中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030416

多邊形的等比例分割

學校名稱：臺中市立沙鹿國民中學

作者：	指導老師：
國二 吳映澄 國一 吳映築 國二 林靖軒	楊欣航

關鍵詞：等比例切割、無窮等比數列、面積比

摘要

此研究討論將多邊形各邊依等比例分割，與特定頂點相連圍成較小的多邊形與數個小三角形，運用電腦程式 Geogebra，算出多邊形依等比例分割後，其各層三角形面積比和周長比，進而推導出其公式。

壹、 研究動機

在生活中圖形的重要性是無庸置疑的，其中幾何圖形更是不可忽略的。在我們看到三角形各邊長做比例分割所形成的小三角形面積與原三角形的面積比之關係時，引起我們的好奇，想更深入的研究，之後在無意間看到中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中數學組：層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積後，我們決定針對多邊形面積與周長的部分，以 Geogebra 程式來計算及驗證，繼續研究及探討。

貳、研究目的

一、能夠了解正多邊形與任意多邊形各邊等比例切割後，其相鄰兩三角形面積、周長關係。
二、能運用電腦觀察數據的變化。
三、計算正多邊形各邊等比分割後，其相鄰兩三角形面積、周長公式。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra 軟體、紙、筆

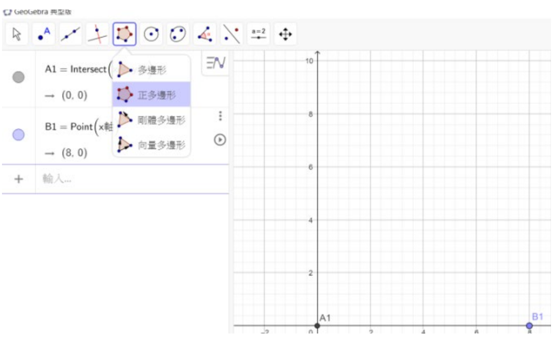
肆、研究過程

一、探討三角形各邊等比例分割的情況，用 GeoGebra 軟體繪出圖形

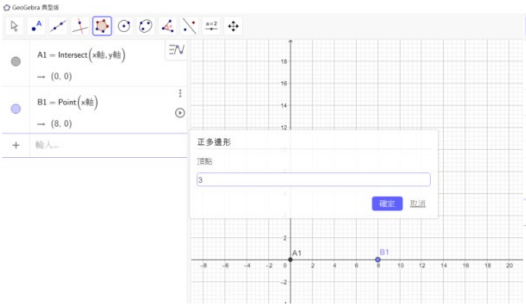
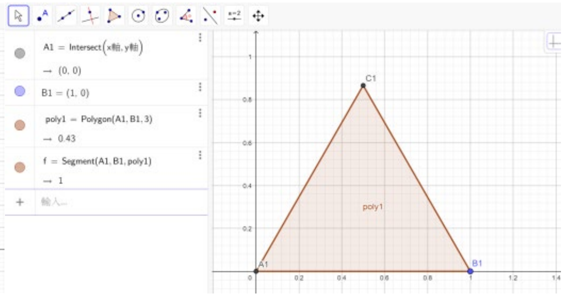
(一)、正三角形

1.面積部分：

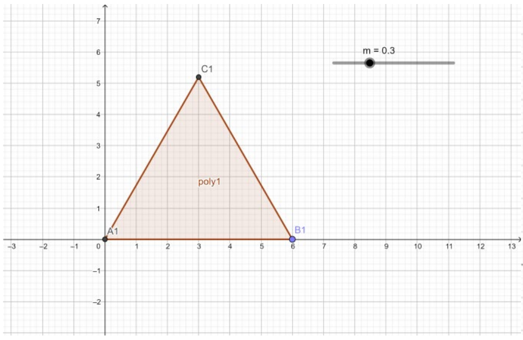
畫出點 A1、B1

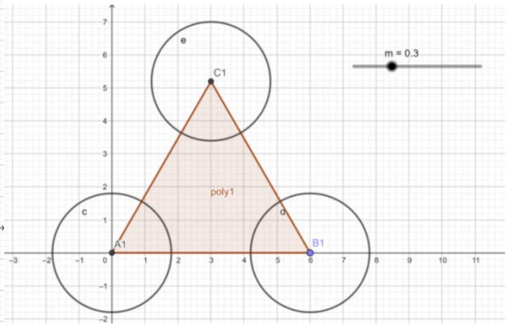


畫出正三角形(A1,B1,C1)

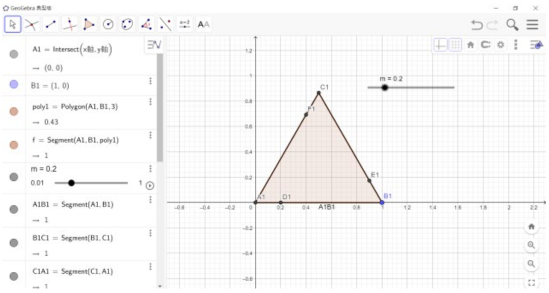
再新增數值滑桿：m(位於 0 到 1 的任意數)算出 A1B1 邊長，並將 A1B1 乘上 m 得出 m1，如圖：m=0.3，A1B1=6，則 m1=1.8。之後再畫三個半徑為 m1 的圓，如下圖：



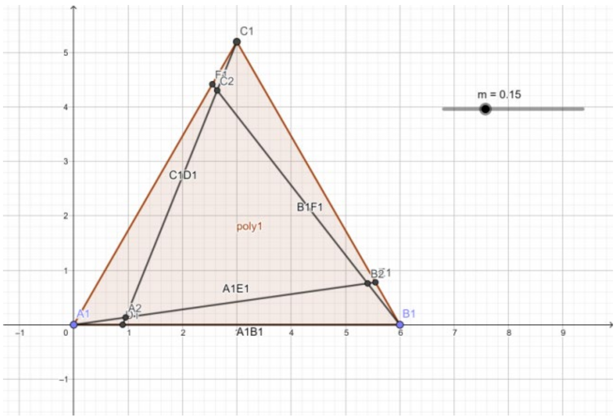


再標出三個圓與三角形的其中一邊的交點 D1，E1，F1，並隱藏其圓，此時

$\frac{\text{A1D1}}{\text{A1B1}}=\frac{\text{B1E1}}{\text{B1C1}}=\frac{\text{C1F1}}{\text{A1C1}}=m$，即 D1、E1、F1 在三角形各邊均為等比例分割點。

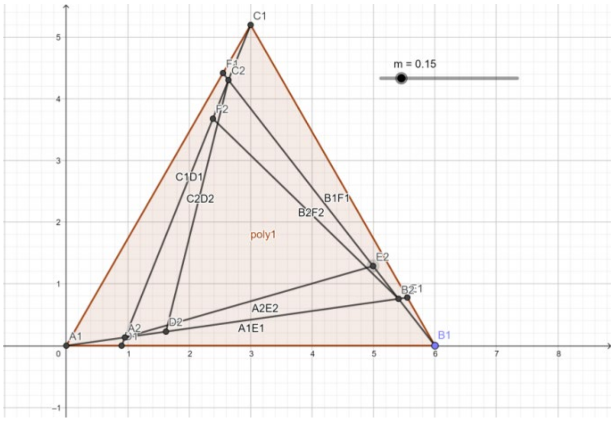


將 A1、E1 相連，並依序將 B1 與 F1、C1 與 D1 相連，交 3 點分別命名 A2、B2、C2，則△A2B2C2 即為第二層三角形。



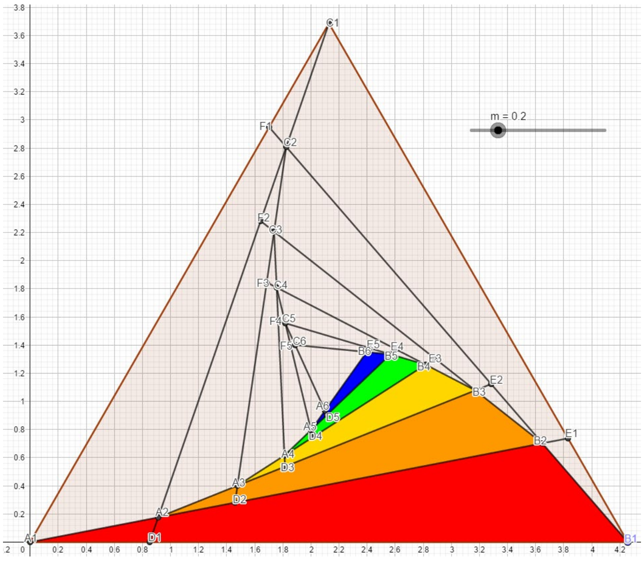
以 A2B2 為第二層三角形邊長，作法與第一層相同等，即將 m 乘上 A2B2 算出 m2，此時

$\frac{\text{A2D2}}{\text{A2B2}}=\frac{\text{B2E2}}{\text{B2C2}}=\frac{\text{C2F2}}{\text{A2C2}}=m$，D2、E2、F2 亦為△A2B2C2 各邊等比例分割點。再依第一層的方法畫出第三層三角形△A3B3C3。



依前述方法作第四、五層，五層後則運用前五層的比例變化推知，推論圖形無限延伸值。

定義$Q_1=\Delta$ A1B1B2 面積，$Q_2=\Delta$ A2B2B3 面積……，$Q_n=\Delta A_nB_nC_{n+1}$面積。



計算並觀察Q_1、Q_2、Q_3、……，相鄰兩三角形面積比值之關係，令$AR_1=\dfrac{Q_2}{Q_1}$，

$AR_2=\dfrac{Q_3}{Q_2}$ $AR_3=\dfrac{Q_4}{Q_3}$，$AR_n=\dfrac{Q_{n+1}}{Q_n}$。

m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.49	0.0005332622	0.0005332622	0.0005332622	0.0005332622
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033

由上表可發現：

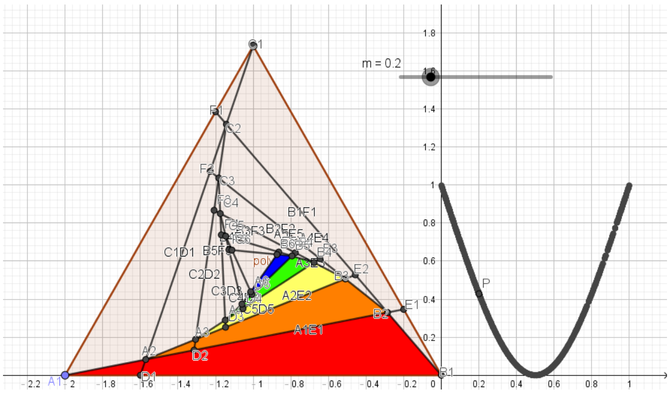
(1)當 m=0.5 時，無法畫出三角形Q_2，AR_1值為$\frac{0}{\Delta A1B1C1 \div 3}$=0，$AR_{n\geq 2}$值為$\frac{0}{0}$(不成立)，故電腦顯示為無意義。

(2)m 值相等時(除 0.5 外)，AR_n值也會相等(即任意相鄰兩三角形面積比值皆相等)

$\therefore Q_1$、Q_2、Q_3、Q_4、Q_n的面積比為無窮等比數列。

(3)可發現 m 趨近 0 或 1 時AR_n趨近 1，m 值趨近 0.5 時，AR_n值趨近 0 ，且 m 與 1-m 的對應AR_n值相等。

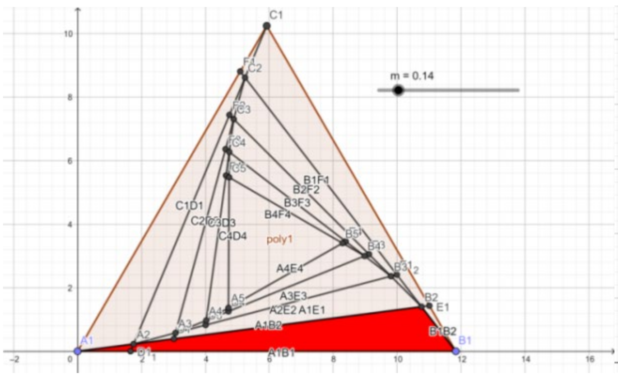
令 P(m, AR_n)，觀察當 m 變化時，AR_n值的變化情形。

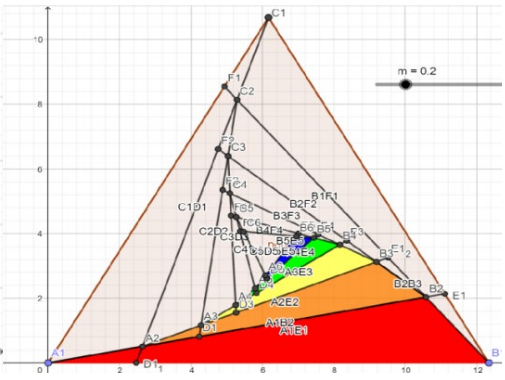


我們觀察出：當 m 變動時，AR_n值的變化情形其 P 的圖形對稱且類似拋物線圖形。

2.周長部分

將 Q1(A1,B1,B2)的三個邊 A1B2、B1B2、和 A1B1，相加算出 Q1 的周長(S_1)，即S_1=△A1B1B2 周長。用相同方法做第二層，算出 S2(△A2B2B3 周長)，並繼續做第 3、4、5、n 層。將 S2 除以 S1 算出相鄰兩三角形周長比值SR_1($\frac{S2}{S1}$)，並依序再算出SR_2、SR_3、SR_4、SR_n





整理 m 值

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869

0.2	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.49	0.0230924713	0.0230924713	0.0230924713	0.0230924713
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

