移動的目標 0 會被影響變成不能移動。另外，如果該目標 0 有相鄰至少一個 2，則當「目標 0 相鄰的 2」相鄰的另一個 0 移走時，原本能移動的目標 0 也會被影響變成不能移動。

(3)性質 2-3：如果目標 0 相鄰 2 個 1，不能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的其中一個 1」的旁邊，且不相鄰另一個「目標 0 相鄰的 1」，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

(4)性質 2-4：如果目標 0 相鄰 3 個 1，不能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的其中兩個 1」的旁邊，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

(5)性質 2-5：如果目標 0 相鄰 4 個 1，不能移動，則其他 0 無法只移動 1 次而影響 0 能否移動。

(6)性質 2-6：哈密頓距離不小於 3 的 0 移動不會影響目標 0 能否移動。

(7)性質 2-7：符合性質 2-1~2-5 的移動會影響目標 0 能否移動。

(五) 最密集極大獨立集擴大的定義：極大獨立集一次擴大一行(列)。(這裡先只討論擴行)

我們將極大獨立集的擴行分成以下兩種：

1. 往外擴增一行：在 c 行最密集極大獨立集的右(左)邊界新增一個第$(c+1)$行，並由第 c 行的 0 移動到第$(c+1)$行上使此極大獨立集為合理排列。(這裡先只討論往右擴行)

2. 內部擴行：在任相鄰 2 行之間新增一行非獨立點集(因為極大獨立集基數固定)，可分為以下 3 種：(如圖 28、圖 29、圖 30)

(1)在兩個邊界行之間擴行：$c=2$，在兩行之間新增一行非獨立點集。

(2)在一個邊界行與一個內部行之間擴行：$c>2$，$i\in\mathbb{N}$，且$i=c-1$或$i=1$，在第 i 行與第$(i+1)$行之間新增一行非獨立點集，使原來的第$(i+1)$行變成第$(i+2)$行。

(3)在兩個內部行之間擴行：$c\geq 4$，$i\in\mathbb{N}$，且$1<i<c-1$，第 i 行與第$(i+1)$行之間，新增一行非獨立點集，使得原來的第$(i+1)$行變成第$(i+2)$行。

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & 0 \\ 0 & + \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 \\ + & 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & 0 & + & + & 0 \\ 0 & + & + & 0 & + \\ + & 0 & + & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖 28：在兩個邊界行之間擴行。　圖 29：在一個邊界行與一個內部行之間擴行。　圖 30：在兩個內部行之間擴行。

(六) 最密集極大獨立集往右擴增一行的性質：

1. 性質 3-1：邊界上的「+」須有上下方相鄰的 0 往右移動。

先假設最密集的極大獨立集擴增一行的狀況：$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ & \vdots \end{bmatrix}$，

以 $U_{5\times c}$ 為例，如果沒有 0 移動狀況如右圖：$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & ? \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & ? \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & ? \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \end{bmatrix}$，

由 0 的定義，可知：有 0 的位置可以往右外加一個「+」；

由 0 的個數不再增加可知：有「+」的位置無法往右外加格子點，

所以為順利往右擴增一行，需有 0 往右移動，將缺少的 ? 格子點補加「+」。

(1)合理排列：$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \end{bmatrix}$，

a_{3c} 的 0 往右擴增一行移動成 $a_{3(c+1)}$ 的 0，推得 $a_{2(c+1)}, a_{4(c+1)}$ 為「+」，

而其他的 0 可以往右外加一個「+」，以上 $U_{5\times c}$ 便可順利向右擴增成 $5\times(c+1)$。

(2)不合理排列：$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & ? \\ + & 0 & + \end{bmatrix}$，

a_{4c} 的「+」相鄰 a_{3c}, a_{5c} 的 0 都沒有移動，所以無法補齊 a_{43}。

(3)由以上兩種狀況，可推論得：

極大獨立集往右擴增一行時，「+」須有上下方相鄰的 0 往右移動，

將該「+」無法外加的格子點補齊。

得到性質 3-1 後，探討非最密集的狀況擴增一行的狀況。

2. 性質 3-2：要擴行(列)的邊上所有 0 之間的哈密頓距離皆為 2。

證明：利用排除法，將邊上所有 0 之間的哈密頓距離為 2 之外的狀況排除。

(1)假設邊上 0 之間的哈密頓距離為 3 時，可以進行擴行：如圖 31，兩個 0 的哈密頓距離為 3，又參考性質 3-1：兩個「+」需要相鄰的 0 移動，且各只相鄰 1 個 0，所以兩個 0 皆要動，利用 0(獨立點)移動定理推得兩個「+」的座位值皆大於 1，所以推得如圖 31 的兩個 0 相鄰，故此極大獨立集錯誤，所以此假設錯誤。

(2)假設邊上 0 之間的哈密頓距離為 4 以上時，可以進行擴行：如圖 32，兩個 0 之間的哈密頓距離為 4，形成中間沒有相鄰邊上 0 的「+」，使「+」外加的格子點無法藉由旁邊的 0 移動形成，故此極大獨立集錯誤，同理，0 之間的哈密頓距離為 4 以上時，也會形成類似錯誤，所以此假設錯誤。

(3)綜上所述，0 之間的哈密頓距離為 3 以上時，不能進行擴行，又 0 之間的哈密頓距離最小值為 2，所以只有在擴行的邊上所有 0 之間的哈密頓距離皆為 2 時，可以進行擴行。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ & 0 \\ & + \\ & + \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ & 0 \\ 0 & >1 \\ 0 & >1 \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖 31：性質 3-2 狀況 1。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & \\ + & \\ + & \\ + & \\ 0 & \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ & 0 \\ + & + \\ + & ? \\ + & + \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & \\ + & \\ + & \\ \vdots & \\ + & \\ + & \\ 0 & \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ & 0 \\ + & + \\ + & ? \\ \vdots & \vdots \\ + & ? \\ + & + \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖 32：性質 3-2 狀況 2。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ + \\ \vdots \\ + \\ 0 \end{bmatrix}$$

圖 33：第 1 種極大獨立集的定義。

$$\begin{bmatrix} 0 & ? \\ + & ? \\ \vdots & ? \\ + & ? \\ 0 & ? \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \\ + & + \\ 0 & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & + \\ 0 & + \end{bmatrix}$$

圖 34：第 1 種極大獨立集擴行的可能推論過程。

(七) 最密集極大獨立集擴增一行的可能：

1.「極大獨立集擴增一行的可能」推論公式：

我們將最密集極大獨立集依兩角格子點屬性分成 3 種狀況。

(1)第 1 種極大獨立集：兩角皆為 0(如圖 33)。下表為先前已求出的數據：

表 3：第 1 種極大獨立集擴行排列數

(詳細推論過程請參考實驗日誌)

r	3	5	7	9	11
排列數	3	5	8	?	?
推測公式		$3\times2-1$	$5\times2-2$	$8\times2-?$	$13\times2-?$

