中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030415

數學畢卡索－多邊形疊作之性質探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 許倬允 國二 林宥昕	蔡淑貞 魏子超

關鍵詞：外心、重複疊作、共圓

摘要

本作品主要研究原圖形與重複疊作頂外圖形之關係。頂外圖形是指以原圖形的頂點為圓心，頂點到外心的距離為半徑畫圓，圓的交點（外心除外）連線形成的圖形為頂外圖形。

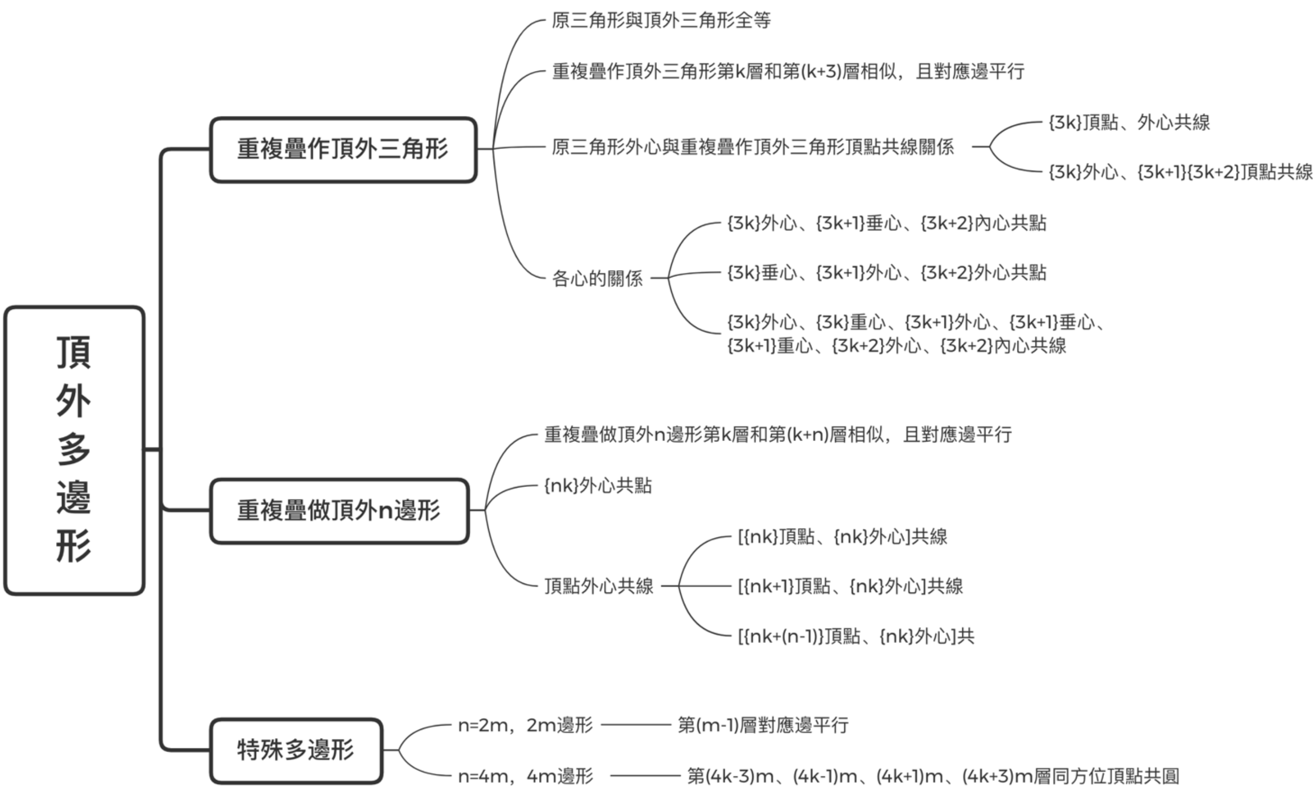
我們發現原三角形與其頂外三角形全等、原三角形與其重複疊作頂外三角形的外心、垂心、內心、重心、頂點有共點與共線之性質，接著我們延伸至多邊形觀察是否有與三角形相同的性質，發現四邊形第 k 層和第（k+4）層會相似、平行，且其頂點有共圓、共線等性質，並推廣到 n 邊形第 k 層和第（k+n）層相似、對應邊平行；第 k 層和第（k+n）層和{4k}外心共線等性質，最後延伸到 2m 邊形第（m-1）層對邊平行；4m 邊形第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層共圓。

壹、 研究動機

我們在上專題課時，聽到數學老師說，前幾屆的學長姐做了重心疊作，發現了一些性質，因此我們試著把重心換成內心、外心和垂心，發現原三角形會和重複疊作外心三角形全等，於是我們開始了這一連串的研究。

貳、 研究目的

一、 原三角形和其第一層頂外三角形關係之探討
二、 重複疊作頂外三角形關係之探討
三、 重複疊作頂外三角形各心性質之探討
四、 重複疊作重複頂外 n 邊形性質之探討
五、 特殊多邊形之特殊性質



參、 文獻探討

一、 第 54 屆科展作品（多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討）
https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/030421.pdf
二、 第 57 屆科展作品（頂圓多邊形之性質研究與探討）
https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/030422.pdf