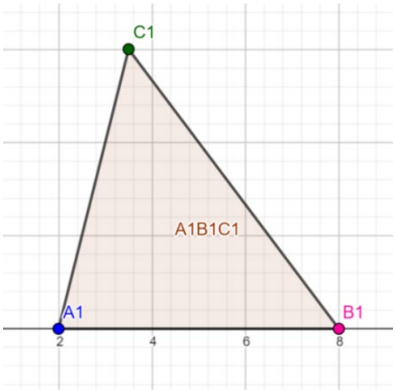
(1)m 值相同時，各 SR_n 值相等，即相鄰兩三角形周長比值相等。

(2)m 值為 0.5 時，無法畫出 Q2(周長為 0)，因此其 $SR_2, SR_3,\ SR_4$......分母為 0，無意義。

(3)m 趨近 0 和 1 時，SR_n 趨近 1；m 值趨近 0.5 時，SR_n 趨近 0

(一)任意三角形

1.面積部分



先任意畫出三角形(A1,B1,C1)

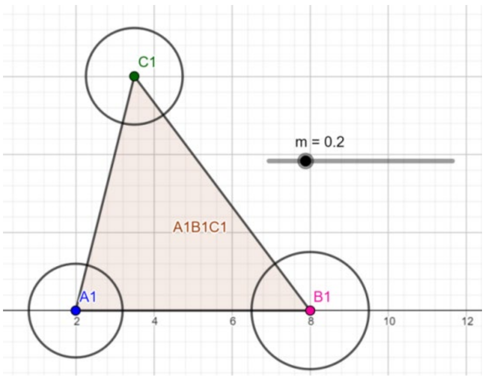
新增數值滑桿:m(位於大於 0 小於 1 的任意數)

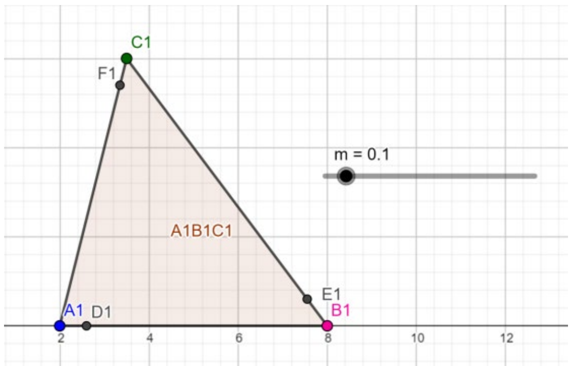
算出 A1B1、B1C1、A1C1 邊長，分別將 A1B1 乘上 m 算出 ml_1，B1C1 乘上 m 算出 ml_2，A1C1 乘上 m 算出 ml_3。如圖:m=0.2，A1B1=6，ml_1=1.2，B1C1=7.5，ml_2=1.5，A1C1=6.2，ml_3=1.24

畫三個半徑分別為 $ml_1=1.2, ml_2=1.5, ml_3=1.24$

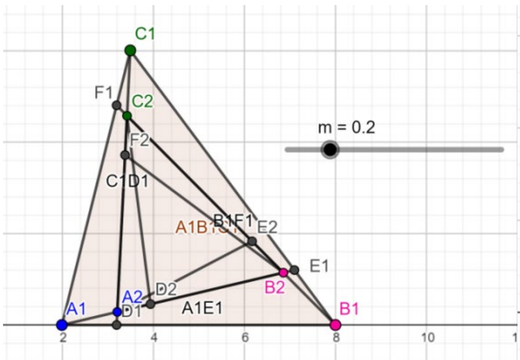
再標出三個圓與三角形的其中一邊的交點分別為 D1、E1、F1 並隱藏圓。

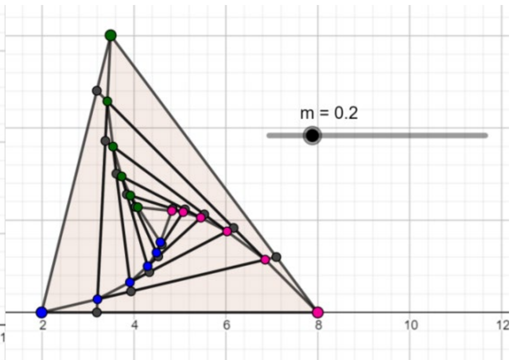
此時 D1、E1、F1 在三角形各邊均為等比例分割點。





$\frac{\text{A1D1}}{\text{A1B1}}=\frac{\text{B1E1}}{\text{B1C1}}=\frac{\text{C1F1}}{\text{A1C1}}=m$，線段 A1E1，B1F1，C1D1，可得三線段交點分別為 A2、B2、C2，則△A2B2C2 為第二層三角形，依照上述的方法做出第四、五層，第五層後則運用前五層的比例變化可知，推論圖形無限延伸之值。





計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，即 $AR_1=\frac{Q_2}{Q_1}$，$AR_2=\frac{Q_3}{Q_2}$，

$AR_3=\frac{Q_4}{Q_3}$，$AR_4=\frac{Q_5}{Q_4}$，……，$AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$。

m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033

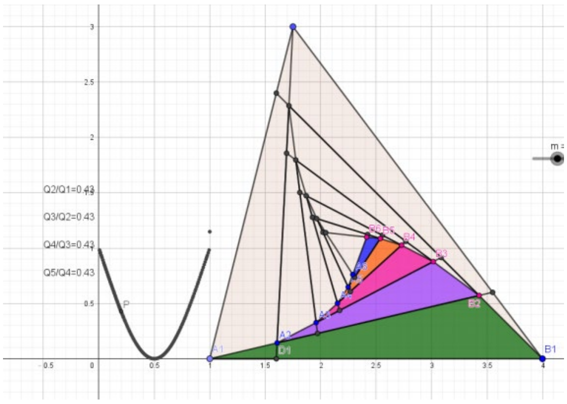
由上表可觀察到：

(1) 當 m 相同時，各 AR_n 值皆相等，即相鄰兩三角形之面積為無窮等比數列。

(2)∵當 m 值為 0.5 時，因為無法切割出小三角形∴ $AR_1=\frac{0}{Q_1}=0$，但 n≥2 時，AR_n 電腦顯示為無意義數據。

(3)當 m 值趨近 0 和 1 時，AR_n(相鄰兩三角形面積比值)趨近 1，m 值趨近 0.5 時 AR_n 值趨近 0。

令 P(m, AR_n)，觀察當 m 變化時，AR_n 值的變化情形。



我們觀察出：當 m 變動時，其 P 的圖形對稱且類似拋物線圖形。

2.周長部分

與正三角形方法大致相同

比較各 SR_n 值之關係

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869
0.2	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.45	0.1152780835	0.1152780835	0.1152780835	0.1152780835
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

(1)當 m 值相同時，各 SR_n 值(相鄰兩三角形周長比值)相等。

(2)m 值為 0.5 時，無法畫出 Q2(周長為 0)，因此其 SR_2, SR_3, SR_4, SR_n......分母為 0，故電腦顯示為無意義。

(三)比較正三角形與任意三角形的 AR_n 與 SR_n 的關係:

	AR_n		SR_n	
m	正三角形	任意三角形	正三角形	任意三角形
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707

0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

所有三角形的面積比值與周長比值相等，可一併討論。

1.比較 AR_n 與 SR_n 值的關係：

m	SR_n	AR_n	SR_n^2
0.1	0.838627869	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.6546536707	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.4500351604	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.2294157339	0.0526315789	0.0526315789
0.6	0.2294157339	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.4500351604	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.6546536707	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.838627869	0.7032967033	0.7032967033

由上表可發現： AR_n 和 $SR_n{}^2$ 的值相同。

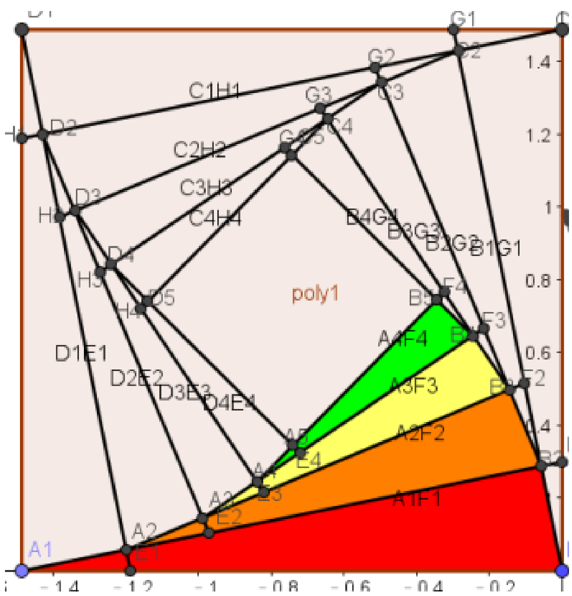
解釋其原因：

因各三角形為相似形，依相似形的面積比可知 $AR_n = SR_n{}^2$

二、四邊形

(一)正四邊形

正四邊形的做法大致與正三角形相同。



算出正四邊形切割出的各三角形之面積比與周長比例關係，並比較各 AR_n 、 SR_n 的關係。

1.面積部分

以電腦算出 Q 值面積變化及相鄰兩三角形面積比值 $AR_n(\frac{Q_{n+1}}{Q_n})$

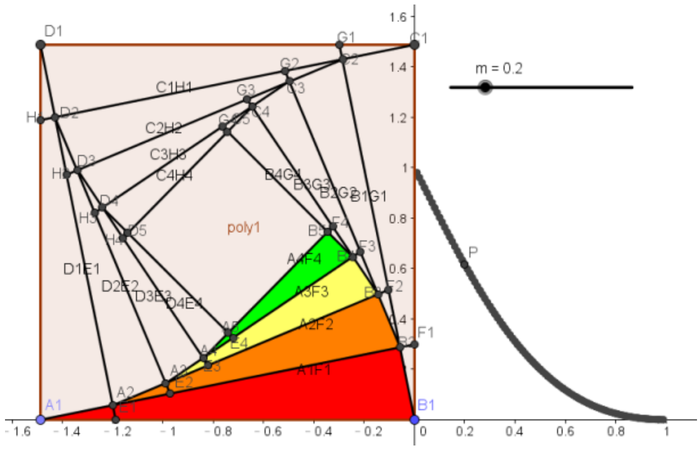
m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.801980198	0.801980198	0.801980198	0.801980198
0.2	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276
0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619
1	0	無意義	無意義	無意義

由上表可知：

(1)當 m 值越接近 1 時， AR_n 值越趨近 0，m 值越接近 0 時， AR_n 值越趨近 1。

(2)m 值相同時，各 AR_n 值相等，即相鄰兩三角形面積比值會相等。

令 P(m, AR_n)，觀察當 m 變化時， AR_n 值的變化情形



由上圖可發現：

(1)當 m 相同，各 AR_n 值皆相同(即相鄰兩三角形面積比值皆相同)

(2)m 值越大，相鄰兩三角形面積比值會越小，為遞減圖形。

(3)此圖形兩端點分別為(0,1)、(1,0)

2.周長部分

與三角形求作相鄰兩三角形周長比值作法相同，觀察各周長比值 SR_n ($\frac{S_{n+1}}{S_n}$)之變化情形

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.8955334712	0.8955334712	0.8955334712	0.8955334712
0.2	0.7844645406	0.7844645406	0.7844645406	0.7844645406
0.3	0.6704783997	0.6704783997	0.6704783997	0.6704783997
0.4	0.5570860145	0.5570860145	0.5570860145	0.5570860145
0.5	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955
0.6	0.342991703	0.342991703	0.342991703	0.342991703
0.7	0.2457695762	0.2457695762	0.2457695762	0.2457695762
0.8	0.1561737619	0.1561737619	0.1561737619	0.1561737619
0.9	0.0743294146	0.0743294146	0.0743294146	0.0743294146

由上表可知：

(1)當 m 值越接近 1 時，SR_n 值越趨近 0，m 值越接近 0 時，SR_n 值越趨近 1。

(2)當 m 值相同時，各 SR_n 值皆相同，即相鄰兩三角形周長比值皆相等。

3.比較 AR_n 、 SR_n 和 $SR_n^{\ 2}$ 的關係

m 值	AR_n	SR_n	$SR_n^{\ 2}$
0.1	0.801980198	0.8955334712	0.801980198
0.2	0.6153846154	0.7844645406	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.6704783997	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.5570860145	0.3103448276
0.5	0.2	0.4472135955	0.2
0.6	0.1176470588	0.342991703	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.2457695762	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.1561737619	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0743294146	0.0055248619

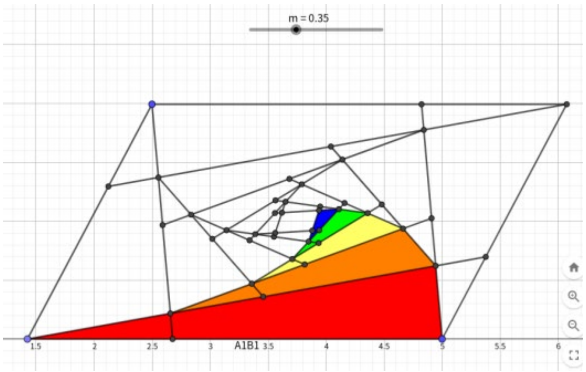
由上表可發現: AR_n 和 $SR_n^{\ 2}$ 的值相同。

解釋其原因：

因各三角形為相似形，依相似形的面積比可知 $AR_n = SR_n^{\ 2}$

(二)平行四邊形

平行四邊形的做法大致與任意三角形做法相同



算出平行四邊形切割出的各三角形之面積比與周長比例關係

1.面積部分

計算並觀察 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 ……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，即

$$AR_1=\frac{Q_2}{Q_1},\ AR_2=\frac{Q_3}{Q_2},\ AR_3=\frac{Q_4}{Q_3},\ AR_4=\frac{Q_5}{Q_4},\ AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}......$$

m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.8019801980	0.8019801980	0.8019801980	0.8019801980
0.2	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276
0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619