令 r 列第 1 種極大獨立集擴增一行排列數為 d_r，已知 $d_3=3, d_5=5, d_7=8$，

以下要證明：$d_{r+2}=2d_r-d_{r-4}$。(請參考圖 34)

a. 由符合定義的 r 列的極大獨立集(如圖 34 的上加中間的部分)為思考基準，去求 $(r+2)$ 列的極大獨立集的可能狀況數。

b. $(r+2)$ 列的極大獨立集，可由 r 列極大獨立集在最下面加 1 個 0 形成，又 0 有動或不動 2 種可能，且 r 列擴增一行排列數為 d_r，所以得到 $2d_r$ 種狀況。

c. 因為如此組合中部份 $(r+2)$ 列的極大獨立集會出現錯誤，所以要將錯誤排除，又前 r 列皆符合定義，所以錯誤狀況即為 0 與 0 皆不動時，使「+」不符定義的狀況(如圖 34)。

d. 又前 r 列皆符合定義，所以 0 上方的 0 必須動，以滿足「+」形成，所以此時最下面 3 個 0 皆被控制，將無變化性 6 列切割，剩下可變動的 $(r-4)$ 列極大獨立集(如圖 34 上半部分)。所以錯誤極大獨立集數 $=d_{r-4}$。

e. 綜上，$d_{r+2}=2d_r-d_{r-4}$。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ + \end{bmatrix}$$

圖 35：第 2 種極大獨立集的定義。

$$\begin{bmatrix} 0 & ? \\ + & ? \\ \vdots & ? \\ + & ? \\ 0 & ? \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \\ + & + \end{bmatrix}$$

圖 36：第 2 種極大獨立集擴行的可能推論過程。

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \\ + & + \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & ? \\ + & ? \\ \vdots & ? \\ + & ? \\ 0 & ? \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \\ + & + \end{bmatrix}$$

圖 37：第 2 種極大獨立集的定義。

$$\begin{bmatrix} + \\ 0 \\ + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ + \end{bmatrix}$$

圖 38：第 1 種極大獨立集擴行的可能推論過程。

(2)第 2 種極大獨立集：一角為「+」，另一角為 0 (如圖 35) 。令 r 列第 2 種極大獨立集擴增一行排列數為 e_r ，以下要證明： $e_r = d_{r-3}$ 。(請參考圖 36)

a.因為兩個「+」在角上，所以上方的 0 必須動。

b.這時可將極大獨立集將下方無變化性的 3 列切除，形成上方有變化性，且類似於第 1 種的極大獨立集，(如圖 36 的上半部分)，所以 e_r 即為上方第 1 種極大獨立集擴增一行排列數，又該第 1 種極大獨立集的列數為 $(r-3)$ ，所以 $e_r = d_{r-3}$ 。

(3)第 3 種極大獨立集：兩角皆為「+」。(如圖 37)

令 r 列的第 2 種極大獨立集擴增一行的排列數為 f_r ，以下要證明： $f_r = d_{r-6}$ 。(請參考圖 38)

a.因為「+」在角上，所以上方的 0 必須動，同理，0 也必須動。

b.這時可將極大獨立集將上下方各將無變化性的 3 列切除，形成中間有變化性，且類似於第 1 種的極大獨立集，(如圖 38 的中間部分)，所以 f_r 即為中間第 1 種極大獨立集擴增一行排列數，又該第 1 種極大獨立集的列數為 $(r-6)$ ，所以 $f_r = d_{r-6}$ 。

2. 最密集極大獨立集擴增一行的排列數具有費氏數列的性質：

(1)第一種極大獨立集：

已知 r 列的第一種最密集極大獨立集擴增一行的排列數為 d_r （r 為奇數)，

$r \geq 9$，其遞迴式為：$\begin{cases} d_3 = 3, d_5 = 5, d_7 = 8 \\ d_r = 2d_{r-2} - d_{r-6} \end{cases}$。

證明：$d_r = d_{r-2} + d_{r-4}$ (具有費氏數列的性質)

因為 $d_r = 2d_{r-2} - d_{r-6}$，所以 $d_r - d_{r-2} = d_{r-2} - d_{r-6}$，

所以可列出以下算式，結果為 $d_r - d_7 = d_{r-2} + d_{r-4} - d_3 - d_5$。

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & \cancel{d_9} - d_7 & = & \cancel{d_7} - d_3 \\
 & \cancel{d_{11}} - \cancel{d_9} & = & \cancel{d_9} - d_5 \\
 & \cancel{d_{13}} - \cancel{d_{11}} & = & \cancel{d_{11}} - \cancel{d_7} \\
 & \cancel{d_{15}} - \cancel{d_{13}} & = & \cancel{d_{13}} - \cancel{d_9} \\
 & & \vdots & \\
 & \cancel{d_{r-6}} - \cancel{d_{r-8}} & = & \cancel{d_{r-8}} - \cancel{d_{r-12}} \\
 & \cancel{d_{r-4}} - \cancel{d_{r-6}} & = & \cancel{d_{r-6}} - \cancel{d_{r-10}} \\
 & \cancel{d_{r-2}} - \cancel{d_{r-4}} & = & d_{r-4} - \cancel{d_{r-8}} \\
+) & d_r - \cancel{d_{r-2}} & = & d_{r-2} - \cancel{d_{r-6}} \\
\hline
\multicolumn{5}{c}{d_r - d_7 = d_{r-2} + d_{r-4} - d_3 - d_5}
\end{array}
$$

又 $d_7 = 8 = 3 + 5 = d_3 + d_5$，所以 $d_r = d_{r-2} + d_{r-4}$，具有費氏數列的性質。又 $d_3 = 3$，是費氏數列的第 4 項；$d_5 = 5$，是費氏數列的第 5 項；$d_7 = 8$，是費氏數列的第 6 項⋯，所以如果 a_k 是費氏數列的第 k 項($k \in \mathbb{N}$)，

則 $k = \dfrac{r-1}{2} + 3$，所以 $d_r = a_{\frac{r-1}{2}+3}$。

(2)第二種極大獨立集：已知 r 列的第二種最密集極大獨立集擴增一行的排列數為 e_r，r 為偶數，$r \geq 4$，且 $e_r = d_{r-3}$，$d_r = a_{\frac{r-1}{2}+3}$，

所以 $e_r = d_{r-3} = a_{\frac{(r-3)-1}{2}+3} = a_{\frac{r-4}{2}+3} = a_{\frac{r}{2}+1}$，所以 $e_r = a_{\frac{r}{2}+1}$。

(3)第三種極大獨立集：已知 r 列的第二種最密集極大獨立集擴增一行的排列數為

f_r，r 為奇數，$r \geq 7$，且 $f_r = d_{r-6}$，$d_r = a_{\frac{r-1}{2}+3}$，

所以 $f_r = d_{r-6} = a_{\frac{(r-6)-1}{2}+3} = a_{\frac{r-7}{2}+3} = a_{\frac{r-1}{2}}$，所以 $f_r = a_{\frac{r-1}{2}}$。

(4)求出一般式：因為費氏數列的一般式為 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，

所以可求出列數不小於 3 的最大獨立集擴增一行的排列數一般式：

假設 r 列的最大獨立集擴增一行的排列數為 p_r。$(r \geq 3)$

a.r 為奇數，且要擴行的邊界上獨立點數量為 $\frac{r+1}{2}$，

則 $p_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3}\right]$。

b.r 為奇數，且要擴行的邊界上獨立點數量為 $\frac{r-1}{2}$，

則 $p_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}\right]$。

c.r 為偶數，則 $p_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r}{2}+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r}{2}+1}\right]$。