本文引用第 54 屆全國科展國中組數學科「多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討」的作品中 p.11 第 m 層與第（m+n）層相似
p.15 角度轉換
p.18 邊長關係
p.20 各圖形到點的距離
我們利用該作品之類似方法進行證明

肆、 研究設備及器材

電腦、Geogebra、XMind、Excel、Word

伍、 研究過程與方法

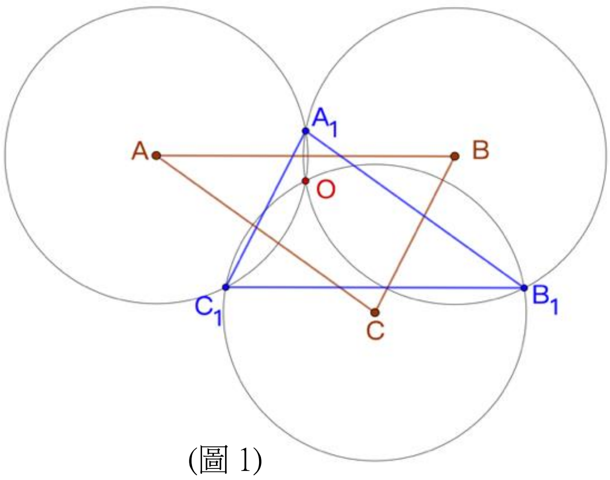
一、 名詞解釋

（一） 頂外三角形：

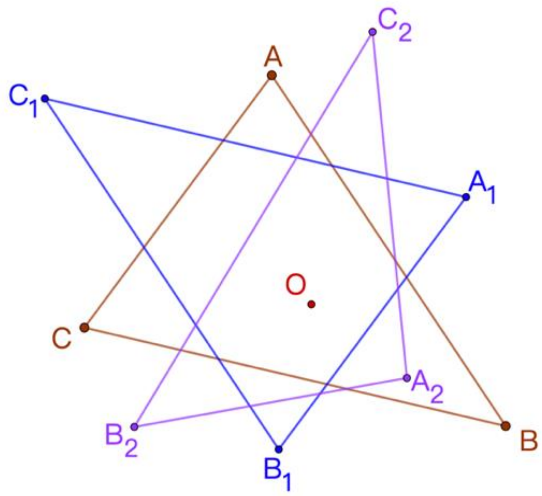
以ΔABC三頂點當圓心，以頂點到外心的距離當半徑畫圓，三圓的交點(不包含ΔABC外心)連線即為頂外$\Delta A_1B_1C_1$。（圖 1）

（二） 重複疊作頂外三角形：

以ΔABC為例，先做出頂外$\Delta A_1B_1C_1$，再以$\Delta A_1B_1C_1$的三頂點當圓心，到ΔABC外心為半徑畫圓，三圓的交點(不包含ΔABC外心)連線即為第二層重複疊作頂外三角形$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta ABC = \Delta A_0B_0C_0$，第 n 層為$A_nB_nC_n$(圖 2)



(圖 1)



(圖 2)

（三） 重複疊作頂外 n 邊形

先做出一圓上多邊形，並做出其頂外 n 邊形，再用其頂點為圓心，到原 n 邊形外心為半徑畫圓，n 個圓的交點連線即為第二層重複疊作頂外 n 邊形，重複疊作 m 次即為第 m 層重複疊作頂外 n 邊形（原 n 邊形為第零層重複疊作頂外 n 邊形）。

二、 三角形與其頂外三角形關係之探討

以下我們分別針對銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形與其頂外三角形的關係做探討。

（一） 銳角ΔABC ≅頂外$\Delta B_1C_1A_1$

已知：銳角三角形為ΔABC，其外心為O，其頂外三角形為$\Delta A_1B_1C_1$（圖 3）

求證：$\Delta ABC \cong \Delta B_1C_1A_1$且對應邊平行

證明：

1. 等角關係

$\because \angle OA_1C_1 = \frac{1}{2}\widehat{OC_1}$（圓周角）

$= \frac{1}{2}\angle OAC_1$（圓心角）

$= \angle OAC$（四邊形$AOCC_1$為菱形）

$= \angle OCA$（O為外心）

同理：$\angle OB_1C_1 = \angle OAC = \angle OCA$

故$\angle OA_1C_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OAC = \angle OCA = x°$