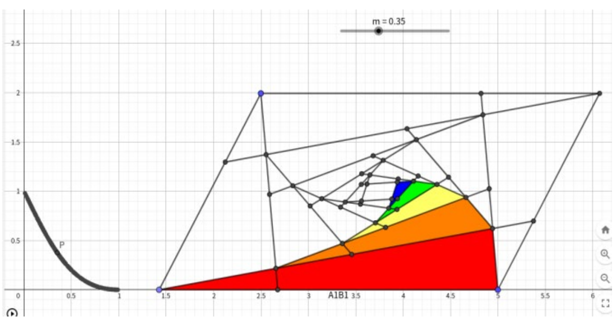
由上表可知：

(1)當 m 值相同時，各 AR_n 值相同。

(2)當 m 值越接近 1 時， AR_n 值越趨近 0，當 m 值越接近 0 時， AR_n 值越趨近 1

(3)平行四邊形與正四邊形的 AR_n 值相同。

依前述三角形的作法作出 P(m, AR_n)圖形



我們觀察出：
由上圖可發現平行四邊形 P 的圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)、(1,0)。

2.周長部分

以電腦算出 S 值周長變化及相鄰兩三角形周長比值 $SR_n(\frac{S_{n+1}}{S_n})$

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_4
0.1	0.9172124977	0.911683159	0.9062095439	0.9007970004
0.2	0.8107193438	0.7942188819	0.7778652582	0.7611949188
0.3	0.6936257249	0.6666222738	0.6380538909	0.610781432
0.4	0.5755933816	0.529619779	0.5027418873	0.4837007438
0.5	0.4616282827	0.4197893071	0.3865964402	0.4045726877
0.6	0.353950673	0.3118034461	0.2948689079	0.3416316638
0.7	0.2536332357	0.2175241746	0.2174101149	0.2634869688
0.8	0.1611905824	0.1358416118	0.1432706942	0.1739948815
0.9	0.076723217	0.0640724807	0.0702952944	0.0847898413

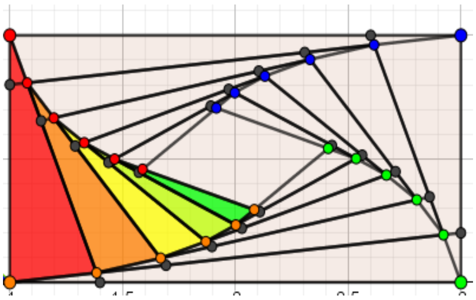
由上表可知

(1)當 m 相同時，$\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 比值並不相等，即相鄰兩三角形周長比值不相等。

(2)當 m 直趨近 1 時，$\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 值越趨近 0。

(三)矩形

矩形的做法大致與任意三角形相同



算出矩形切割出的各三角形之面積比與周長比例關係

1.面積部分

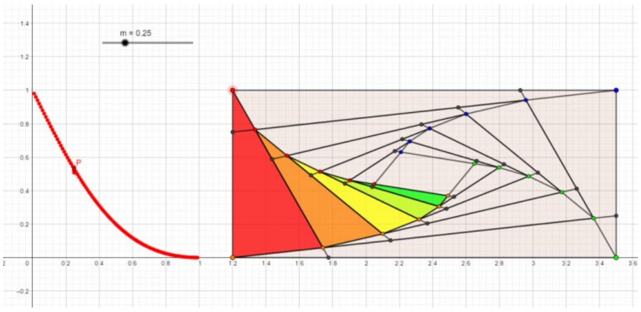
計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，即 $AR_1=\frac{Q_2}{Q_1}$，$AR_2=\frac{Q_3}{Q_2}$，$AR_3=\frac{Q_4}{Q_3}$，$AR_4=\frac{Q_5}{Q_4}$，……，$AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$。

以下為 m 值變化時，各 AR_n 所對應之值

m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.8019801980	0.8019801980	0.8019801980	0.8019801980
0.2	0.6153846514	0.6153846514	0.6153846514	0.6153846514
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276
0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619

由上表可知，當 m 值相同時，各 AR_n 值相等，即相鄰兩三角形面積比值皆相等，所以 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \cdots\cdots$ 為無窮等比數列。當 m 值為 1 時，因為無法切割出小三角形故顯示無意義。

依前述的方法設一點 P(m, AR_n)並觀察其圖形。



由上圖可發現：

矩形 P 的圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)與(1,0)

2.周長部分

計算三角形 S_1 (A1B1,B1B2,A1B2)與 S_2 (A2B2,B2B3,A2B3)及 S_3 、 $S_4 \cdots\cdots$ 周長之關係並求出各值是否為等比數列。

以下為 m 值變化時，$SR_n(\frac{S_{n+1}}{S_n})$所對應之值

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_4
0.1	0.9177453716	0.9366676980	0.9494307214	0.9557985923
0.2	0.8434263792	0.8762378930	0.8776939533	0.8627944667
0.3	0.7519319311	0.7748314158	0.7507416299	0.7175622498
0.4	0.6412050166	0.6461533618	0.6084812482	0.5724118660
0.5	0.5201806499	0.5130227234	0.4771587381	0.4332735179
0.6	0.3988116701	0.3897843670	0.3564474876	0.3070624715
0.7	0.2840601498	0.2791390993	0.2453481677	0.2065427893
0.8	0.1792819916	0.1781767670	0.1483652060	0.1297859231
0.9	0.0849840209	0.0851035752	0.0673363995	0.0631470956

由上頁表可知：

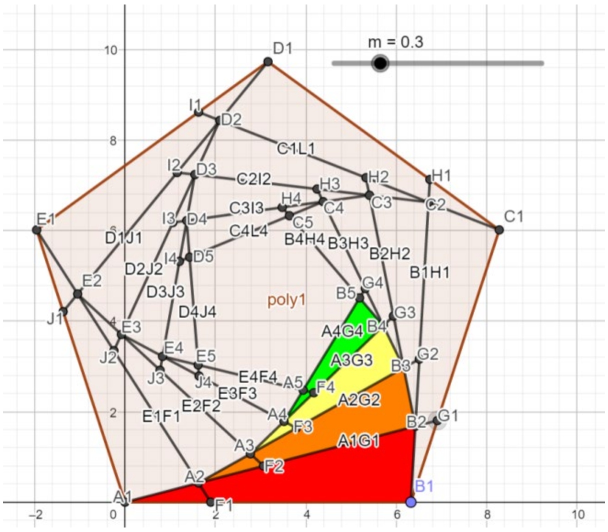
(1)$\because$ n為任意正整數時S_n與S_{n+1}的比例不同，$\therefore$ S_1、S_2、S_3、S_4、S_n……不為無窮等比數列(即相鄰兩三角形周長比均不同)。

(2)當 m 值趨近 0 時，$SR_n(\frac{S_{n+1}}{S_n})$ 越趨近於 1 。

(3)當 m 值愈大，各SR_n值愈小

三、正五邊形

正五邊形製作方法與正三角形大致相同，只需將正多邊形的邊數改成五即可切出各三角形 Q(塗色部分)並計算各三角形面積、周長的關係。



(一)面積部分：

比較各Q_n的關係並將各個相鄰兩三角形面積相除，並比較各$AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$之關係。

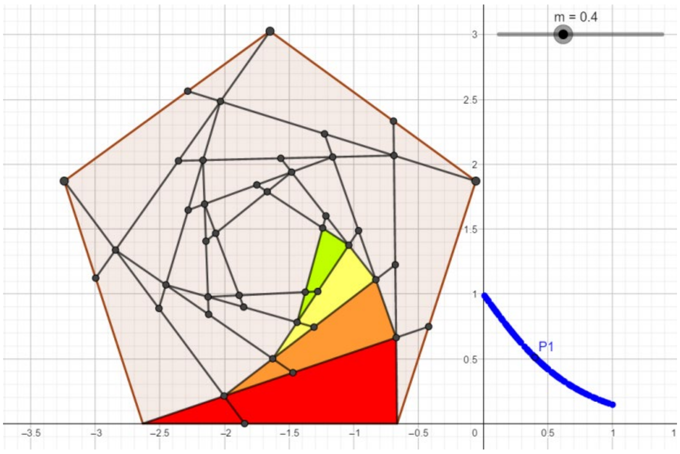
m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.8630927827	0.8630927827	0.8630927827	0.8630927827
0.2	0.7331080555	0.7331080555	0.7331080555	0.7331080555
0.3	0.614665947	0.614665947	0.614665947	0.614665947
0.4	0.5100653367	0.5100653367	0.5100653367	0.5100653367
0.5	0.4198212717	0.4198212717	0.4198212717	0.4198212717
0.6	0.3432846533	0.3432846533	0.3432846533	0.3432846533
0.7	0.2791693429	0.2791693429	0.2791693429	0.2791693429
0.8	0.2259290575	0.2259290575	0.2259290575	0.2259290575
0.9	0.1819935001	0.1819935001	0.1819935001	0.1819935001
1	0.1458980338	0.1458980338	0.1458980338	0.1458980338

由上表可知：

1.當 m 值相同時，各AR_n值皆相等，故$\langle Q_n \rangle$為無窮等比數列

2. m 值越趨近 0， AR_n 值越趨近 1

依前述的方法，設一點 P(m, AR_n)並觀察其圖形。



由上圖可發現：

1.五邊形的 P 圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)與(1,0.1458980338)

(二)周長部分

將 A1B1,A1B2.B1B2 相加得出 S1；並將 A2B2,A2A3,B2B3 相加得出 S2，再將 S2 除以 S1 得出 SR_1，持續算出 S3、S4、S5......與 SR_2 、 SR_3 、 SR_4 ...... SR_n ，即相鄰兩三角形周長比值，並比較各 SR_n 的值，與當 m 值變化時， SR_n 值與 m 值的關係。

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.9290278697	0.9290278697	0.9290278697	0.9290278697
0.2	0.8562172926	0.8562172926	0.8562172926	0.8562172926
0.3	0.78400633437	0.78400633437	0.78400633437	0.78400633437
0.4	0.7141885862	0.7141885862	0.7141885862	0.7141885862
0.5	0.6579361633	0.6579361633	0.6579361633	0.6579361633
0.6	0.5859049866	0.5859049866	0.5859049866	0.5859049866
0.7	0.5283647821	0.5283647821	0.5283647821	0.5283647821
0.8	0.4753199528	0.4753199528	0.4753199528	0.4753199528
0.9	0.4266069621	0.4266069621	0.4266069621	0.4266069621
1	0.3819660113	0.3819660113	0.3819660113	0.3819660113

由上表可知：

1. 當 m 值相同時，各 SR_n 值皆相等，所以 $< S_n >$ 為無窮等比數列

2.當 m 值趨近 0， SR_n 值趨近 1 當 m 值趨近 1， SR_n 值趨近

(三)周長比與面積比之關係

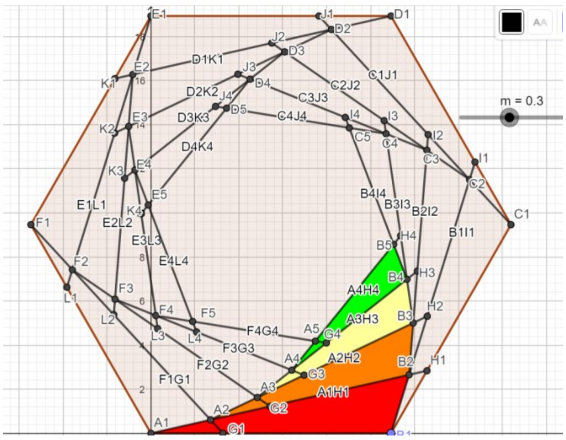
m 值	AR_n	SR_n	$SR_n^{\ 2}$
0.1	0.8630927827	0.9290278697	0.8630927827
0.2	0.7331080555	0.8562172926	0.7331080555
0.3	0.614665947	0.78400633437	0.614665947
0.4	0.5100653367	0.7141885862	0.5100653367
0.5	0.4198212717	0.6579361633	0.4198212717
0.6	0.3432846533	0.5859049866	0.3432846533
0.7	0.2791693429	0.5283647821	0.2791693429
0.8	0.2259290575	0.4753199528	0.2259290575
0.9	0.1819935001	0.4266069621	0.1819935001
1	0.1458980338	0.3819660113	0.1458980338

由上表可發現：

1.m 值相等時，AR_n 值等於 $SR_n^{\ 2}$

四、正六邊形

正六邊形的方法與正三角形大致相同，只需把正三角形改成正六邊形。如下圖所示



算出正六邊形分割出的各三角形之面積比與周長比例之數據及關係

(一)面積部分

計算並觀察 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 ⋯⋯，及相鄰兩三角形面積比值之關係，並比較各 $AR_n = \dfrac{Q_{n+1}}{Q_n}$ 之值。

m 值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.9009009009	0.9009009009	0.9009009009	0.9009009009
0.2	0.8064516129	0.8064516129	0.8064516129	0.8064516129
0.3	0.7194244604	0.7194244604	0.7194244604	0.7194244604
0.4	0.641025641	0.641025641	0.641025641	0.641025641
0.5	0.5714285714	0.5714285714	0.5714285714	0.5714285714
0.6	0.5102040816	0.5102040816	0.5102040816	0.5102040816

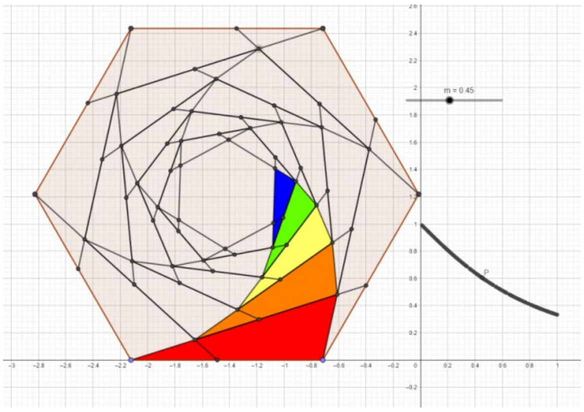
0.7	0.4566210046	0.4566210046	0.4566210046	0.4566210046
0.8	0.4098360656	0.4098360656	0.4098360656	0.4098360656
0.9	0.36900369	0.36900369	0.36900369	0.36900369
1	0.333333333	0.333333333	0.333333333	0.333333333

由上表可知：

1.當 m 趨近 1, AR_n 值越趨近 $\frac{1}{3}$

2.當 m 值相同時,各 AR_n 值皆相同

依前述方法作出 P(m, AR_n)並觀察其圖形



由上圖發現：

1.六邊形的 P 圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)與(1, $\frac{1}{3}$)