(八)最密集極大獨立集內部擴行：

1. 內部擴行相關性質：

(1)性質 4-1：如果新增行旁邊的一個 0 在邊界上，則該 0 不能與上下各 2 列在新增行旁邊的 0 同時往新增行移動。

證明：如圖 39，$c=2$，0 在新增行的右側。0 在移動後改變了綠色格子點的格子點值，根據 0(獨立點)移動定理，上下 2 列的 0 皆不能往新增行移動，所以新增行旁邊的某一個 0 移動不能與上下 2 列的 0 同時往新增行移動。

(2)性質 4-2：如果新增行旁邊的 0 在邊界上，且相鄰角落格子點，則該 0 不能往新增行移動。

證明：如圖 40，$c=2$，0 相鄰右下的角落格子點。在兩行之間擴行之後，根據 0(獨立點)移動定理，0 會相鄰 2 個 1 而不能移動。也就是說，r 列最密集極大獨立集中的第 2 和$(r-1)$列的 0 不能往新增行移動。

(3)性質 4-3：如果新增行旁邊的一個 0 不在邊界上，則該 0 不能與上下相鄰列在新增行旁邊的 0 同時往新增行移動。(僅有上下相鄰列的 0)

證明：如圖 41，$c=2$，0 在新增行的右側。0 在移動後改變了綠色格子點的格子點值，根據 0(獨立點)移動定理，上下列的 0 皆不能往新增行移動，所以新增行旁邊的某一個 0 移動不能與上下列的 0 同時往新增行移動。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ 0 & + \\ + & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ + & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ + & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖 39：性質 4-1 的推論過程。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ + & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

圖 40：性質 4-2 的推論過程。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + & + \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ + & 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + & + \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ + & 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖 41：性質 4-3 的推論過程。

2. 「在兩個邊界行之間擴行」與「在一個邊界行與一個內部行之間擴行」排列數量：

我們在觀察極大獨立集時，發現一個每隔幾列就會出現的計算偏差使我們無法得到一個能適用於所有列數的極大獨立集的公式。

以「在兩個邊界行之間擴行」為例，令$U_{r\times 2}$最密集極大獨立集在兩個邊界行之間擴行的排列數量為u_r，(請參考圖 42)我們嘗試採用$(r-1)$列的極大獨立集去套用 r 列極大獨立集擴行的排列數，類似於外部擴行，發現有部分的極大獨立集不能套用，根據性質 4-2，第$(r-1)$列的 0 不能往新增行移動，所以第$(r-1)$列的 0 往新增行移動的$(r-1)$列極大獨立集不能採用，又根據性質 4-1，第$(r-1)$列的 0 移動時，上方 2 列的 0 不能同時移動，所以剩下第 1 列到第$(r-4)$列的 0 有變化，所以套用不能套用的極大獨立集有u_{r-4}種。

另外，(請參考圖 43)我們還有發現第$(r-2)$列的 0 的一個現象：在$(r-1)$列極大獨立集中，第$(r-2)$列的 0 相鄰其對應的下方角落格子點，根據性質 4-2，第$(r-2)$

列的 0 不能移動，又在 r 列極大獨立集中，第$(r-2)$列的 0 沒有相鄰其對應的下方角落格子點，所以可以往新增的行移動，我們探討 r 列極大獨立集中$(r-2)$列的 0 移動的狀況，又根據性質 4-1，第$(r-2)$列的 0 移動會使上下各 2 列的 0 不能往新增行移動，所以下方 5 列被固定，剩下第 1 列到第$(r-5)$列有變化性，所以第$(r-2)$列的 0 移動的極大獨立集共有u_{r-5}種。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & + \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & + & + \end{bmatrix}$$

圖 42：最密集極大獨立集內部擴行排列數量。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & + & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & + & + \end{bmatrix}$$

圖 43：最密集極大獨立集內部擴行排列數量。

後來我們發現 r 列極大獨立集中第$(r-1)$列的 0 移動的狀況數量其實大於u_{r-4}，如圖 42，因為第$(r-3)$列的 0 沒有移動，所以第$(r-5)$列的 0 可以移動，又根據性質 4-2，且第$(r-5)$列的 0 在邊界上，所以第$(r-5)$列的 0 在$(r-4)$列的極大獨立集中移動是錯誤的，所以此狀況需要再加入，又根據性質 4-1，第$(r-5)$列的 0 移動會使上下各 2 列的 0 無法移動，所以剩下有變化性的第 1 列到第$(r-8)$列，所以還需要再扣掉u_{r-8}個狀況。

另外第$(r-2)$列的 0 移動的極大獨立集數量也大於u_{r-5}，如圖 43，因為第$(r-4)$列的 0 沒有移動，所以第$(r-6)$列的 0 可以移動，又根據性質 4-2，且第$(r-6)$列的 0 在邊界上，所以第$(r-6)$列的 0 在 $(r-5)$列的極大獨立集中移動是錯誤的，所以此狀況需要再加入，又又根據性質 4-1，第$(r-6)$列的 0 移動會使上下各 2 列的 0 無法移動，所以剩下有變化性的第 1 列到第$(r-9)$列，所以還需要再加u_{r-9}個狀況。

最後我們發現這種計算偏差會一直發生，所以無法求出一個確定能適用於所有列數的遞迴式。而「在一個邊界行與一個內部行之間擴行」因為也有包含邊界的擴行，所以也有類似的狀況，無法求出結果。

3. 在兩個內部行之間擴行的排列數量：因為沒有邊界行進行擴行，所以性質 4-2 在此狀況不適用，所以不會出現之前的狀況而能求出公式。

下表為不同列數最密集極大獨立集內部擴行的排列數量。

表 4：兩個內部行之間擴行的排列數量。

r	2	3	4	5
內部擴行排列數	3	5	8	13

令 r 列的最密集極大獨立集內部擴行的排列數量為 w_r，

證明：$w_r=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3}\right]$。

我們以三個步驟證明。

$$\begin{matrix}\begin{bmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ + & + & 0\\ 0 & + & +\\ + & + & 0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0 & + & +\end{bmatrix}\\ a\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\begin{bmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ + & + & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & + & +\\ + & 0 & +\\ + & 0 & +\end{bmatrix}\\ b\end{matrix}$$

圖 44：最密集最大獨立集內部擴行可能數量

a.證明：$w_r=2w_{r-1}-w_{r-3}$，$r\geq 5$，請參考圖 44。

由$(r-1)$列的極大獨立集推論出 r 列極大獨立集內部擴行的排列數量，

如圖 44-a，在$(r-1)$列的極大獨立集(如圖 44-a 的上半部)的下方新增一列與第 r 個 0，因為第 r 個 0 有動與不動 2 種變化，配合 w_{r-1} 可得 $w_r=2w_{r-1}$。但需要排除錯誤狀況，如圖 44-b 的狀況，第 r 個 0 與第$(r-1)$個 0 都動的極大獨立集。因為 0 動了，且前$(r-1)$列是正確的，根據性質 4-3，第$(r-2)$個 0 不能移動。這時下方 3 列的 0 皆已固定，剩下上方$(r-3)$列還有變化性(如圖 44-b 的上半部)，所以錯誤的狀況數量為 w_{r-3}，所以 $w_r=2w_{r-1}-w_{r-3}$。

b.證明：$w_r=w_{r-1}+w_{r-2}$，$r\geq 5$。

已知 w_r 的遞迴式為：$\begin{cases}w_2=3, w_3=5, w_4=8\\ w_r=2w_{r-1}-w_{r-3}, r\geq 5\end{cases}$。