同理可證：$\angle OAB = \angle OBA = \angle OC_1A_1 = \angle OB_1A_1 = y°$

$\angle OBC = \angle OCB = \angle OA_1B_1 = \angle OC_1B_1 = z°$

2. 對應邊平行且等長

（1）證明四邊形A_1C_1CB為平行四邊形

$\because$四邊形AC_1CO為菱形

$\therefore \angle OCA = \angle ACC_1 = x°$

$\therefore \angle C_1CB = x° + x° + z°$ —①

$\because$四邊形OCB_1B和四邊形OBA_1A為菱形

$\therefore \angle OBC = \angle B_1BC = z°$

$\angle OBA = \angle A_1BA = y°$

$\because \overline{A_1B} = \overline{B_1B}$（圓半徑）

$\therefore \Delta A_1BB_1$為等腰$\Delta$

$\because \Delta ABC$內角和$= 180° = \Delta A_1BB_1$內角和

$\therefore 2(x° + y° + z°) = 180°$

$\therefore \angle B_1A_1B = \angle BB_1A = x°$

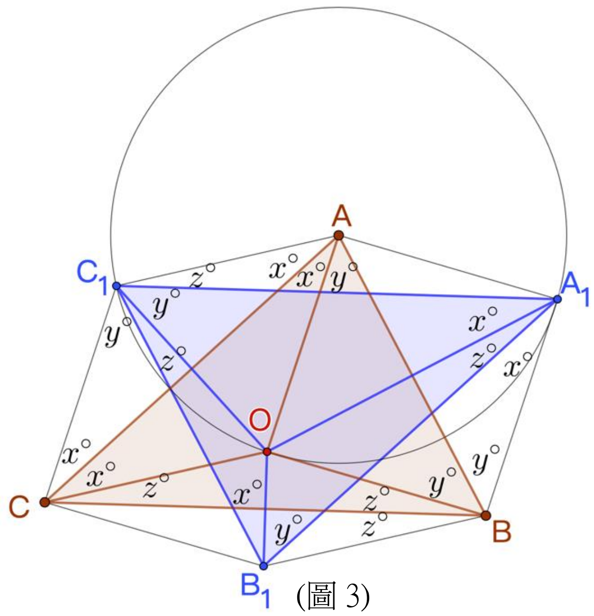
$\therefore \angle C_1A_1B = x° + x° + z°$ —②

由①、②得知$\angle C_1CB = \angle C_1A_1B$

同理$\angle CC_1A_1 = \angle A_1BC$

$\therefore$四邊形A_1C_1CB為平行四邊形（兩雙對角分別相等）

$\therefore \overline{A_1C_1} // \overline{BC}$且$\overline{A_1C_1} = \overline{BC}$



(圖 3)

3. $\because$四邊形B_1C_1AB和A_1B_1CA為平行四邊形

$\therefore \overline{B_1C_1} // \overline{AB}$且$\overline{B_1C_1} = \overline{AB}$

$\overline{A_1B_1} // \overline{AC}$且$\overline{A_1B_1} = \overline{AC}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta B_1C_1A_1$（$SSS$全等），且三組對應邊分別互相平行

亦即$\Delta B_1C_1A_1$為三角形ΔABC 之點對稱圖形

（二） 鈍角ΔABC ≅頂外$\Delta B_1C_1A_1$

已知：鈍角三角形為ΔABC，其外心為O，其頂外三角形為$\Delta A_1B_1C_1$（圖 4）

求證：$\Delta ABC \cong \Delta B_1C_1A_1$且對應邊平行

證明：

1. $\because O$為ΔABC外心

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{B_1C} = \overline{BB_1} = \overline{A_1B} = \overline{C_1C}$

令$\angle OAB = \angle OBA = x°$，$\angle OAC = \angle OCA = z°$

$\angle B_1BC = \angle B_1CB = \angle OCB = \angle OBC = y°$

2. $\because$四邊形AA_1BO和C_1AOC為菱形

$\therefore \angle ADO = 90°$、$\angle CEO = 90°$

$\therefore \angle AOD = 180° - 90° - x° = 90° - x°$

$\therefore \angle AOE = 180° - 90° - z°$

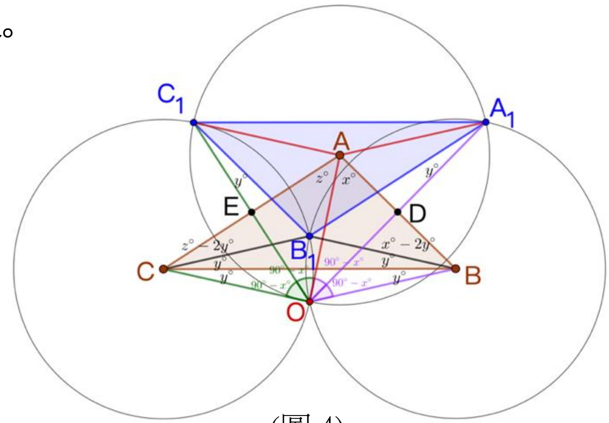
$= 180° - 90° - z° = 90° - z°$

$\because \angle B_1BO = 2y°$

$\therefore \angle ABB_1 = x° - 2y°$

$\because \angle B_1CO = 2y°$

$\therefore \angle ACB_1 = z° - 2y°$



(圖 4)

3. $\because$圓C半徑=圓A半徑

$\therefore \angle B_1C_1O = \frac{1}{2}\widehat{B_1O} = \angle B_1CB = y°$

$\therefore \angle OAC + \angle ACB_1$

$= 180° - [x° + (x° - 2y°) + y° + y°]$

$\therefore z° + z° - 2y° = 180° - 2x°$

$\therefore z° = 90° + y° - x°$

$\therefore \angle A_1OC_1 = 90° - y°$

$\therefore \angle A_1B_1C_1 = (90° - y°) + y° + y° = 90° + y°$ —①

$\angle CAB = z° + x° = 90° + y°$ —②

由①、②可知$\angle A_1B_1C_1 = \angle CAB$

4. $\because OCB_1B$為平行四邊形，AA_1BO為平行四邊形（圖 5）

$\therefore \overline{B_1C} // \overline{BO}$且$\overline{B_1C} = \overline{BO}$、$\overline{AA_1} // \overline{BO}$且$\overline{AA_1} = \overline{BO}$