(二)周長部分

與之前作法相同，將將各層三角形周長算出並得出 S1,S2,S3,S4⋯， SR_n

當 m 值變化時 SR_n 值變化的情形：

m 值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.9491579958	0.9491579958	0.9491579958	0.9491579958
0.2	0.8980265101	0.8980265101	0.8980265101	0.8980265101
0.3	0.8481889297	0.8481889297	0.8481889297	0.8481889297
0.4	0.800640769	0.800640769	0.800640769	0.800640769
0.5	0.755928946	0.755928946	0.755928946	0.755928946
0.6	0.7142857143	0.7142857143	0.7142857143	0.7142857143
0.7	0.6757373784	0.6757373784	0.6757373784	0.6757373784
0.8	0.6401843997	0.6401843997	0.6401843997	0.6401843997
0.9	0.6074567392	0.6074567392	0.6074567392	0.6074567392
1	0.5773502692	0.5773502692	0.5773502692	0.5773502692

由上表可知

1.當 m 值相同時，各 SR_n 值相等。

2.當 m 值趨近 0，SR_n 值趨近 1；當 m 值趨近 1，SR_n 值趨近 0.5773502692$(\frac{\sqrt{3}}{3})$

(三)周長比與面積比之關係

比較 SR_n 與 AR_n 的關係:

m 值	SR_n	AR_n	$SR_n{}^2$
0.1	0.9491579958	0.9009009009	0.9009009009
0.2	0.8980265101	0.8064516129	0.8064516129
0.3	0.8481889297	0.7194244604	0.7194244604
0.4	0.800640769	0.641025641	0.641025641
0.5	0.755928946	0.5714285714	0.5714285714
0.6	0.7142857143	0.5102040816	0.5102040816
0.7	0.6757373784	0.4566210046	0.4566210046
0.8	0.6401843997	0.4098360656	0.4098360656
0.9	0.6074567392	0.36900369	0.36900369
1	0.5773502692	0.333333333	0.333333333

由圖表發現各 AR_n 值與各 SR_n^2 值相等。

解釋其原因：

∵各 Q 為相似形，∴ SR_n 值為 $\frac{A2B2}{A1B1}$ ，故依相似形的面積關係可知 $AR_n = SR_n^2$

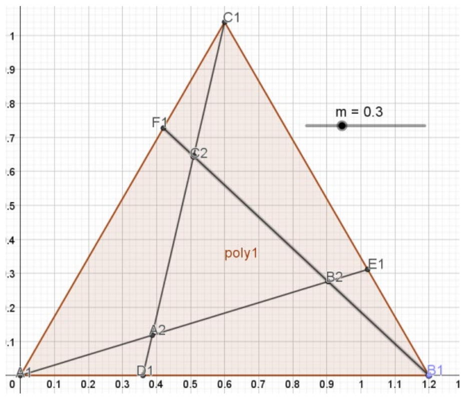
五、用公式證明多邊形的 AR_n 與 SR_n

依 47 屆科展國中組數學科：內外面積比公式、

52 屆科展國中組數學科：層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積、

54 屆第三區科展：高中組數學科－幾何圖形的分割與其面積關係和我們計算與統整得知以下過程與結果：

(一)　正三角形



1.證明 $\Delta A1C1D1$ 與 $\Delta A1B1E1$ 的全等，並帶入所有正多邊形

(1)∵ Δ A1B1C1 為正三角形(邊長相等)∴A1C1=A1B1

(2)∵ Δ A1B1C1 為正三角形(內角 60°)∴ $\angle C1A1D1 = \angle A1B1E1 = 60°$

(3)A1D1：A1B1=m：1、B1E1：B1C1=m：1

又 A1C1=A1B1∴A1D1=B1E1

∴$\Delta C1A1D1 \cong \Delta A1B1E1$ (SAS)

同理ΔC1A1D1≅ΔA1B1E1≅ΔB1C1F1

2.證明$\Delta A1A2D1 \cong B1B2E1$

∵ΔC1A1D1≅A1B1E1≅B1C1F1

∠A1D1A2=∠B1E1B2

∠A2A1D1=∠B2B1E1

A1D1=B1E1=m·A1B1

∴ $\Delta A1A2D1 \cong \Delta B1B2E1(ASA)$

同理$\Delta A1A2D1 \cong \Delta B1B2E1 \cong \Delta C1C2F1$

3.證明ΔA2B2C2 亦為正三角形

∵ $\Delta A1A2D1 \cong \Delta B1B2E1$

故∠A2A1D1=∠B2B1E1

∠A2D1A1=∠B2E1B1

∴在ΔB1B2E1 中

∠B1B2E1=180°-∠B2B1E1-∠B2E1B1

=180°-∠A2A1D1-∠B2E1B1

=∠A1B1E1=60°

故∠A2B2C2=∠B1B2E1=60°

同理∠A2B2C2=∠B2C2A2=∠C2A2B2=60°

∴當ΔA1B1C1 為正三角形，各邊等比例分割所形成ΔA2B2C2 亦為正三角形。

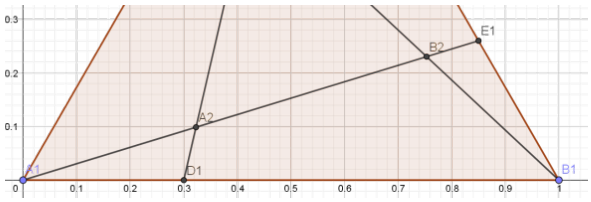
我們亦可用同樣證明方法可應用在正方形、正五邊形、正六邊形和任意正多邊形

4.證明$\Delta A1A2D1$與$\Delta A1B1E1$的相似關係(座標以正三邊形為例，推至正 n 邊形)

∵A1=A1(共用角)

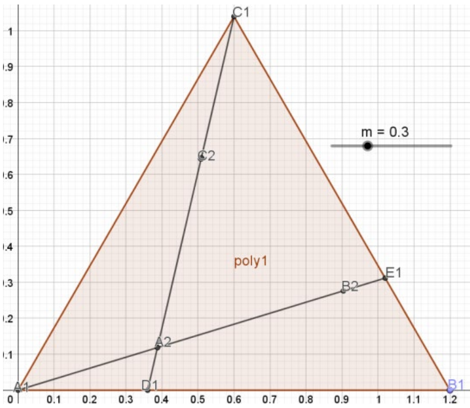
$\angle A1D1A2 = \angle B1E1B2$ (∵ ΔC1A1D1≅ $\Delta A1B1E1$)

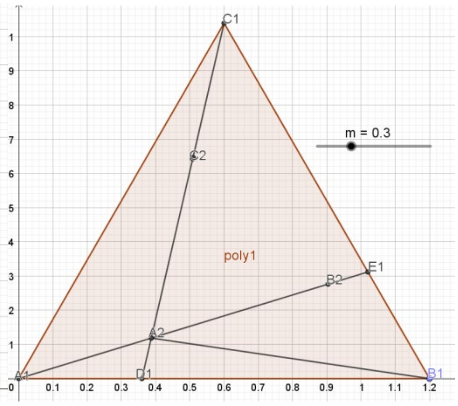
∴ΔA1A2D1～ΔA1B1E1(AA)



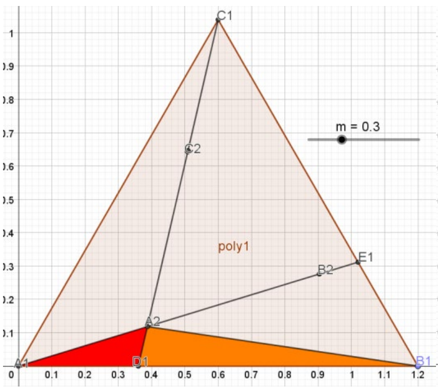
5.求出ΔA1A2D1 面積

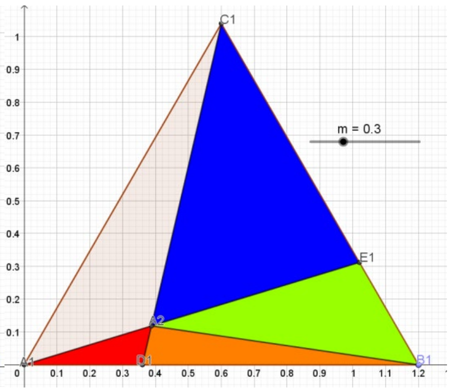
如圖:ΔA1B1C1 中，$\frac{A1D1}{A1B1}=m$ 、$\frac{B1E1}{B1C1}=m$，C1D1 交 A1E1 於 A2，連接 A2B1





設 $\Delta A1B1C1$ 面積為 1，A1D1：A1B1=m：1





設 ΔA1A2D1(紅色部分)面積為 a，ΔA2B1D1(橘色部分)與 ΔA1A2D1 有共同高，因底邊邊長比值為 m：(1-m)，$\Delta A2B1D1$ 面積為 $\frac{1-m}{m}$a；

同理設 ΔA2B1E1(綠色部分)為 b，$\therefore$ ΔA2C1E1(藍色部分)為 $\frac{1-m}{m}$b

因邊 B1E1 與 B1C1 邊長比為 m：1

$\therefore$ ΔA1B1E1=m$\cdot$ ΔA1B1C1

即 a+$\frac{1-m}{m}$a+b=m$\Rightarrow$ $\frac{1}{m}$a+b=m

同理:ΔC1D1B1=$\frac{1-m}{1}\cdot$ ΔA1B1C1=1-m(設 ΔA1B1C1=1)

b+$\frac{1-m}{m}$b+$\frac{1-m}{m}$a=1-m 即 $\frac{1}{m}$b+$\frac{1-m}{m}$a=1-m

$$
即\begin{cases}\frac{1}{m}\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{m}\ldots\ldots\ldots ① \\ \frac{1}{m}\mathrm{b}+\frac{1-m}{m}\mathrm{a}=1-\mathrm{m}\ldots ② \end{cases}
$$

由①

$\frac{a}{m}$ =m-b

a= m^2 -bm........③

將③代入②

$\frac{1}{m}$ b+m-b- m^2 +mb=1-m

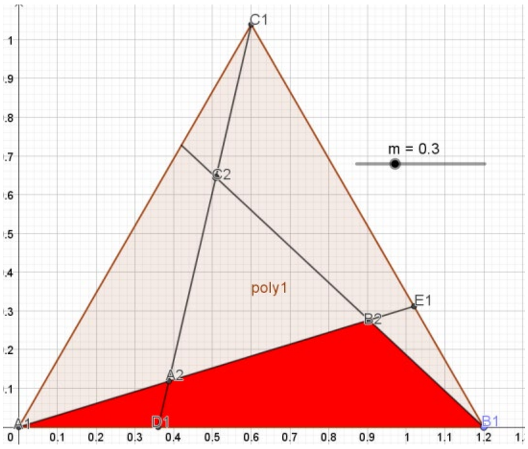
$\frac{1-m+m^2}{m}b$=1-2m+ $m^2=(1-m)^2$

$b=\frac{m(1-m)^2}{1-m+m^2}$

代入③

$a=m^2-\frac{m^2(1-m)^2}{1-m+m^2}=\frac{m^2-m^3+m^4-m^2+2m^3-m^4}{1-m+m^2}=\frac{m^3}{1-m+m^2}$

6.求出ΔA1B1B2 的面積



可發現ΔA1B1B2=ΔA1B1E1-ΔB1B2E1= $\Delta A1B1E1-\Delta A1A2D1$ =m-a

m-a=m- $\frac{m^3}{1-m+m^2}=\frac{m-m^2+m^3-m^3}{1-m+m^2}=\frac{m(1-m)}{1-m+m^2}$

$\Delta A2B2C2$ =1-3· $\frac{m(1-m)}{1-m+m^2}=\frac{1-m+m^2-3m+3m^2}{1-m+m^2}=\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}$

7.三角形公式結論

由(1)三角形的 3 點結論可得

∵ $\Delta A1B1C1$ 為正三角形

∴各邊等比例分割可得 $\Delta A2B2C2$ 亦正三角形

即ΔA1B1C1~ΔA2B2C2~ΔA3B3C3~⋯⋯

且ΔA2B2C2= $\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}\cdot\Delta A1B1C1$

用同樣方法將正ΔA2B2C2 各邊等比分割，

可得結論ΔA1B1B2~ΔA2B2B3~ΔA3B3B4~⋯⋯

即 $AR_n=\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}$

而∵ΔA2B2C2~ΔA1B1C1

∴ΔA2B2C2：ΔA1B1C1= $(A2B2)^2$□$(A1B1)^2$

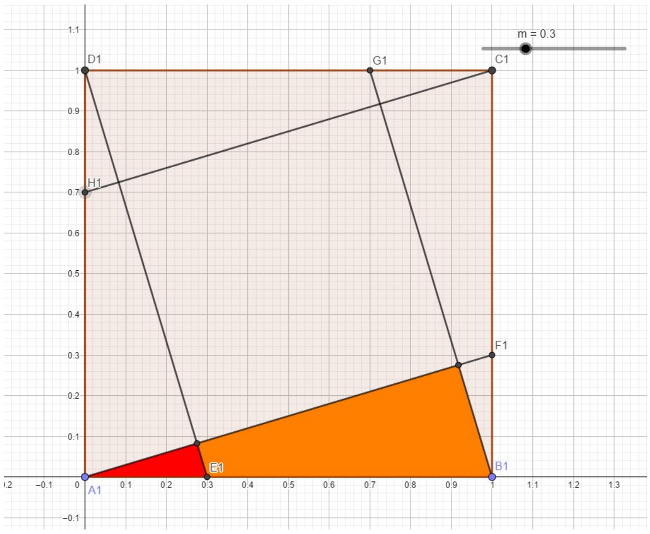
即$(A2B2)^2:(A1B1)^2=\dfrac{(1-2m)^2}{1\text{-}m+m^2}$□1