因為 $w_r = 2w_{r-1} - w_{r-3}$ ，所以 $w_r - w_{r-1} = w_{r-1} - w_{r-3}$ ，可列出以下算式：

$$
\begin{array}{rl}
& \cancel{w_5} - w_4 = \cancel{w_4} - w_2 \\
& \cancel{w_6} - \cancel{w_5} = \cancel{w_5} - w_3 \\
& \cancel{w_7} - \cancel{w_6} = \cancel{w_6} - \cancel{w_4} \\
& \cancel{w_8} - \cancel{w_7} = \cancel{w_7} - \cancel{w_5} \\
& \vdots \\
& \cancel{w_{r-3}} - \cancel{w_{r-4}} = \cancel{w_{r-4}} - \cancel{w_{r-6}} \\
& \cancel{w_{r-2}} - \cancel{w_{r-3}} = \cancel{w_{r-3}} - \cancel{w_{r-5}} \\
& \cancel{w_{r-1}} - \cancel{w_{r-2}} = w_{r-2} - \cancel{w_{r-4}} \\
+) & w_r - \cancel{w_{r-1}} = w_{r-1} - \cancel{w_{r-3}} \\
\hline
& w_r - w_4 = w_{r-1} + w_{r-2} - w_2 - w_3
\end{array}
$$

所以 $w_r - w_4 = w_{r-1} + w_{r-2} - w_2 - w_3$ ，又 $w_4 = 8 = 3 + 5 = w_2 + w_3$ ，

所以 $w_r \cancel{-w_4} = w_{r-1} + w_{r-2} \cancel{-w_2 - w_3}$ ，所以 $w_r = w_{r-1} + w_{r-2}$ ，具有費氏數列的性質。

c. 證明： $w_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}\right]$ 。

因為 $w_2 = 3$，是費氏數列的第 4 項； $w_3 = 5$，是費氏數列的第 5 項； $w_4 = 8$，是費氏數列的第 6 項…，所以如果 a_k 是費氏數列第 k 項($k \in \mathbb{N}$)，則 $k = r + 2$，

所以 $w_r = a_{r+2}$ ，又費氏數列一般式為 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$ ，

所以 $w_r = a_{r+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}\right]$ 。

伍、研究結果

一、當r,c的值固定時，討論$U_{r\times c}$極大獨立集的狀況。

(一) 用程式，進行模擬排列狀況並加以整理。

程式中，最成功的版本即時篩選優化版，運行4×6的長方形狀況，在幾秒內就能準確輸出所有結果和圖形。

(二) $U_{r\times c}$極大獨立集基數範圍：設極大獨立集基數為s。

1. $U_{1\times c}$極大獨立集範圍：$\frac{1}{3}\times(c\times 1)\le s\le\frac{2}{3}\times(c\times 1)$。

2. $U_{2\times c}$極大獨立集範圍：$\frac{1}{4}\times(2\times c)<s<\frac{5}{12}\times(2\times c)$。

3. $U_{r\times c}$極大獨立集範圍：$\frac{1}{5}(r\times c)<s<\frac{2}{3}(r\times c)$。

二、若$U_{1\times c}$或$U_{2\times c}$圖形極大獨立集基數固定為s時，可以求其極大獨立集的排列數：

(一) $U_{1\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其排列數＝2^{s+1}。

(二) $U_{2\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其排列數＝2^{s}。

三、$U_{1\times c}$或$U_{2\times c}$圖形，固定c值大小時，可以求其極大獨立集的確定基數。

(一) $U_{1\times c}$極大獨立集基數：

表 5： $c\ge 6$時，$U_{1\times c}$極大獨立集基數。

c	$6k+0$	$6k+1$	$6k+2$
極大獨立集基數	$2k\sim 3k$	$2k+1\sim 3k+1$	$2k+1\sim 3k+1$
c	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
極大獨立集基數	$2k+1\sim 3k+2$	$2k+2\sim 3k+2$	$2k+2\sim 3k+3$

(二) $U_{2\times c}$極大獨立集基數：

表 6：$c\ge 2$時，$U_{2\times c}$極大獨立集基數。

c	$2k+0$	$2k+1$
極大獨立集基數	$k+1\sim 2k$	$k+1\sim 2k+1$

四、極大獨立集的基數固定時，討論如何從$U_{r\times c}$最密集極大獨立集，變成其他大小格子圖的極大獨立集：

(一) 0(獨立點)移動定理：若 0 相鄰 1 個 1，則 0 只能往 1 的方向移動；

若邊界或角的 0 沒有相鄰 1，則 0 只能往邊界外移動。

(二) 0 移動後影響另一 0 能否移動的規則：

1. 性質 2-1：

如果目標 0 沒有相鄰 1，不能移動，且該目標 0 有相鄰至少一個 2，則當相鄰「1 個與目標 0 相鄰的 2」，且不與其他「與目標 0 相鄰的 2」相鄰的另一個 0 移走時，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

2. 性質 2-2：

如果目標 0 相鄰 1 個 1，能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的 1」旁邊，原本能移動的目標 0 會被影響變成不能移動。

另外，如果該目標 0 有相鄰至少一個 2，則當「目標 0 相鄰的 2」相鄰的另一個 0 移走時，原本能移動的目標 0 也會被影響變成不能移動。

3. 性質 2-3：

如果目標 0 相鄰 2 個 1，不能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的其中一個 1」的旁邊，且不相鄰另一個「目標 0 相鄰的 1」，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

4. 性質 2-4：

如果目標 0 相鄰 3 個 1，不能移動，則當其他 0 移至「目標 0 相鄰的其中兩個 1」的旁邊，原本不能移動的目標 0 會被影響變成能移動。

5. 性質 2-5：

如果目標 0 相鄰 4 個 1，不能移動，則其他 0 無法只移動 1 次而影響 0 能否移動。

6. 性質 2-6：哈密頓距離不小於 3 的 0 移動不會影響目標 0 能否移動。

7. 性質 2-7：符合性質 2-1~2-5 的移動會影響目標 0 能否移動。

(三) 當 $r \geq 3, c \geq 2$ ，$U_{r\times c}$ 最密集極大獨立集，擴增一行（第$(c+1)$行）的排列數：

1. 若 r 為奇數，且要擴行的邊界上獨立點數量為 $\frac{r+1}{2}$，則擴增一行的排列數為

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3}\right]。$$

2. 若 r 為奇數，且要擴行的邊界上獨立點數量為 $\frac{r-1}{2}$，則擴增一行的排列數為

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}\right]。$$

3. 若 r 為偶數，則擴增一行的排列數為 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r}{2}+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r}{2}+1}\right]$。

(四) $r \geq 2, c \geq 4$ ，$U_{r\times c}$ 最密集極大獨立集中，$i \in \mathbb{N}$ ，且$1<i<c-1$，在第 i 行和第$(i+1)$之間

擴增一行後的排列數量：$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}\right]$。

陸、未來展望

以下還有幾個方向能再繼續研究：

一、利用零件思維，將圖形大小與極大獨立集基數的範圍關係式修正得更準確。

二、運用零件拼貼求出 3 列以上極大獨立集排列數。

三、探討擴增一行後能再次擴行(列)的可能。

四、求出 0 最密集極大獨立集的擴大的上限，及該上限的極大獨立集大小。

五、將平面極大獨立集的思維套用至立體。

柒、參考文獻

[1] West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (Vol. 2). Upper Saddle River: Prentice hall.