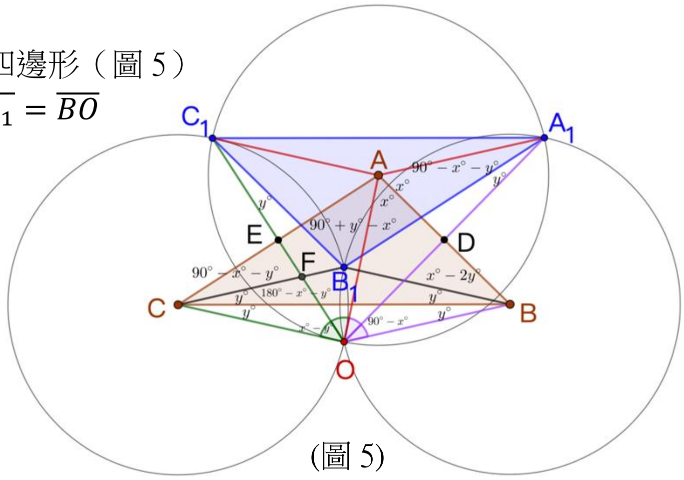
$\Rightarrow \overline{AA_1} // \overline{B_1C}$且$\overline{AA_1} = \overline{B_1C}$

可知AA_1B_1C為平行四邊形

$\therefore \overline{AC} = \overline{A_1B_1}$

同理可證：

$\overline{AB} = \overline{C_1B_1}$



(圖 5)

5. $\because \angle A_1B_1C_1 = \angle CAB$

$\overline{AC} = \overline{A_1B_1}$

$\overline{AB} = \overline{C_1B_1}$

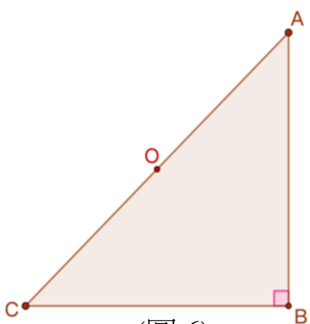
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta B_1C_1A_1$（$SAS$全等）且三組對應邊分別互相平行

亦即$\Delta B_1C_1A_1$為三角形ΔABC 之點對稱圖形

（三） 直角ΔABC（圖 6）

$\because$直角三角形外心在斜邊上

$\therefore$無法做出頂外三角形



(圖 6)

三、 重複疊作頂外三角形關係之探討

在研究過程中，我們發現若以第一層重複疊作頂外三角形的外心來疊作第二層重複疊作頂外三角，將會與原三角形重合，因此我們後面的內容皆以原三角形的外心進行疊作。

（一） 名詞定義：{3k}、{3k+1}、{3k+2}（$\boldsymbol{k} \in$ 非負整數）

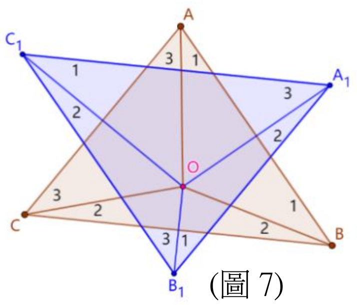
{3k}為所有重複疊作層數除以三整除之三角形（第 0、3、6、9……層）

{3k+1}為所有重複疊作層數除以三餘一之三角形（第 1、4、7、10……層）

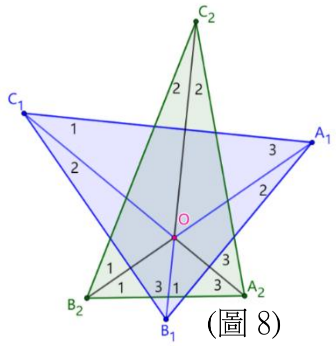
{3k+2}為所有重複疊作層數除以三餘二之三角形（第 2、5、8、11……層）

（二） 三角形與其頂外三角形角度變化之觀察

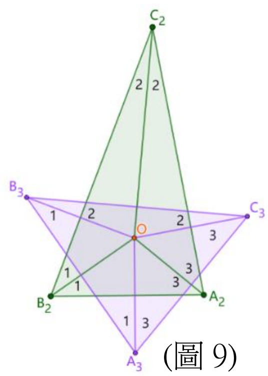
經由上述的性質，我們想知道重複疊作頂外三角形各頂點到ΔABC外心連線所形成之角度是否有關係？



(圖 7)



(圖 8)



(圖 9)

1. 第零層和第一層重複疊作頂外三角形角度之轉換

先利用第零層和第一層頂外三角形全等方法之證明可知零層和第一層頂外三角形角度的轉換之證明如下(為以後多邊形證明需要，我們把前面所使用$x°$、$y°$、$z°$換成∠1、∠2、∠3，多邊形依數字類推)