A2B2：A1B1=$\dfrac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}$:1

故 $SR_n=\dfrac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}$

(二)平行四邊形、正方形

運用相同的方法分割如下：



先證明 ΔA1E1A2 ~ ΔA1B1B2

∵ 由(一)正三角形的第 3 點可推論得知

∠D2A2B2=∠D1A1E1=90°

∠A2B2C2=∠A1B1F1=90°

∴A2E1//B2B1

故 ΔA1E1A2~ΔA1B1B2

又∵ A1E1:A1B1=m：1

故 ΔA1E1A2： ΔA1B1B2=m^2 ：1

設 A1B1=1　　ΔA1E1A2=ΔB1F1B1=a

∴ ΔA1B1B2=$\dfrac{a}{m^2}$

$\because \Delta A1B1F1=m\cdot\Delta A1B1C1=\dfrac{m}{2}$正方形$A1B1C1D1$

$\therefore a+\dfrac{a}{m^2}=\dfrac{m}{2}$ ， $\dfrac{m^2+1}{m^2}a=\dfrac{m}{2}$ $,a=\dfrac{m^3}{2(m^2+1)}$

ΔA1B1B2=$\dfrac{m}{2}$ -a=$\dfrac{m}{2}$ - $\dfrac{m^3}{2(m^2+1)}=\dfrac{m^3+m-m^3}{2(m^2+1)}=\dfrac{m}{2(m^2+1)}$

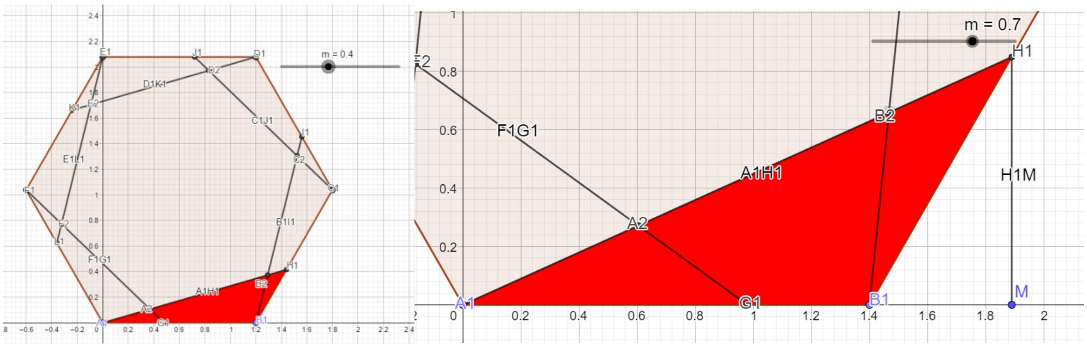
正方形 A1B1C1D1 面積=1-4$\dfrac{m}{2(m^2+1)}=\dfrac{2m^2+2-4m}{2(m^2+1)}=\dfrac{(1-m)^2}{1+m^2}$

同(一)三角形的第 7 點說明

$\therefore\ AR_n=\dfrac{(1-m)^2}{1+m^2}$

$SR_n=\dfrac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}$

(一)正 n 邊形



正 n 邊形的推論($n\geq 5$)皆相同

我們以正六邊形為例作證明：令 A1B1=1、B1H1=m

作線段 H1M⊥直線 A1B1 並交於 M

θ角為正多邊形外角 H1M=m·sinθ　　B1M=m·cosθ　　A1M=1+m·cosθ

依畢氏定理可知:

A1H1 =$\sqrt{(1+m\cdot\cos\theta)^2+m^2\sin^2\theta}$

=$\sqrt{1+2m\cdot\cos\theta+m^2\cos^2\theta+m^2\sin^2\theta}$=$\sqrt{1+2m\cdot\cos\theta+m^2(\sin^2\theta+\cos^2)}$

A1H1=$\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}$

由(一)三角形的第 4 點同理可證

$\Delta A1A2G1\sim\Delta A1B1H1(AA)$

∴A1A2:1=m:$\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}$

$\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}$·A1A2=m

A1A2=$\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}}$

且 A2G1:m=m:$\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}$

A2G1·$\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}=m^2$　　　A2G1=$\dfrac{m^2}{\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}}$,

依(一)正三角形第 2 點同理可證

∵ $\Delta A1A2G1\cong B1B2H1$

∴A2G1=B2H1

A2B2=A1H1-A1A2-B2H1

$$=\sqrt{1+m^2+2m\cos\theta}-\frac{m}{\sqrt{1+m^2 2m\cos\theta}}-\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2 2m\cos\theta}}$$

$$\text{A2B2}=\frac{1+m^2+2m\cdot\cos\theta-m-m^2}{\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}}=\frac{1-m+2m\cdot\cos\theta}{\sqrt{1+m+2m\cdot\cos\theta}}$$

$$SR_n=\frac{A2B2}{A1B1}=\frac{1-m+2m\cdot\cos\theta}{\sqrt{1+m+2m\cdot\cos\theta}}$$

$$AR_n=SR_n^2=\frac{(1-m+2m\cdot\cos\theta)^2}{1+m+2m\cdot\cos\theta}$$

整理三角形與正方形、正多邊形 AR_n 與 SR_n 公式(用 m 表示)

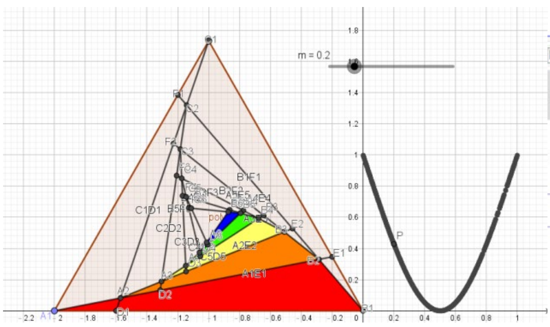
	三角形	正方形	正多邊形(θ為一外角)
AR_n	$\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}$	$\frac{(1-m)^2}{1+m^2}$	$\frac{(1-m+2m\cdot\cos\theta)^2}{1+m+2m\cdot\cos\theta}$
SR_n	$\frac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}$	$\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{1-m+2m\cdot\cos\theta}{\sqrt{1+m+2m\cdot\cos\theta}}$

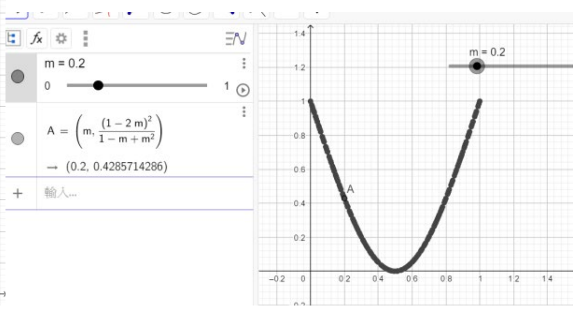
伍、討論

公式證明是否與前述面積比與周長比相同?

比較三角形公式: $\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}$

m	Geogebra AR_n 值	公式 AR_n 數值	Geogebra SR_n 值	公式 SR_n 數值
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.5	無意義	0	無意義	0
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869

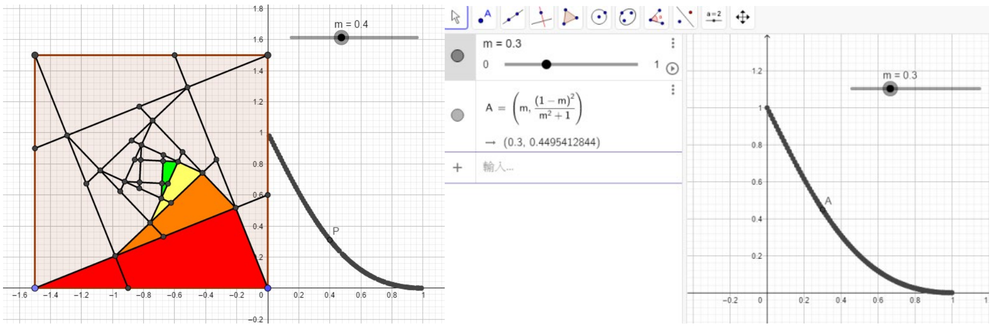




可發現 Geogebra 跑出的數值與公式數值相等，證明兩數值的正確性。

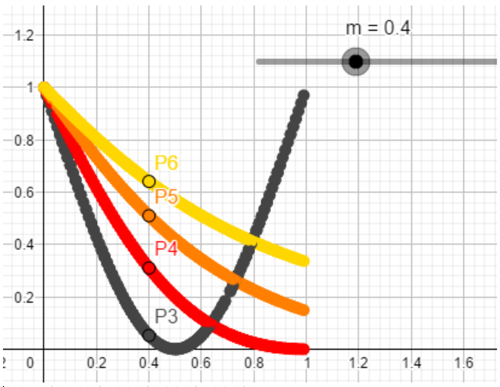
比較正方形 Q_{n+1}與Q_n面積比值 公式：$\frac{(1-m)^2}{1+m}$

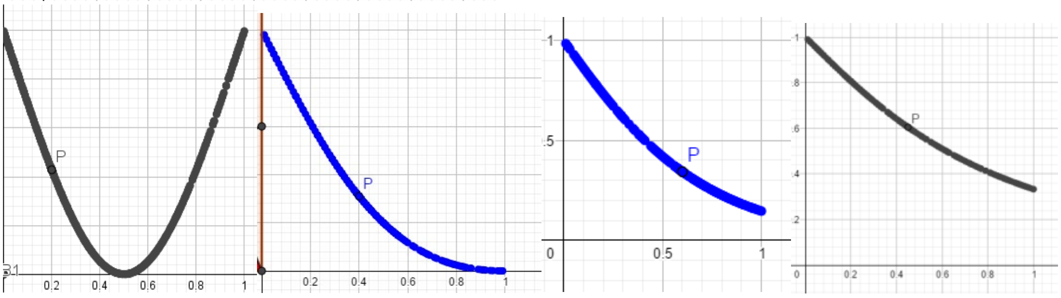
	Geogebra AR_n 值	公式 AR_n 數值	Geogebra SR_n 值	公式 SR_n 數值
0.1	0.801980198	0.801980198	0.8955334712	0.8955334712
0.2	0.6153846154	0.6153846154	0.7844645406	0.7844645406
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.6704783997	0.6704783997
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.5570860145	0.5570860145
0.5	0.2	0.2	0.4472135955	0.4472135955
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.342991703	0.342991703
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.2457695762	0.2457695762
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.1561737619	0.1561737619
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0743294146	0.0743294146



再次確認公式 geogebra 跑出的數值相同，確認兩數值的正確性。

在 Geogebra 上跑出公式圖形$\left[\frac{(1-m+2m\cdot\cos\theta)^2}{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}\right]$與前述各 P 圖形做比較

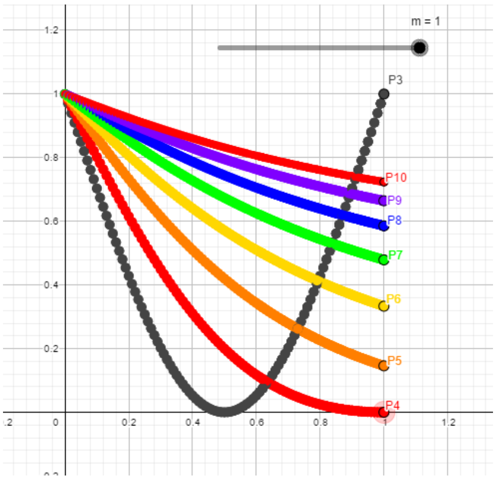




三角形　　　　正方形　　　　正五邊形　　　　正六邊形

發現各公式圖形與 Geogebra 相等

整理各正 n 邊形圖形

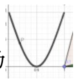


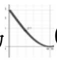
發現正四邊形以上皆為遞減圖形，且正四邊形以上在分割比例 m 相同，邊數愈多，相鄰兩三形面積面積比值會愈大，m 愈趨近 1 時，面積比值越往 1 靠近。

陸、結論

一、面積部分

(一)任意正多邊形、任意三角形、矩形及平行四邊形各邊等比例分割後，所形成相鄰兩三角形面積比值相同。任意多邊形(四邊以上)各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形面積比值不相同。

(二)三角形隨著 m(切割比例)愈大，相等兩三角形面積比值為由大到小，在 0.5 時趨近於 0，再由小到大。圖形為(類似拋物線圖形)。

(三)四邊以上多邊形隨著 m(分割比例)愈大，相鄰兩三角形面積比值愈小，圖形為(遞減圖形)

(四)正六邊形分割比例 m 越趨近於 1，相鄰兩三角形面積比值會越趨近於$\frac{1}{3}$

(五)正四邊形以上在分割比例 m 相同，邊數愈多，相鄰兩三形面積面積比值會愈大，若 m 為 1 時，面積比值越往 1 靠近。

二、周長部分

(一)正多邊形、任意三角形之各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形周長比值相同。

(二)任意多邊形(四邊以上)各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形周長比值不相同。

(三)正六邊形分割比例 m 越趨近於 1，相鄰兩三角形面積比值會越趨近於$\frac{\sqrt{3}}{3}$

柒、參考資料及其他

一、(2012) 張博恩等 層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積 030407
中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中數學組
二、Live 數學學習網三角形的重心均分三角形面積
三、第五十四屆中彰投地區高中數學組：幾何圖形的分割與其面積比
四、(2007) 林雅淇等 正多邊形母子面積比 030415
中華民國第 47 屆中小學科學展覽會國中數學組
五、國中數學第四冊 幾何證明
六、國中數學第五冊 相似形
七、高中數學 三角函數

【評語】030416

此研究主題為幾何作圖探討，作品研究多邊形各邊依等比例分割，分割點與對邊頂點相連圍成較小的多邊形，重複此一步驟，運用電腦程式 Geogebra，計算出多邊形依等比例分割後，其各層多邊形面積比和周長比，進而推導出其公式。針對正多邊形給出了完整的結果。對於一般的三角形、四邊形也作了一些分析。透過軟體得出結果，觀察規律並作出推論，再進一步的論述推論為真是很不錯的想法。建議作者應注意到數據所反映的更深一層的特性。