[2] 林福來(2014)。高中數學課本 2 下。新北市：南一書局。

[3] 張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。國立臺灣大學出版中心。

[4] 陳俐妤(2017)。這樣排，滿意了嗎？新北市中小學科學展覽。

[5] 臺北市立建國高級中學 104 學年度科學班甄選入學科學能力檢定。2019 年 6 月 24 日，取自 https://drive.google.com/file/d/0B7jDeVmaMNirZkRLMmpvaWg3Mlk/view。

[6] 鄭天鈞(2016)。格子點上選擇位置之性質研究。2016 年臺灣區國際科學展覽會。

[7] 鄭宇翔(2019)。圖形中的數獨。2019 年臺灣區國際科學展覽會。

【評語】030417

極大獨立集問題是圖形理論中一個重要的問題。作者們主要針對 r x c 格子圖格子點圖的極大獨立集作了分析，給出了格點圖的極大獨立集的點數的上、下界(r x c)/5 與 2(r x c)/3。對於列數小於等於 2 且極大獨立集點數為 k 的極大獨立集的種類也給出了結果。對於如何從原有格點圖的最大獨立集（或近似最大獨立集）擴增為多一行的格點圖的具有特殊型態的極大獨立集，也做了討論。想法頗具創意，值得嘉許。美中不足的是部分的說明過於繁複，也有一些說理的過程又稍嫌簡略了些。如果能將論述的重點集中於某幾個面向，針對這些部分給出完整而且清楚的論述會更好。

作品海報

壹、前言

「有七個人依次坐在有七個座位的長凳上，每個人都盡可能地不坐在其他人的旁邊，如果可以選擇不坐他人的旁邊，就不得坐在已經有人坐的座位旁邊。」

4	5	1	6	3	7	2

一般科展作品，是有舊定義與性質可依循，但是此作品幾乎沒有。我們先用獨立數定義座位屬性，以自然實驗的控制變因手法製造問題，並用定義製造出性質以解決較繁雜的問題。也意外發現部分問題的排列數變化類似於費氏數列，還有更奇妙的發現。本研究也與5G基地台佈設問題相關，探討基地台訊號完全覆蓋狀況下，佈設最少基地台的可能性，也將成為我們未來研究的方向。

貳、研究目的

一、名詞定義與解釋

（一）格子圖(Lattice Graph)：我們以$U_{r\times c}=(V_{r\times c},E_{r\times c})$表示，其中$V_{r\times c}=\{v_{(i,j)}\mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,c\}$，$v_{(i,j)}$表示$r\times c$格子圖中，第$i$列，第$j$行的點。$E_{r\times c}=\{v_{(i,j)}v_{(i+1,j)}\mid i=1,\dots,r-1,\ j=1,\dots,c\}\cup\{v_{(i,j)}v_{(i,j+1)}\mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,c-1\}$。

（二）合理排列：以下視為不同排列，綠色為獨立點，紅色為非獨立點。

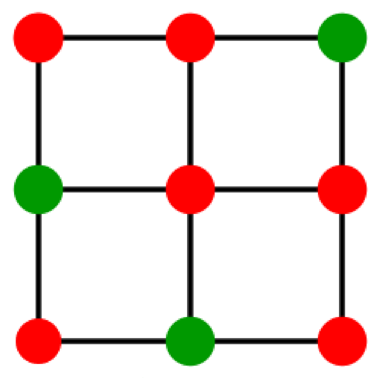


圖1：獨立點和非獨立點構成的完整3×3矩形

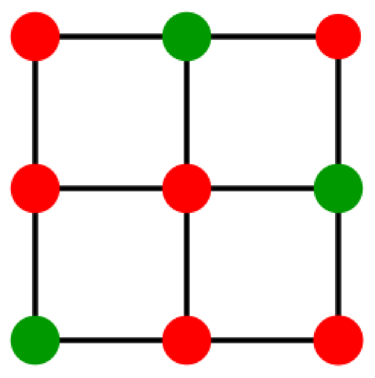


圖2：獨立點和非獨立點構成的完整3×3矩形

（三）2維的哈密頓距離：若$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{N}$，則$P$、$Q$兩點的哈密頓距為$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$。