$\because \angle OA_1C_1 = \frac{1}{2}\widehat{OC_1}$（圓周角）

$= \frac{1}{2}\angle OAC_1$（圓心角）

$= \angle OAC$（四邊形$AOCC_1$為菱形）

$= \angle OCA$（O為外心）

再加上外心性質可得

$\angle OA_1C_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OAC = \angle OCA = \angle 3$

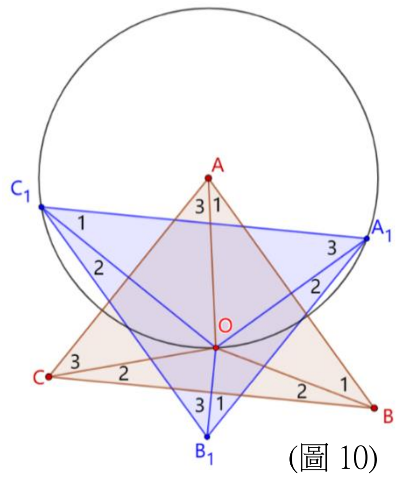
$\angle OAB = \angle OBA = \angle OC_1A_1 = \angle OB_1A_1 = \angle 1$

$\angle OBC = \angle OCB = \angle OA_1B_1 = \angle OC_1B_1 = \angle 2$

故可得下表：

三角形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$
第零層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$
第一層	$\angle 3+\boxed{\angle 2}$	$\angle 1+\boxed{\angle 3}$	$\angle 2+\boxed{\angle 1}$

(表 1)



(圖 10)

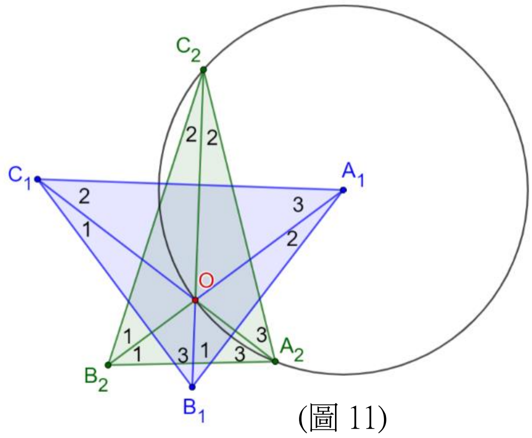
2. 第一層重複疊作頂外三角形和第二層重複疊作第一層頂外三角形角度之轉換
再利用類似方法可知重複疊作第一層和第二層
角度的轉換之證明如下

$\because \angle OC_2A_2 = \frac{1}{2}\widehat{OA_2}$（圓周角）
$= \frac{1}{2}\angle OA_1A_2$（圓心角）
$= \angle OA_1B_1$（四邊形$OA_1A_2B_1$為箏形）
$= \angle OA_1B_1$（O為外心）

同理可得：

$\angle OC_1A_1 = \angle OB_1A_1 = \angle OB_2A_2 = \angle OB_2C_2 = \angle 1$
$\angle OC_1B_1 = \angle OA_1B_1 = \angle OC_2A_2 = \angle OC_2B_2 = \angle 2$
$\angle OA_1C_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OA_2B_2 = \angle OA_2C_2 = \angle 3$

故可得下表：



(圖 11)

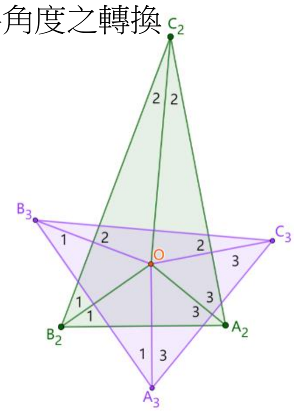
三角形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$
第零層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$
第一層	$\angle 3+\boxed{\angle 2}$	$\angle 1+\boxed{\angle 3}$	$\angle 2+\boxed{\angle 1}$
第二層	$\angle 3+\boxed{\angle 3}$	$\angle 1+\boxed{\angle 1}$	$\angle 2+\boxed{\angle 2}$

(表 2)

3. 第二層重複疊作頂外三角形和第二層重複疊作第一層頂外三角形角度之轉換
用上述方法可得下表

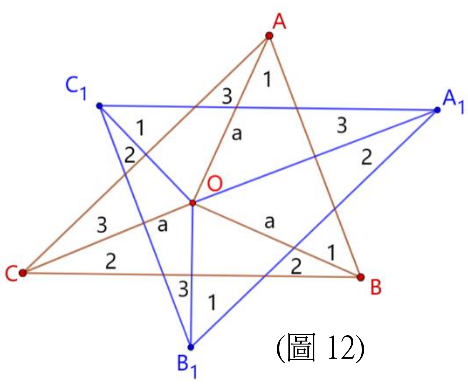
三角形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$
第零層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$
第一層	$\angle 3+\boxed{\angle 2}$	$\angle 1+\boxed{\angle 3}$	$\angle 2+\boxed{\angle 1}$
第二層	$\angle 3+\boxed{\angle 3}$	$\angle 1+\boxed{\angle 1}$	$\angle 2+\boxed{\angle 2}$
第三層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$

(表 3)