作品海報

摘　要

此研究討論將多邊形各邊依等比例切割，與特定頂點相連，圍成一個較小的三角形，運用電腦程式Geogebra運算多邊形依各比例分割之面積比例，進而推導出其公式，相鄰兩三角形面積、周長比例的關係。

壹、研究動機

在生活中圖形的重要性是無庸置疑的，其中的幾何圖形更是不可忽略的。在看到三角形個邊常做比例分割所形成的小三角形面積與原三角形的面積比之關係時，引起我們的好奇，想更深入的研究，之後在無意間看到第五十四屆中彰投地區高中數學組：幾何圖形的分割與其面積比後，我們決定針對多邊形的部分，以Geogebra程式來計算及驗證，繼續研究及探討。

貳、研究目的

一、能夠了解正多邊形與任意多邊形各邊等比例切割後，其相鄰兩三角形面積比、周長比之關係。

二、能運用電腦觀察數據的變化。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra軟體、紙、筆

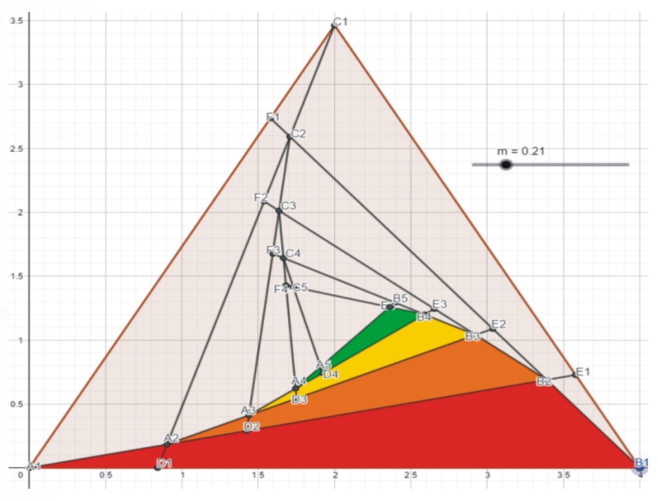
肆、研究過程

一、探討三角形各邊等比例分割情況，以GeoGebra軟體繪出圖形（作法詳見作品說明書）

(一)、正三角形

1.面積部分：

定義 Q_1= △A1B1B2(下圖紅色部分)面積，Q_2=△A2B2B3面積(橘色部分)，$Q_n=\Delta A_nB_nB_{n+1}$面積。



計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，

令 $AR_1=\dfrac{Q_2}{Q_1}$，$AR_2=\dfrac{Q_3}{Q_2}$，$AR_3=\dfrac{Q_4}{Q_3}$，$AR_n=\dfrac{Q_{n+1}}{Q_n}$ 。

m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033

由上表可發現：

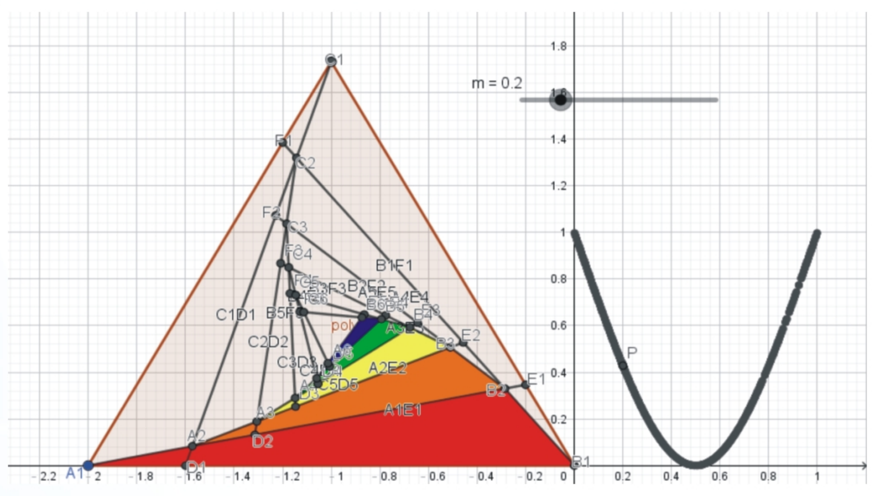
(1)當m=0.5時，無法畫出三角形 Q_2，AR_1 值為 $\dfrac{0}{\Delta A1B1C1\div 3}=0$ ，$AR_{n\geq 2}$值為 $\dfrac{0}{0}$ (不成立)，故無意義。

(2)m值相等時(除0.5外)，任何AR_n的值也會相等(即任意相鄰兩三角形面積比值皆相等)

∴Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_n 的面積比為無窮等比數列。

(3)可發現m趨近0或1時，AR_n值越趨近於1，m值趨近0.5時，AR_n值越趨近於0，且m與1-m的對應AR_n值相等。

令P(m, AR_n)，觀察當m變化時，AR_n值的變化情形。

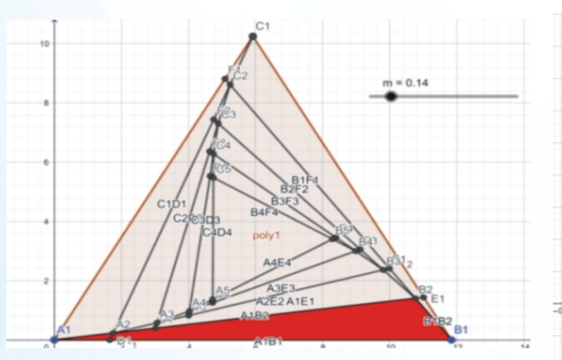


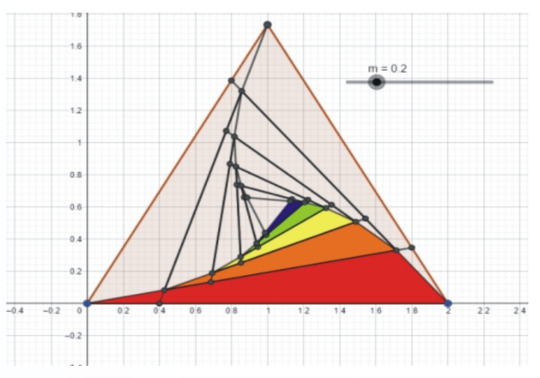
我們觀察出：當m變動時，AR_n值的變化情形如P(m AR_n)的圖形為對稱且為類似拋物線圖形。

2.周長部分

將△A1B1B2的三個邊A1B2、B1B2、和A1B1，相加算出Q1的周長命名為S1，即S1=△A1B1B2周長。用相同方法做第二層，算出S2為△A2B2B3周長，並繼續做第3、4、5……層。

將S2除以S1得出相鄰兩三角形周長比值 SR_1 $(\dfrac{S2}{S1})$，並依序再算出 SR_2、SR_3、SR_n





整理m值

m值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869
0.2	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

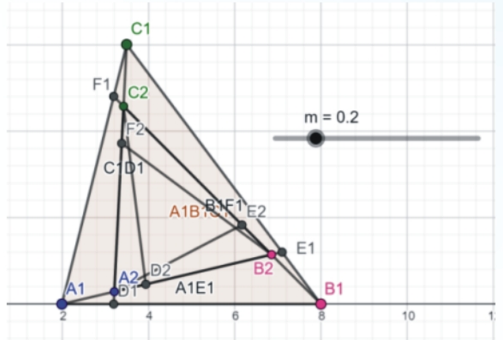
(1)m值相同時，各SR_n值相等，即相鄰兩三角形周長比值相等。

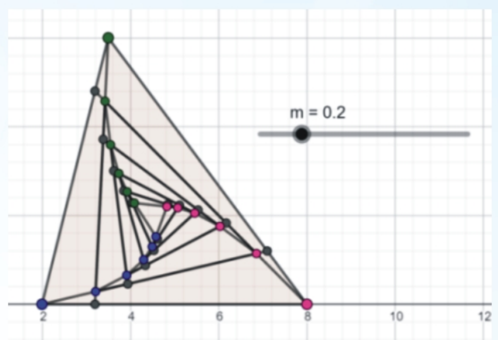
(2))m值為0.5時，無法畫出Q2(周長為0)，因此其 SR_2, SR_3……分母為0，故無意義。

(二)、任意三角形

1.面積部分

計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，即 $AR_1=\dfrac{Q_2}{Q_1}$，$AR_2=\dfrac{Q_3}{Q_2}$，$AR_3=\dfrac{Q_4}{Q_3}$，$AR_n=\dfrac{Q_{n+1}}{Q_n}$





m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033	0.7032967033

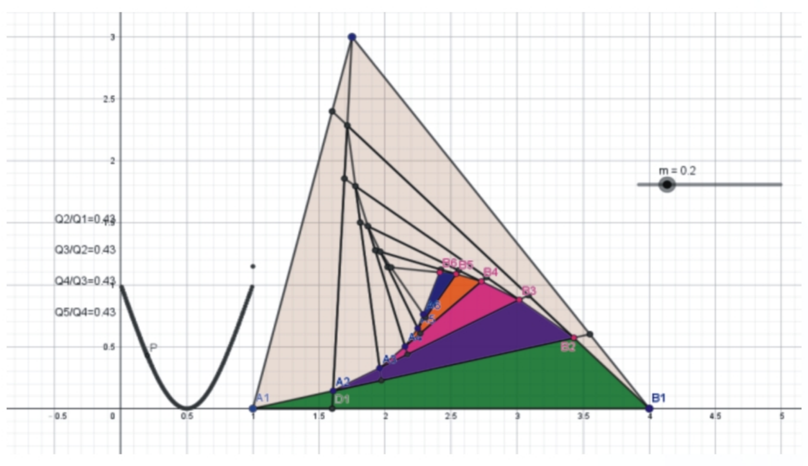
由上表可觀察到：

(1)當m相同時，各AR_n值皆相等，即相鄰兩三角形之面積為無窮等比數列。

(2)∵當m值為0.5時，因為無法切割出小三角形∵ $AR_1=\dfrac{0}{Q_1}=0$ ，但n≥2時，故AR_n為無意義。

(3)當m值趨近0和1時，AR_n(相鄰兩三角形面積比值)趨近1，m值趨近0.5時 AR_n 值趨近0。

令P(m, AR_n)，觀察當m變化時，AR_n值的變化情形。



由上圖可得P(m, AR_n)的圖形對稱且為類似拋物線圖形

我們觀察出：當m變動時，其P(m, AR_n)的圖形為對稱且為類似拋物線圖形。

2.周長部分

與正三角形方法大致相同

比較各SR_n值之關係

m值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869
0.2	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.5	0	無意義	無意義	無意義
0.6	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.838627869	0.838627869	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

(1)當m值相同時，各 SR_n 值(相鄰兩三角形周長比值)相等。

(2)m值為0.5時，無法畫出Q2(周長為0)，因此其 SR_2, SR_3, SR_4, SR_n 分母為0，故顯示為無意義。

(三)比較正三角形與任意三角形的AR_n與SR_n的關係：

	AR_n		SR_n	
m值	正三角形	任意三角形	正三角形	任意三角形
0.1	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869
0.2	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707
0.3	0.2025312456	0.2025312456	0.4500351604	0.4500351604
0.4	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.6	0.0526315789	0.0526315789	0.2294157339	0.2294157339
0.7	0.2025316456	0.2025316456	0.4500351604	0.4500351604
0.8	0.4285714286	0.4285714286	0.6546536707	0.6546536707
0.9	0.7032967033	0.7032967033	0.838627869	0.838627869

由上表可發現：

所有三角形的面積比值與周長比值相等，可一併討論。

比較 AR_n與 SR_n 值的關係：

m值	SR_n	AR_n	SR_n^2
0.1	0.838627869	0.7032967033	0.7032967033
0.2	0.6546536707	0.4285714286	0.4285714286
0.3	0.4500351604	0.2025312456	0.2025312456
0.4	0.2294157339	0.0526315789	0.0526315789
0.6	0.2294157339	0.0526315789	0.0526315789
0.7	0.4500351604	0.2025316456	0.2025316456
0.8	0.6546536707	0.4285714286	0.4285714286
0.9	0.838627869	0.7032967033	0.7032967033

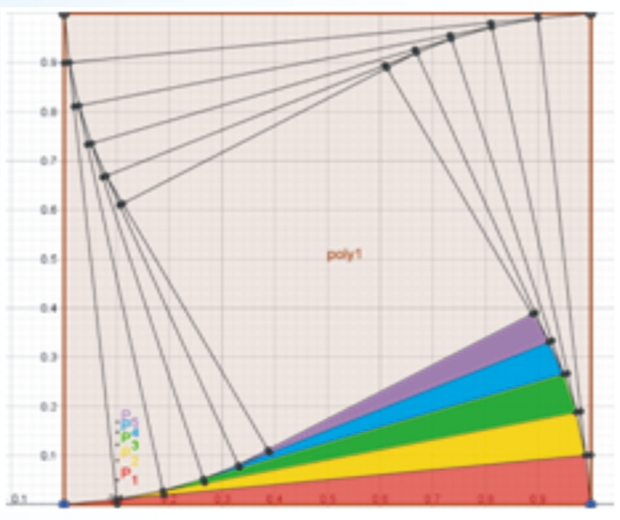
由上表可發現：AR_n 和 SR_n^2 的值相同。

解釋其原因：因各三角形為相似形，依相似形的面積比可知 $AR_n = SR_n^2$

二、四邊形

(一)正四邊形

正四邊形的做法大致與正三角形相同。



算出正四邊形切割出的各三角形之面積比與周長比例關係，並比較各 AR_n 、SR_n 關係。

1. 面積部分

以電腦算出Q值面積變化及相鄰兩三角形面積比值 $AR_n(\frac{Q_{n+1}}{Q_n})$

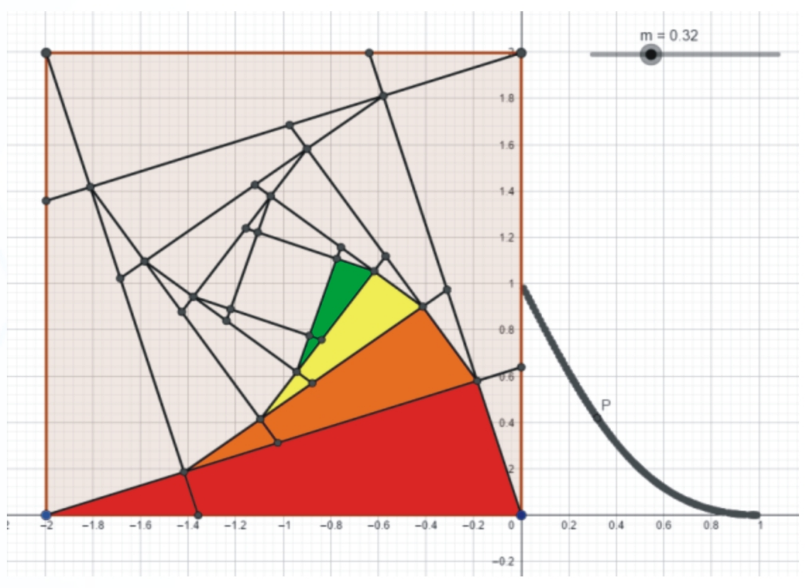
m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.801980198	0.801980198	0.801980198	0.801980198
0.2	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276
0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619
1	0	無意義	無意義	無意義