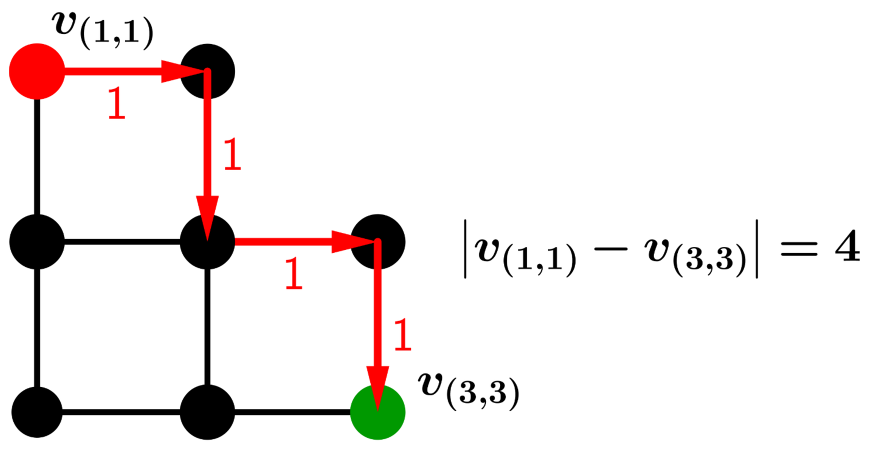


圖3：哈密頓距離

（四）最密集極大獨立集：不一定只有一個。

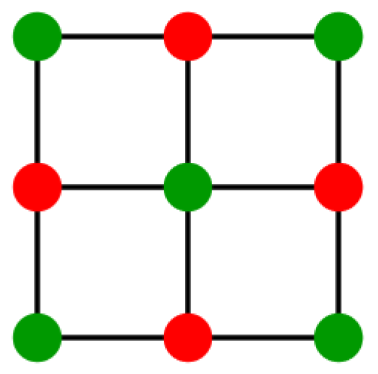


圖4：$U_{3\times 3}$圖形最密集極大獨立集

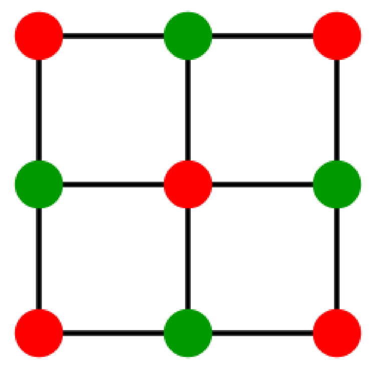


圖5：$U_{3\times 3}$圖形最密集極大獨立集

（五）獨立數定義：

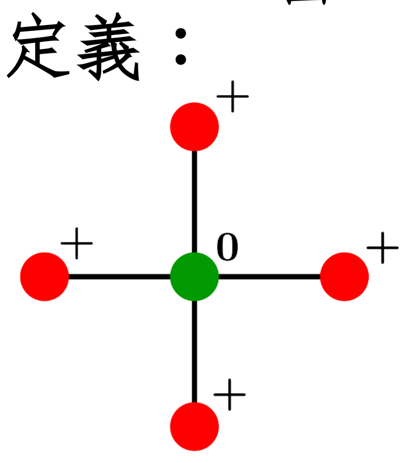


圖6：獨立點的獨立數

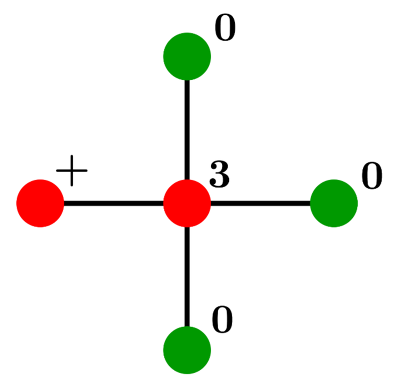
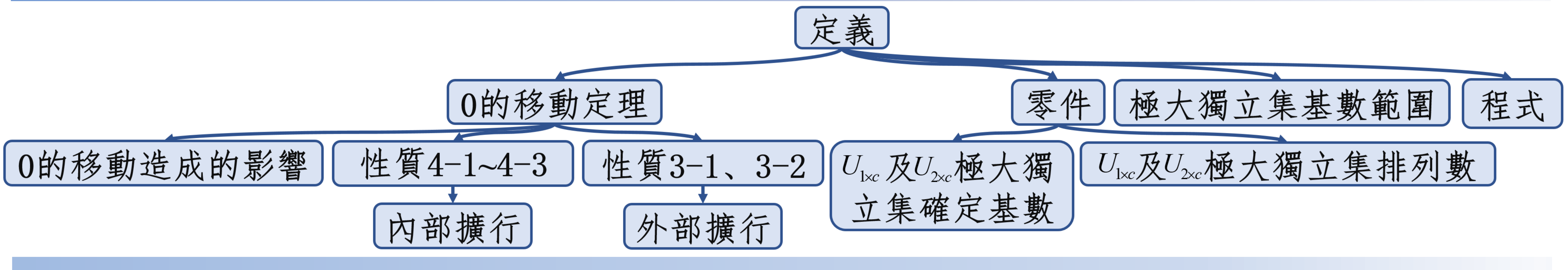


圖7：非獨立點的獨立數

二、研究目的

（一）當r,c值固定時，討論$U_{r\times c}$極大獨立集的狀況。
（二）$U_{1\times c}$及$U_{2\times c}$圖形極大獨立集基數固定為s時，求其極大獨立集排列數。
（三）固定c值大小時，求$U_{1\times c}$及$U_{2\times c}$極大獨立集的確定基數。
（四）極大獨立集基數固定時，討論從$U_{r\times c}$最密集極大獨立集，變成其他大小長方形的極大獨立集。

參、研究結果



一、當r,c值固定時，討論$U_{r\times c}$極大獨立集的狀況

$U_{r\times c}$極大獨立集基數範圍：設極大獨立集基數為$s_{(r,c)}$。

（一）$\frac{1}{3}\times(1\times c)\le s_{(1,c)}\le\frac{2}{3}\times(1\times c)$。 （二）$\frac{1}{4}\times(2\times c)<s_{(2,c)}<\frac{5}{12}\times(2\times c)$。 （三）$\frac{1}{5}\times(r\times c)<s_{(r,c)}<\frac{2}{3}\times(r\times c)$。

二、$U_{1\times c}$或$U_{2\times c}$極大獨立集基數固定為s時的排列狀況

2獨立點的極大獨立集零件

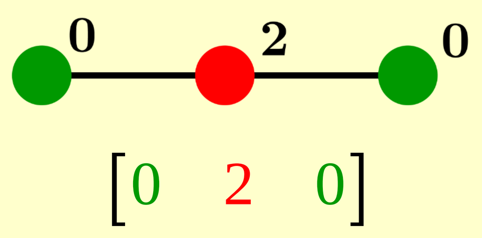


圖8：1×3最大獨立集

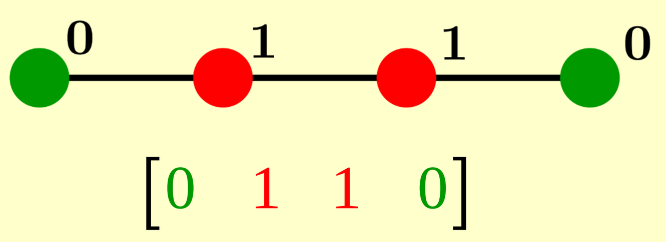


圖9：1×4最大獨立集

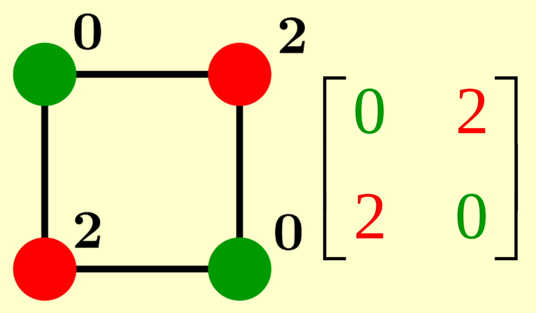


圖10：2×2最大獨立集

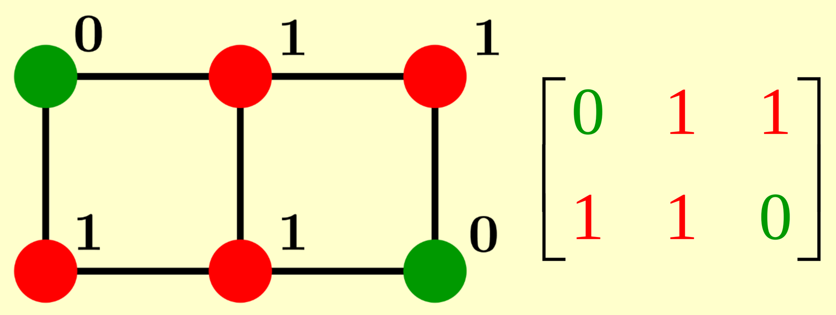


圖11： 2×3次大獨立集

（一）$U_{1\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其排列數$=2^{s+1}$（二）$U_{2\times c}$極大獨立集基數固定為s時，其排列數$=2^{s}$