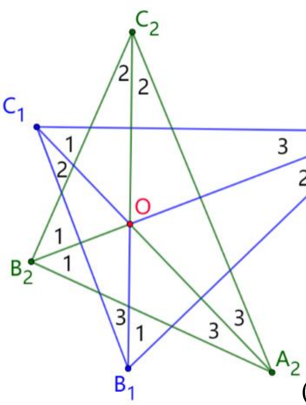


結論：由上表可知經由三次角度轉換之後，第 m 層與第（m+3）層對應角相等，
因此第 m 層與第（m+3）層三角形相似

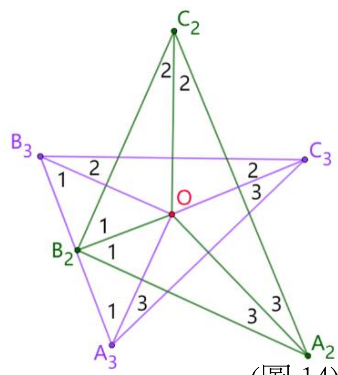
（三） 三角形與其頂外三角形邊長比例變化之觀察



(圖 12)



(圖 13)



(圖 14)

已知：原三角形外心為O，其頂外三角形為$A_1B_1C_1$
求證：三角形$A_0B_0C_0$和三角形$A_3B_3C_3$對應邊比例為$8\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)$

證明：

設$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=a$（外心到頂點等距）

$\angle OAB=\angle OBA=\angle 1$、$\angle OBC=\angle OCB=\angle 2$

$\angle OCD=\angle ODC=\angle 3$

1. **求出重複疊作頂外三角形各層頂點到原三角形外心的距離**

（1） 第一層重複疊作頂外三角形各頂點到外心距離

$\because$四邊形A_1AOB為菱形

$\therefore\overline{AB}$垂直平分$\overline{A_1O}$

又$\overline{OH}=a\sin(\angle 1)$

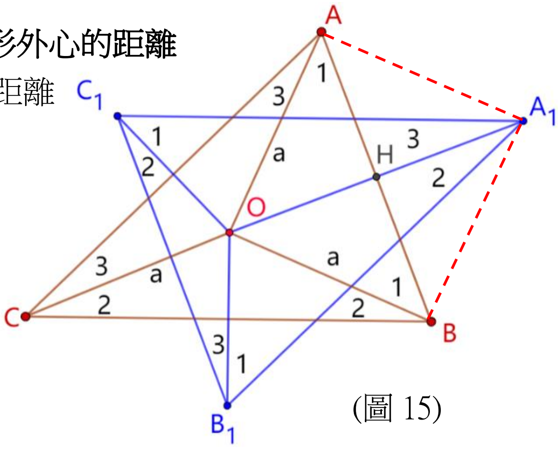
$\because\overline{OH}=\overline{HA_1}$

$\therefore\overline{A_1O}=2\cdot a\sin(\angle 1)$

同理：$\overline{B_1O}=2\cdot a\sin(\angle 2)$

$\overline{C_1O}=2\cdot a\sin(\angle 3)$

故可得下表：



(圖 15)

各頂點到外心距離	$m=0$	$m=1$
$\overline{A_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 1)$
$\overline{B_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 2)$
$\overline{C_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 3)$

(表 4)

（2） 第二層重複疊作頂外三角形各頂點到外心距離

$\because$四邊形$A_1OC_1C_2$為箏形

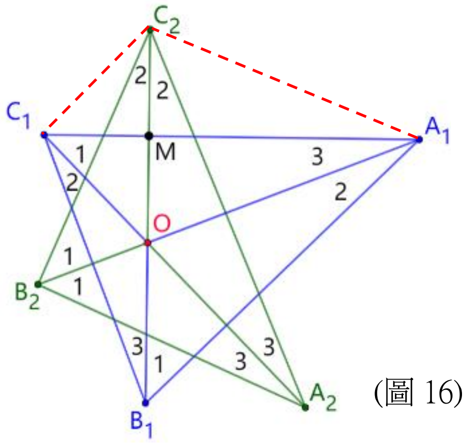
$\therefore\overline{A_1C_1}$垂直平分$\overline{C_2O}$

又$\overline{OM}=\overline{C_1O}\sin(\angle 1)$

$\because\overline{OM}=\overline{MC_2}$

$\therefore\overline{C_2O}=2\cdot\overline{C_1O}\sin(\angle 1)=2\cdot 2a\sin(\angle 3)\cdot\sin(\angle 1)$

$=4a\sin(\angle 3)\sin(\angle 1)$



(圖 16)

同理：

$\overline{A_2O}=2\cdot\overline{A_1O}\sin(\angle 2)=2\cdot 2a\sin(\angle 1)\cdot\sin(\angle 2)$

$=4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$

$\overline{B_2O}=2\cdot\overline{B_1O}\sin(\angle 3)=2\cdot 2a\sin(\angle 2)\cdot\sin(\angle 3)$

$=4a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$

故可得下表：

各頂點到外心距離	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$\overline{A_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 1)$	$4a\ \sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$
$\overline{B_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 2)$	$4a\ \sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$
$\overline{C_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 3)$	$4a\ \sin(\angle 3)\sin(\angle 1)$