由上表可知：

(1)當m值越接近1時，AR_n 值越趨近0，m值越接近0時，AR_n 值越趨近1。

(2)m值相同時，各AR_n 值相等，即相鄰兩三角形面積比值會相等。

令P(m,AR_n)，觀察當m變化時，AR_n 值的變化情形。



由上圖可發現：

(1)當m相同，各AR_n 值皆相同(即相鄰兩三角形面積比值皆相同)

(2)m值越大，相鄰兩三角形面積比值會越小，為遞減圖形。

(3)此圖形兩端點分別為(0,1)、(1,0)

2. 周長部分

與三角形求作相鄰兩三角形周長比值作法相同，觀察各周長比值 $SR_n(\frac{S_{n+1}}{S_n})$ 之變化情形

m值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.8955334712	0.8955334712	0.8955334712	0.8955334712
0.2	0.7844645406	0.7844645406	0.7844645406	0.7844645406
0.3	0.6704783997	0.6704783997	0.6704783997	0.6704783997
0.4	0.5570860145	0.5570860145	0.5570860145	0.5570860145
0.5	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955
0.6	0.342991703	0.342991703	0.342991703	0.342991703
0.7	0.2457695762	0.2457695762	0.2457695762	0.2457695762
0.8	0.1561737619	0.1561737619	0.1561737619	0.1561737619
0.9	0.0743294146	0.0743294146	0.0743294146	0.0743294146

由上表可知：

(1)當m值越接近1時，SR_n 值越趨近0，m值越接近0時，SR_n 值越趨近1。

(2)當m值相同時，各SR_n 值皆相同，即相鄰兩三角形周長比值皆相等。

3. 比較 AR_n、SR_n 和 SR_n^2 的關係

m值	AR_n	SR_n	SR_n^2
0.1	0.801980198	0.8955334712	0.801980198
0.2	0.6153846154	0.7844645406	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.6704783997	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.5570860145	0.3103448276
0.5	0.2	0.4472135955	0.2
0.6	0.1176470588	0.342991703	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.2457695762	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.1561737619	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0743294146	0.0055248619

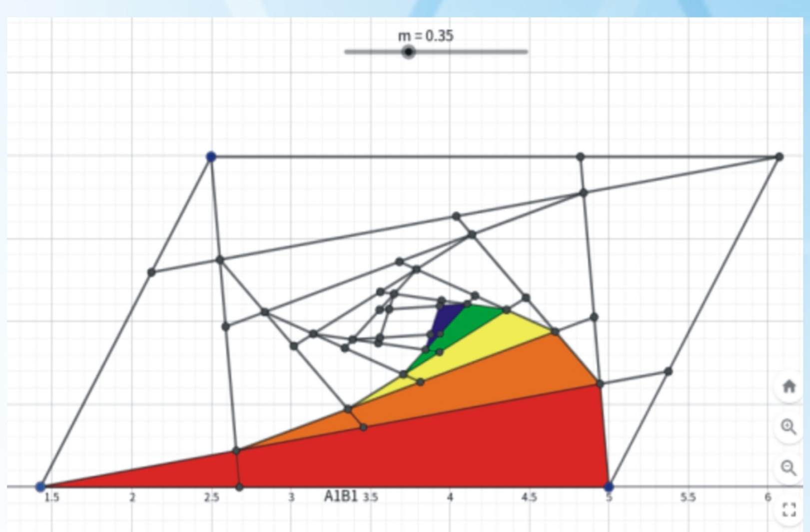
由上表可發現: AR_n 和 SR_n^2 的值相同。

解釋其原因：

因各三角形為相似形，依相似形的面積比可知 $AR_n = SR_n^2$

(二)平行四邊形

平行四邊形的做法大致與任意三角形做法相同



算出平行四邊形切割出的各三角形之面積比與周長比例關係

1. 面積部分

計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，即 $AR_1=\frac{Q_2}{Q_1}$，$AR_2=\frac{Q_3}{Q_2}$，$AR_3=\frac{Q_4}{Q_3}$，$AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ ……

m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.801980198	0.801980198	0.801980198	0.801980198
0.2	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154	0.6153846154
0.3	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844	0.4495412844
0.4	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276	0.3103448276
0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588	0.1176470588
0.7	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846	0.0604026846
0.8	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439	0.0243902439
0.9	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619	0.0055248619

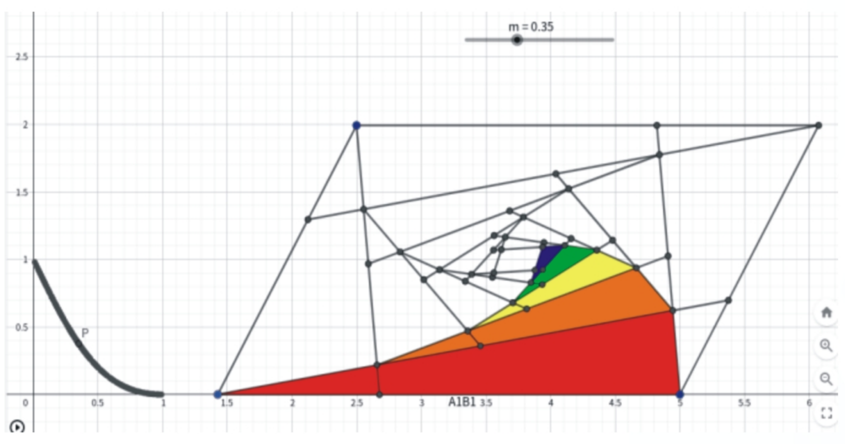
由上表可知：

(1)當m值相同時，各AR_n值相同。

(2)當m值越接近1時，AR_n 值越趨近0，當m值越接近0時，AR_n 值越趨近1

(3)平行四邊形與正四邊形的 AR_n 值相同。

依前述三角形的作法作出P(m,AR_n)圖形

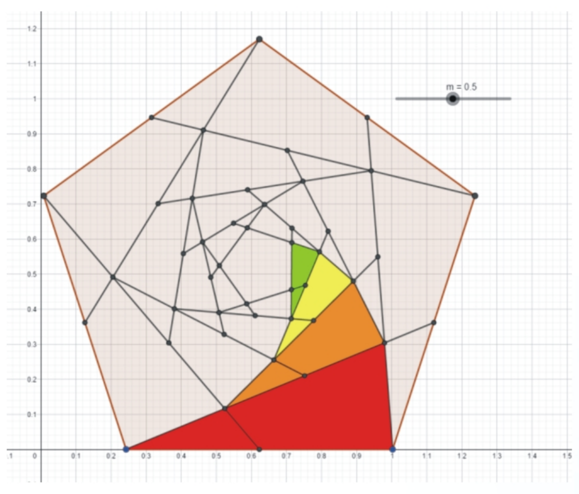


我們觀察出：

由上圖可發現平行四邊形的P圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)、(1,0)。

三、正五邊形

正五邊形製作方法與正三角形大致相同，只需將正多邊形的邊數改成五即可



(一)面積部分：

比較各Q_n 的關係並將各個相鄰兩三角形面積相除，並比各 $AR_n(\frac{Q_{n+1}}{Q_n})$ 之關係。

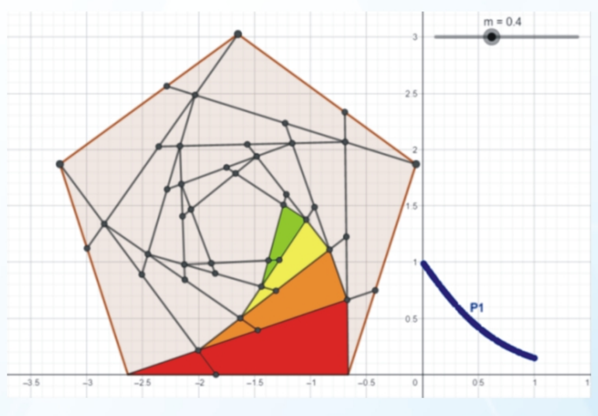
m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.8630927827	0.8630927827	0.8630927827	0.8630927827
0.2	0.7331080555	0.7331080555	0.7331080555	0.7331080555
0.3	0.614665947	0.614665947	0.614665947	0.614665947
0.4	0.5100653367	0.5100653367	0.5100653367	0.5100653367
0.5	0.4198212717	0.4198212717	0.4198212717	0.4198212717
0.6	0.3432846533	0.3432846533	0.3432846533	0.3432846533
0.7	0.2791693429	0.2791693429	0.2791693429	0.2791693429
0.8	0.2259290575	0.2259290575	0.2259290575	0.2259290575
0.9	0.1819935001	0.1819935001	0.1819935001	0.1819935001
1	0.1458980338	0.1458980338	0.1458980338	0.1458980338

由上表可知：

1. 當m值相同時，各AR_n值皆相等，故<Q_n>為無窮等比數列

2. m值越趨近0，AR_n 值越趨近1

依前述的方法，設一點P(m,AR_n)並觀察其圖形。



由上圖可發現：

五邊形的P圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)與(1,0.1458980338)

(二)周長部分

將A1B1,A1B2.B1B2相加得出S1；並將A2B2,A2A3,B2B3相加得出S2，再將S2除以S1得出 SR_1，持續算出S3、S4、S5……與 SR_2、SR_3、…… SR_n，即相鄰兩三角形周長比值，並比較各SR_n的值，與當m值變化時，SR_n 值與m值的關係。

m值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.9290278697	0.9290278697	0.9290278697	0.9290278697
0.2	0.8562172926	0.8562172926	0.8562172926	0.8562172926
0.3	0.78400633437	0.78400633437	0.78400633437	0.78400633437
0.4	0.7141885862	0.7141885862	0.7141885862	0.7141885862
0.5	0.6579361633	0.6579361633	0.6579361633	0.6579361633
0.6	0.5859049866	0.5859049866	0.5859049866	0.5859049866
0.7	0.5283647821	0.5283647821	0.5283647821	0.5283647821
0.8	0.4753199528	0.4753199528	0.4753199528	0.4753199528
0.9	0.4266069621	0.4266069621	0.4266069621	0.4266069621
1	0.3819660113	0.3819660113	0.3819660113	0.3819660113

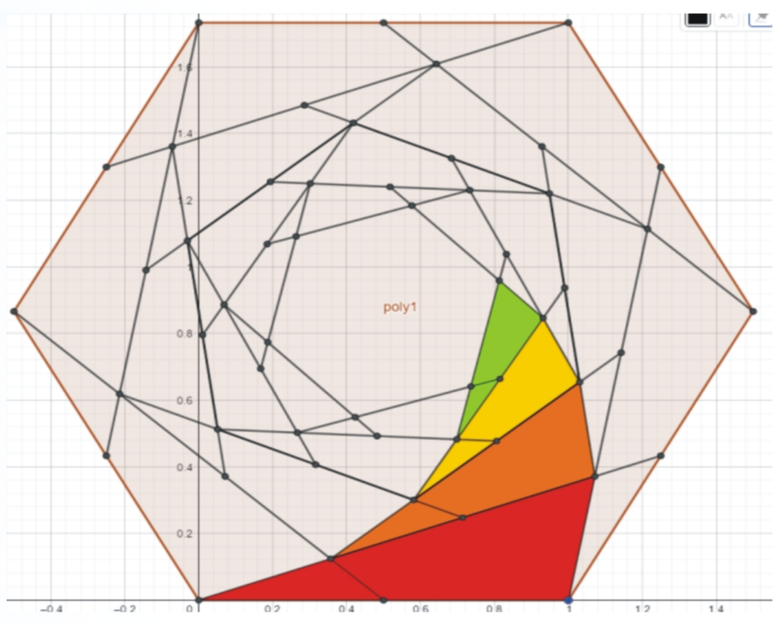
由上表可知：

1.當m值相同時，各 SR_n 值皆相等，所以<S_n>為無窮等比數列

2.當m值趨近0，SR_n 值趨近於1，當m值趨近於1，SR_n 值趨近於0

四、正六邊形

正六邊形的方法與正三角形大致相同，只需把正三角形 AR_n 改成正六邊形。如下圖所示



算出正六邊形分割出的各三角形之面積比與周長比例之數據及關係

(一)面積部分

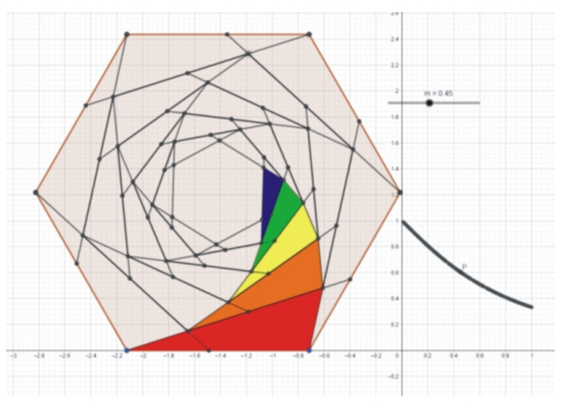
計算並觀察 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 ……，及相鄰兩三角形面積比值之關係，並比較各 $AR_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ 之值。

m值	AR_1	AR_2	AR_3	AR_n
0.1	0.9009009009	0.9009009009	0.9009009009	0.9009009009
0.2	0.8064516129	0.8064516129	0.8064516129	0.8064516129
0.3	0.7194244604	0.7194244604	0.7194244604	0.7194244604
0.4	0.641025641	0.641025641	0.641025641	0.641025641
0.5	0.5714285714	0.5714285714	0.5714285714	0.5714285714
0.6	0.5102040816	0.5102040816	0.5102040816	0.5102040816
0.7	0.4566210046	0.4566210046	0.4566210046	0.4566210046
0.8	0.4098360656	0.4098360656	0.4098360656	0.4098360656
0.9	0.36900369	0.36900369	0.36900369	0.36900369
1	0.333333333	0.333333333	0.333333333	0.333333333