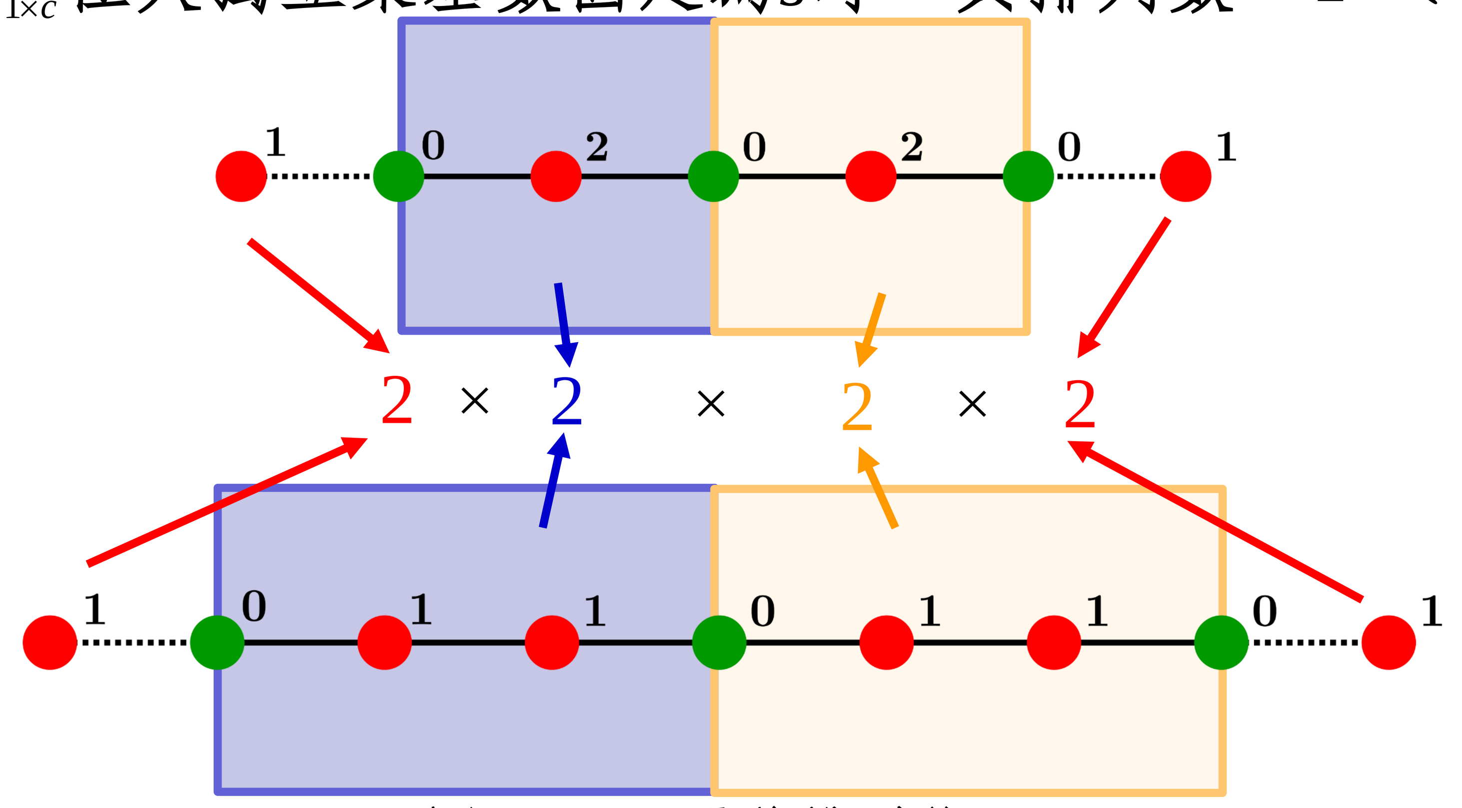


圖12：$U_{1\times c}$零件排列狀況

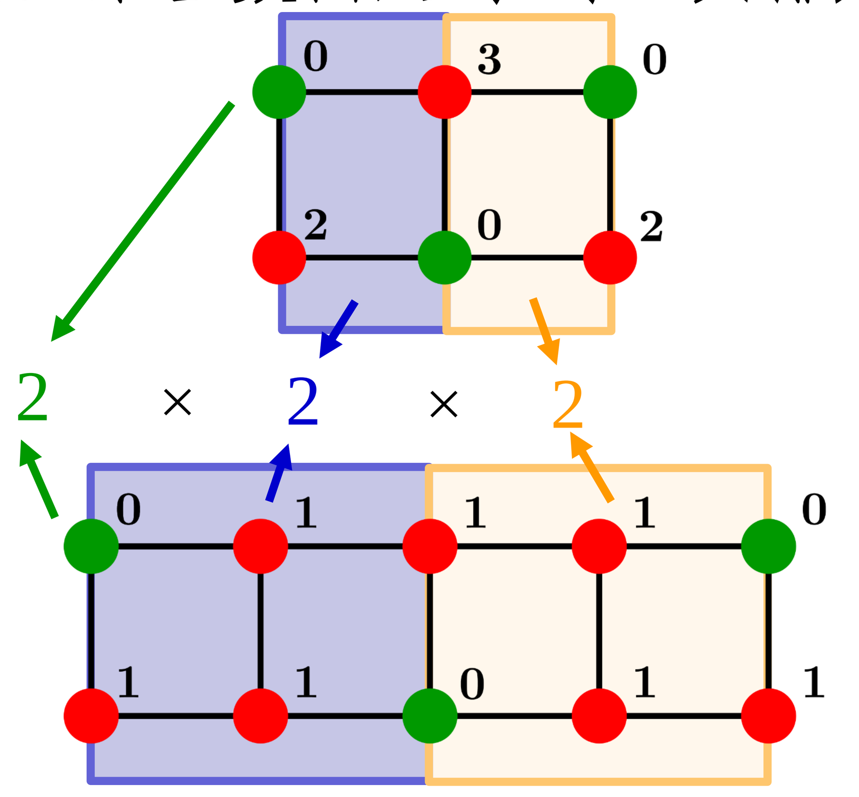


圖13：$U_{2\times c}$零件排列狀況

三、固定c值大小時，可以確定$U_{1\times c}$及$U_{2\times c}$極大獨立集基數 $s_{(1,c)}$ 及 $s_{(2,c)}$ 的值

表 1：$c \ge 6$時，$s_{(1,c)}$ 的確定值

c	$6k$	$6k+1$	$6k+2$
$s_{(1,c)}$	$2k \sim 3k$	$2k+1 \sim 3k+1$	$2k+1 \sim 3k+1$
c	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$s_{(1,c)}$	$2k+1 \sim 3k+2$	$2k+2 \sim 3k+2$	$2k+2 \sim 3k+3$

表 2：$c \ge 2$時，$s_{(2,c)}$ 的確定值

c	$2k$	$2k+1$
$s_{(2,c)}$	$k+1 \sim 2k$	$k+1 \sim 2k+1$

四、極大獨立集基數固定，由$U_{r\times c}$最密集極大獨立集擴大成其他大小長方形的極大獨立集

（一）0(獨立點)移動定理

1. 若0相鄰1個1，則0只能往1的方向移動。
2. 若邊界或角的0沒有相鄰1，則0只能往邊界外移動。

$$\begin{bmatrix} & + & + & \\ + & 0 & 1 & + \\ & + & + & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & >1 & + & \\ >1 & 0 & 1 & + \\ & >1 & + & \end{bmatrix}$$

圖15：0移動定理1

$$\begin{bmatrix} & + \\ + & 0 \\ & + \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & >1 \\ >1 & 0 \\ & >1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$$

圖16：0移動定理2

$$\begin{bmatrix} & (0) & \\ 0 & 2 & (0) \\ & (0) & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & (0) & \\ + & 0 & (0) \\ & (0) & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & + & \\ + & 1 & + \\ + & 0 & + \\ & + & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & + & \\ + & 1 & + \\ + & + & + \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

圖14：0移動的限制

（二）r為奇數，且擴行前第c行獨立點個數$=\frac{r+1}{2}$時，外部擴增一行的可能排列數

1. 假設：

外部擴行第一種圖形：若r為奇數，且擴行前第c行獨立點個數$=\frac{r+1}{2}$。則令其極大獨立集外部擴增一行的可能排列數為X_r。

2. 結果：

(1) $X_r = 2X_{r-2} - X_{r-6}$（$r \in \mathbb{N}$、$r \ge 9$且 $r \equiv 1 \pmod 2$）。

(2) $X_r = X_{r-2} + X_{r-4}$（$r \in \mathbb{N}$、$r \ge 7$且 $r \equiv 1 \pmod 2$）。