(表 5)

（3） 第三層重複疊作頂外三角形各頂點到外心距離

同(1)、(2)相同方法可知

$\overline{A_3O}=2\,\overline{B_2O}\sin(\angle 1)=2\cdot 4a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\cdot\sin(\angle 1)$

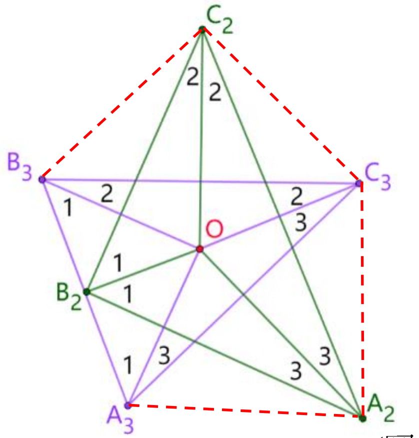
$=8a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$

$\overline{B_3O}=2\,\overline{C_2O}\sin(\angle 2)=2\cdot 4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 3)\cdot\sin(\angle 2)$

$=8a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 1)$

$\overline{C_3O}=2\,\overline{A_2O}\sin(\angle 3)=2\cdot 4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\cdot\sin(\angle 3)$

$=8a\sin(\angle 3)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$



(圖 17)

綜合上述可得下表

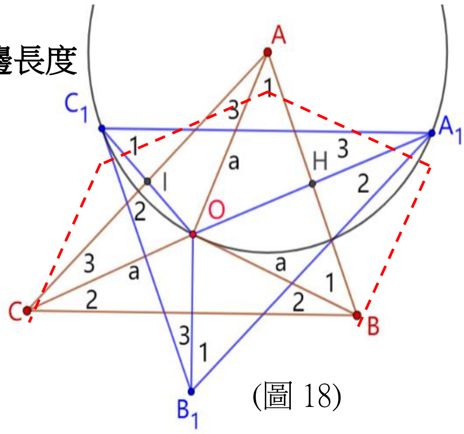
各頂點到外心距離	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$\cdots$
$\overline{A_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 1)$	$4a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)$	$8a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)$	$\cdots$
$\overline{B_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 2)$	$4a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)$	$8a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 1)$	$\cdots$
$\overline{C_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 3)$	$4a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 1)$	$8a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)$	$\cdots$

(表 6)

設$K_3 = sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)$，若是 n 邊形中$sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\cdots sin(\angle n)$即為$K_n$

2. 利用前面頂點到外心距離求出重複疊作頂外三角形各邊長度

（1） 第零層重複疊作頂外三角形各邊長



(圖 18)

$\because \overline{C_1O}$垂直平分$\overline{AC}$

$\therefore \overline{AI} = \overline{IC}$

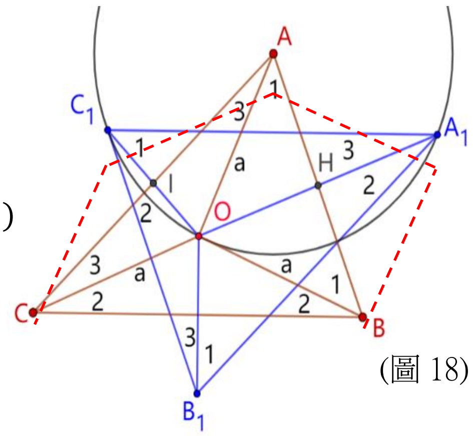
$\therefore \overline{AC} = 2a \cdot cos\,(\angle 3)$

同理

$\overline{AB} = 2a \cdot cos\,(\angle 1)$

$\overline{BC} = 2a \cdot cos\,(\angle 2)$

（2） 第一層重複疊作頂外三角形各邊長



(圖 18)

$\because \overline{AC} \perp \overline{C_1O}$，$\overline{AB} \perp \overline{A_1O}$(菱形性質)

$\therefore$A 為ΔA_1C_1O外心

$\therefore$a為ΔA_1C_1O外接圓半徑$= \overline{AO}$

在ΔA_1C_1O中利用正弦定理可知

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{sin(\angle A_1OC_1)} = 2\overline{AO} = 2a$$

$\therefore \overline{A_1C_1} = 2a\ \ sin(\angle A_1OC_1)$

$= 2a\,sin[180 - (\angle 1 + \angle 3)] = 2a\,sin(\angle 1 + \angle 3)$

同理：

$\overline{A_1B_1} = 2a\,sin(\angle 1 + \angle 2)$

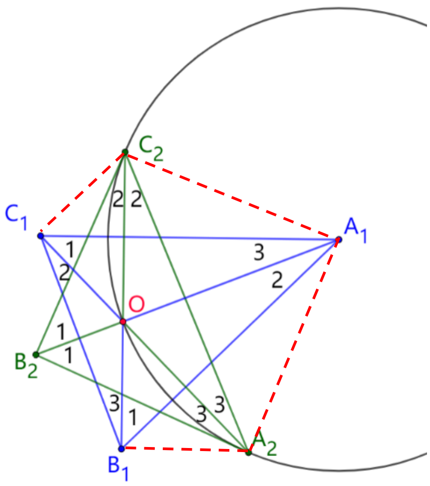
$\overline{B_1C_1} = 2a\,sin(\angle 2 + \angle 3)$