由上表可知：

1.當m趨近1，AR_n 值越趨近 $\frac{1}{3}$

2. 當m值相同時, 各 AR_n 值皆相同



依前述方法作出P(m, AR_n)並觀察其圖形

由上圖發現：

六邊形的P圖形為遞減圖形，兩端點分別為(0,1)與(1,$\frac{1}{3}$)

(二)周長部分

與之前作法相同，將將各層三角形周長算出並得出S1, S2, S3, S4…，SR_n 當m值變化時值變化的情形：

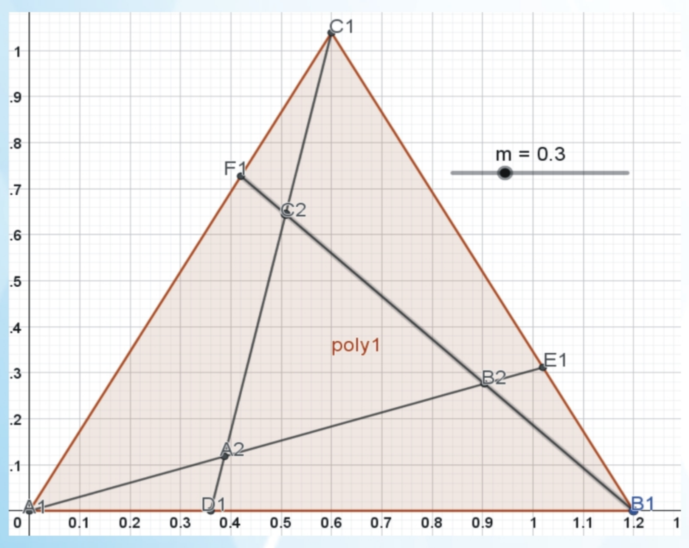
m值	SR_1	SR_2	SR_3	SR_n
0.1	0.9491579958	0.9491579958	0.9491579958	0.9491579958
0.2	0.8980265101	0.8980265101	0.8980265101	0.8980265101
0.3	0.8481889297	0.8481889297	0.8481889297	0.8481889297
0.4	0.800640769	0.800640769	0.800640769	0.800640769
0.5	0.755928946	0.755928946	0.755928946	0.755928946
0.6	0.7142857143	0.7142857143	0.7142857143	0.7142857143
0.7	0.6757373784	0.6757373784	0.6757373784	0.6757373784
0.8	0.6401843997	0.6401843997	0.6401843997	0.6401843997
0.9	0.6074567392	0.6074567392	0.6074567392	0.6074567392
1	0.5773502692	0.5773502692	0.5773502692	0.5773502692

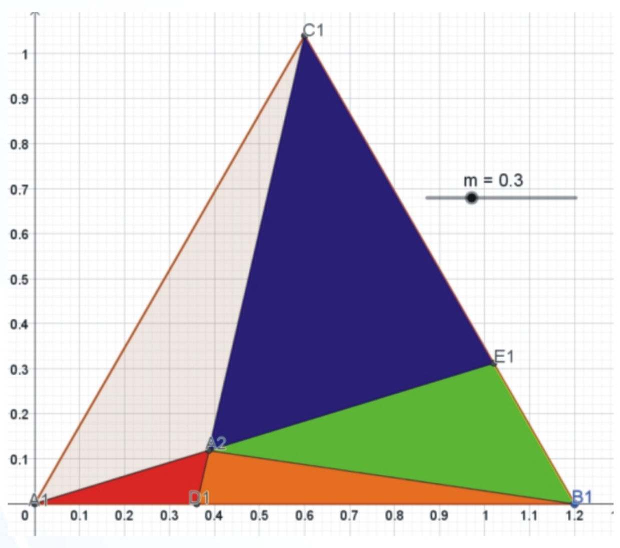
由上表可知

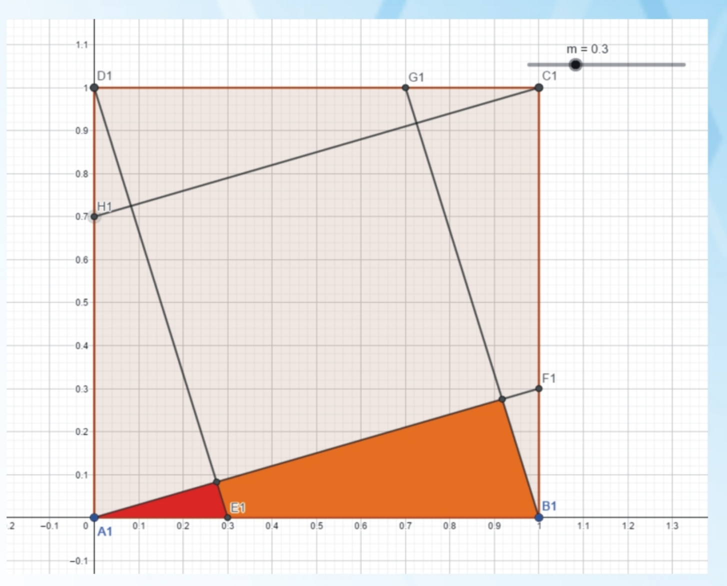
1.當m值相同時，各 SR_n 值相等。

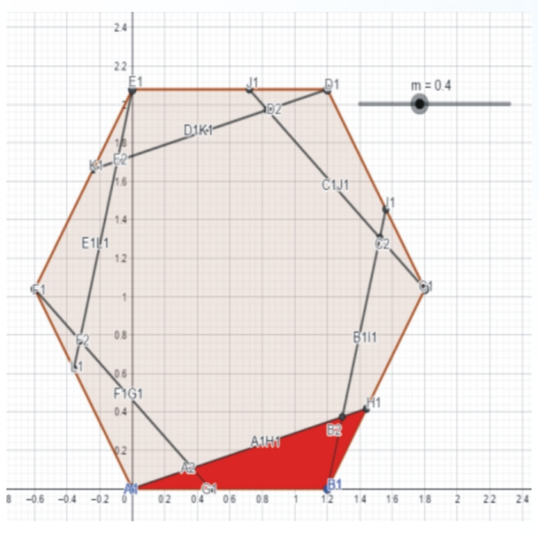
2.當m值趨近0，SR_n 值趨近1；當m值趨近1，SR_n 值趨近0.5773502692 ($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

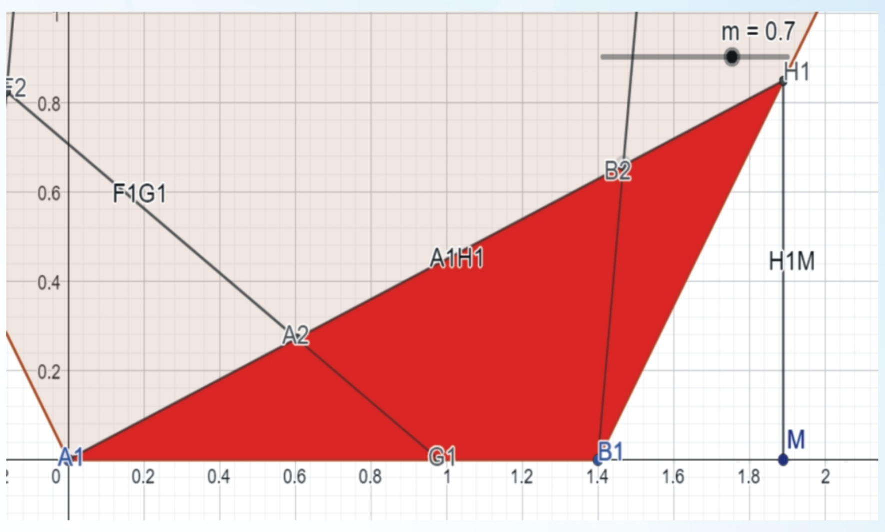
五、用公式證明多邊形的 AR_n 與 SR_n 依47屆科展國中組數學科：內外面積比公式、52屆科展國中組數學科：層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積、(過程詳見作品說明書)











整理公式

三角形、正方形、正六邊形面積比與周長比(用m表示)

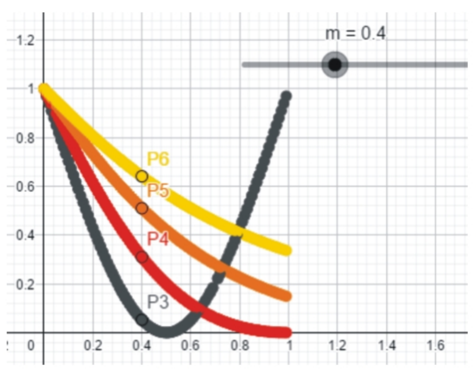
	三角形	正方形	正多邊形(θ為一外角)
AR_n	$\frac{(1-2m)^2}{1-m+m^2}$	$\frac{(1-m)^2}{1+m^2}$	$\frac{(1-m+2m\cdot\cos\theta)^2}{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}$
SR_n	$\frac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}$	$\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{1-m+2m\cdot\cos\theta}{\sqrt{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}}$

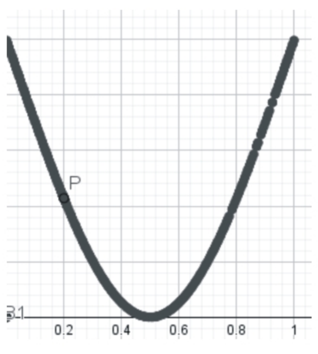
伍、討論

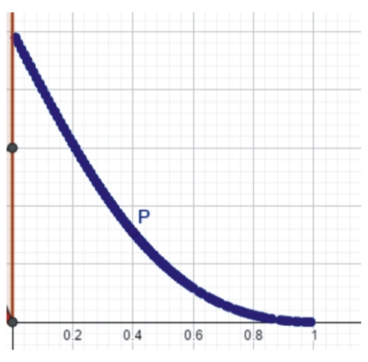
(一)比較公式圖形與Geogebra圖形

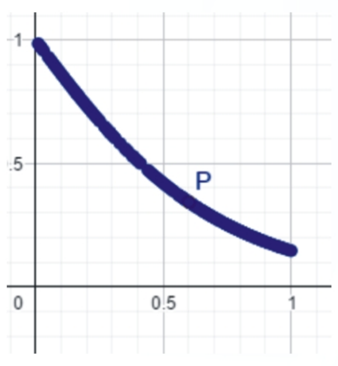
(二)比較正n 邊形公式圖形

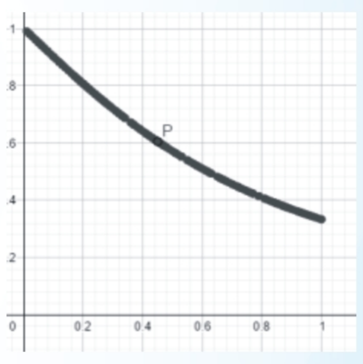
在Geogebra上跑出公式圖形 $\left[\frac{(1-m+2m\cdot\cos\theta)^2}{1+m^2+2m\cdot\cos\theta}\right]$ 與前述各P圖形做比較




三角形

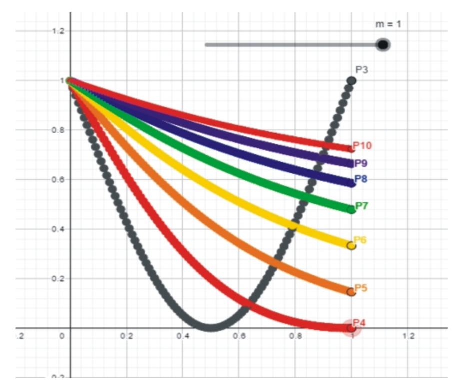

正方形


正五邊形


正六邊形

發現各公式圖形與Geogebra圖形一致

整理各正n邊形圖形

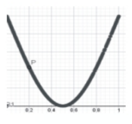


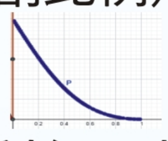
發現正四邊形以上皆為遞減圖形，

陸、結論

一、面積部分

(一)任意正多邊形、任意三角形、矩形及平行四邊形各邊等比例分割後，所形成相鄰兩三角形面積比值相同。任意多邊形(四邊以上)各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形面積比值不相同。

(二)三角形隨著m(切割比例)愈大，相鄰兩三角形面積比值為由大到小，在0.5時趨近於0，再由小到大。圖形為  (類似拋物線圖形)。

(三)四邊以上多邊形隨著m(分割比例)愈大，相等兩三角形面積比值愈小，圖形為  (遞減圖形)。

(四)正六邊形分割比例m越趨近於1，相鄰兩三角形面積比值會越趨近於$\frac{1}{3}$

(五)正四邊形以上在分割比例m相同，邊數愈多，相鄰兩三形面積面積比值會愈大，若m愈趨近1時，面積比值越往1靠近。

二、周長部分

(一)正多邊形、任意三角形之各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形周長比值相同。

(二)任意多邊形(四邊以上)各邊等比例分割，所形成相鄰兩三角形周長比值不相同。

(三)正六邊形分割比例m越趨近於1，相鄰兩三角形面積比值會越趨近於$\frac{\sqrt{3}}{3}$