(3) $X_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}+3}\right]$。

$$\begin{bmatrix} + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ + \\ 0 \\ + \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & ? \\ \vdots & \vdots \\ 0 & ? \\ + & + \\ 0 & ? \\ + & + \\ 0 & ? \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ + \\ 0 \\ + \end{bmatrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 0 & ? \\ \vdots & \vdots \\ 0 & ? \\ + & + \\ 0 & ? \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \end{bmatrix}\end{matrix} \text{或} \begin{bmatrix} + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ + \\ 0 \\ + \end{bmatrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 0 & ? \\ \vdots & \vdots \\ 0 & ? \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \\ + & + \\ 0 & + \end{bmatrix}\end{matrix}$$

圖 17：第一種圖形外部擴行的可能排列數推論過程

肆、近期研究

（一）$c \ge 4$時，在兩個內部行之間擴增一行的可能排列數

1. 假設：

$c \ge 4$ 的最密集極大獨立集在兩內部行之間擴增一行可能排列數為W_r。

2. 結果：**(1)** $W_r = W_{r-1} + W_{r-2}$（$r \ge 4$）。 **(2)** $W_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+2}\right]$。

$$\begin{bmatrix} + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} + & 0 & + & + & 0 \\ 0 & + & + & 0 & + \\ + & 0 & + & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖18：兩個內部行之間擴增一行

（二）$c=2$時，在兩個邊界行之間擴增一行

1. 假設：

(1)令$c=2$的最密集極大獨立集的兩個邊界行之間擴增一行可能排列數為D_r。

(2)令$c=2$的最密集極大獨立集的兩個邊界行之間擴增一行後，不包含下方最後一列，第1列至第i列中的i個0移動的可能排列數為R_i，其中$0<i<r$，$i \in \mathbb{N}$。

2. 結果：

(1) $D_r = 2(D_{r-1} - R_{r-4}) + R_{r-5} (r \ge 5)$。

(2) $R_i = D_i + R_{i-4} (i \ge 4)$。

(3)因為$R_i = D_i + R_{i-4} (i \ge 4)$，

所以 $R_i = D_i + R_{i-4} = D_i + D_{i-4} + R_{i-8} = \cdots$

$= D_i + D_{i-4} + D_{i-8} + D_{i-12} + \cdots + D_{i-4\left[\frac{i}{4}\right]+4} + R_{i-4\left[\frac{i}{4}\right]}$。

(4) $D_r = 2\left(D_{r-1} - D_{r-4} - D_{r-8} - D_{r-12} - \cdots D_{r-4\times\left[\frac{r}{4}\right]+4} - R_{r-4\times\left[\frac{r}{4}\right]}\right)$

$+D_{r-5} + D_{r-9} + D_{r-13} + \cdots + D_{r-4\times\left[\frac{r}{4}\right]+3} + R_{r-4\times\left[\frac{r}{4}\right]-1}$

$$\left.\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{bmatrix}\right\}(r-1)\text{列} \to \left.\begin{matrix}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & 0 \end{bmatrix}\end{matrix}\right\}r\text{列}、\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & 0 & + \end{bmatrix}\end{matrix}\right\}r\text{列}$$

圖19：在兩邊界行之間擴行的可能排列數推論過程−1

$$\left.\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & + \end{bmatrix}\right\}(r-1)\text{列} \to \left.\begin{matrix}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & 0 \end{bmatrix}\end{matrix}\right\}r\text{列}$$

圖20：在兩邊界行之間擴行的可能排列數推論過程−2

$$\begin{matrix}\left.\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \end{bmatrix}\right\}i\text{列} \\ \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\end{matrix} \to \begin{matrix}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & + \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\end{matrix}$$

圖21：在兩邊界行之間擴行的可能排列數推論過程−3

（三）$c \ge 4$ 時，在一個邊界行與一個內部行之間擴增一行的可能排列數

1. 假設：

(1)如圖**22**，右下角格子點為**0**：我們令此類最密集極大獨立集在一個邊界行與一個內部行之間擴行的排列數為 E_r。

(2)如圖**23** ，右下角格子點為「+」：我們令此類最密集極大獨立集在一個邊界行與一個內部行之間擴行的排列數為 F_r。

(3)如圖**24** ，如果第***i***列的**0**在內部（$0 < i < r$），則擴增一行後從第1列到第***i***列中新增行的兩邊共***i***個0移動的可能排列數為 S_i。

2. 結果：

(1) $E_r = 2E_{r-1} - S_{r-3} + S_{r-5} (r \ge 5)$。 **(2)** $F_r = 2(F_{r-1} - S_{r-4})(r \ge 4)$。 **(3)** $S_i = F_i + S_{i-4} (i \ge 4)$。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & + & 0 \\ + & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 \end{bmatrix}$$

圖**22**：E_r

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 \\ + & 0 & + & + \end{bmatrix}$$

圖**23**：F_r

$$i\text{列}\left\{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 \\ + & 0 & + & + \end{bmatrix}\right. \quad \begin{bmatrix} 0 & + & + & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

圖**24**：S_i

伍、討論

一、內部擴行的條件：我們發現內部擴行時，**0**並不需要是最密集的狀況，如圖**25**即為一例，內部擴行的條件是之後可以研究的方向之一。

二、根據 $D_r = 2(D_{r-1} - R_{r-4}) + R_{r-5}$，$R_i = D_i + R_{i-4} (i \ge 4)$，利用**Excel**的函數求出數據，查詢**OEIS**得到 $D_r = D_{r-1} + D_{r-3}$，但目前還無法證明。而E_r與 F_r 的數據沒有查到相關資料。

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & + & 0 \\ 3 & 0 & + & 1 \\ 0 & 2 & + & 1 \\ 1 & 1 & + & 0 \\ 2 & 0 & + & 2 \\ 0 & 2 & + & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖**25**：非最密集極大獨立集的內部擴行

陸、結論

一、當 r, c 值固定時，可確定$U_{r \times c}$極大獨立集基數上下界。

二、$U_{1 \times c}$ 及$U_{2 \times c}$圖形極大獨立集基數固定為**s**時，可求出其極大獨立集的排列數。

三、固定***c***值大小時，可求出$U_{1 \times c}$及$U_{2 \times c}$圖形極大獨立集的確定基數。

四、極大獨立集基數固定，討論從$U_{r \times c}$最密集極大獨立集，可變成其他大小長方形的極大獨立集。

（一）$U_{r \times c}$最密集極大獨立集，可求出在圖形外擴增一行的可能排列數。

（二）$U_{r \times c}$最密集極大獨立集，可求出內部擴增一行的可能排列數。

柒、未來展望

一、運用零件拼貼求出3列以上極大獨立集排列數及其確定基數。

二、探討擴增一行後，能再次擴大的可能性。

三、求出**0**最密集極大獨立集基數固定時，圖形擴大的上限及該上限圖形的大小。

四、將平面極大獨立集的思維套用至立體。

五、探討基地台訊號完全覆蓋狀況下，佈設最少基地台的可能性。

捌、參考資料

[1]West, D. B. (2001). Introduction to graph theory (Vol. 2). Upper Saddle River: Prentice hall.

[2]張鎮華**(2017)**。演算法觀點的圖論。國立臺灣大學出版中心。

[3]陳俐妤**(2017)**。這樣排，滿意了嗎？新北市中小學科學展覽。

[4]臺北市立建國高級中學**104**學年度科學班甄選入學科學能力檢定。**2015**年**6**月**24**日，取自 **https://drive.google.com/file/d/0B7jDeVmaMNirZkRLMmpvaWg3Mlk/view**。