故可得下表：

邊長	$m=0$	$m=1$
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle 1)$	$2a\ sin(\angle 1 + \angle 2)$
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle 2)$	$2a\ sin(\angle 2 + \angle 3)$
$\overline{C_mA_m}$	$2a\ cos(\angle 3)$	$2a\ sin(\angle 3 + \angle 1)$

(表 7)

（3） 第二層重複疊作頂外三角形各邊長（圖 19）



(圖 19)

$\because \overline{A_1C_1} \perp \overline{C_2O}$，$\overline{A_1B_1} \perp \overline{A_2O}$(箏形性質)

$\therefore A_1$為ΔA_2C_2O外心

$\therefore \Delta A_2C_2O$外接圓半徑$= \overline{A_1O}$

在三角形ΔA_2C_2O中利用正弦定理可知

$$\frac{\overline{A_2C_2}}{sin(\angle A_2OC_2)} = 2\overline{A_1O}$$

$\therefore \overline{A_2C_2} = 2\overline{A_1O}\ \ sin(\angle A_2OC_2)$

$= 2\overline{A_1O}\,sin[180 - (\angle 2 + \angle 3)]$

$= 2\overline{A_1O}\,sin(\angle 2 + \angle 3)$

$= 2 \cdot 2asin(\angle 1) \cdot sin(\angle 2 + \angle 3)$
$= 4a\ sin(\angle 1)\ sin\ (\angle 2 + \angle 3)$

同理：

$\overline{A_2B_2} = 4a\ sin(\angle 2)\ sin\ (\angle 3 + \angle 1)$

$\overline{B_2C_2} = 4a\ sin(\angle 3)\ sin\ (\angle 1 + \angle 2)$

故可得下表

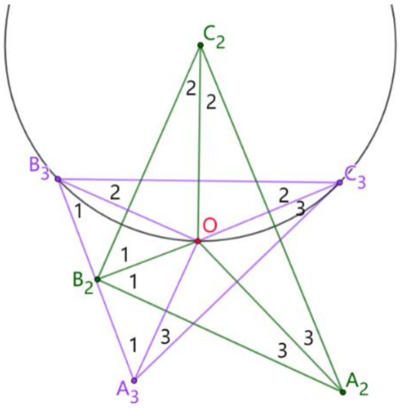
邊長	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle 1)$	$2a\ sin(\angle 1 + \angle 2)$	$4a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3 + \angle 1)$
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle 2)$	$2a\ sin(\angle 2 + \angle 3)$	$4a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 1 + \angle 2)$
$\overline{C_mA_m}$	$2a\ cos(\angle 3)$	$2a\ sin(\angle 3 + \angle 1)$	$4a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2 + \angle 3)$

(表 8)

（4） 第三層重複疊作頂外三角形各邊長

從（2）、（3）方法類推可知

$\overline{B_3C_3} = 2\ \overline{C_2O} sin(\angle 2 + \angle 2)$
$= 8a\ sin\ (\angle 3) sin\ (\angle 1) sin(\angle 2 + \angle 2)$
$\overline{C_3A_3} = 2\ \overline{A_2O} sin(\angle 3 + \angle 3)$
$= 8a\ sin\ (\angle 1) sin(\angle 2) sin(\angle 3 + \angle 3)$
$\overline{A_3B_3} = 2\ \overline{B_2O} sin(\angle 1 + \angle 1)$
$= 8\mathrm{a}\ \sin\ (\angle 2) \sin\ (\angle 3) sin(\angle 1 + \angle 1)$



(圖 20)

綜合上述可知各層邊長如下表

邊長	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$\cdots$
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle 1)$	$2a\ sin(\angle 1 + \angle 2)$	$4a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3 + \angle 1)$	$8a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 1 + \angle 1)$	$\cdots$
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle 2)$	$2a\ sin(\angle 2 + \angle 3)$	$4a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 1 + \angle 2)$	$8a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2 + \angle 2)$	$\cdots$
$\overline{C_mA_m}$	$2a\ cos(\angle 3)$	$2a\ sin(\angle 3 + \angle 1)$	$4a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2 + \angle 3)$	$8a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3 + \angle 3)$	$\cdots$

(表 9)

3. **計算$\Delta A_0B_0C_0$和$\Delta A_3B_3C_3$邊長比例**

$$\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{8a\,sin(\angle 1 + \angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)}{2a\,cos(\angle 1)}$$

$$= \frac{16a\,cos(\angle 1)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)}{2a\,cos\ (\angle 1)} = 8K_3$$

4. **同理：**

$$\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_0C_0}} = \frac{\overline{C_3A_3}}{\overline{C_0A_0}} = 8K_3$$

結論：

重複疊作頂外三角形第 m 層和第（m+3）層相似且對應邊比例為$8K_3$

每一組{3k}之間的邊長比為$8K_3$

每一組{3k+1}之間的邊長比為$8K_3$

每一組{3k+2}之間的邊長比為$8K_3$

（四） 重複疊作三角形第 m 層與第（m+3）層對應邊平行

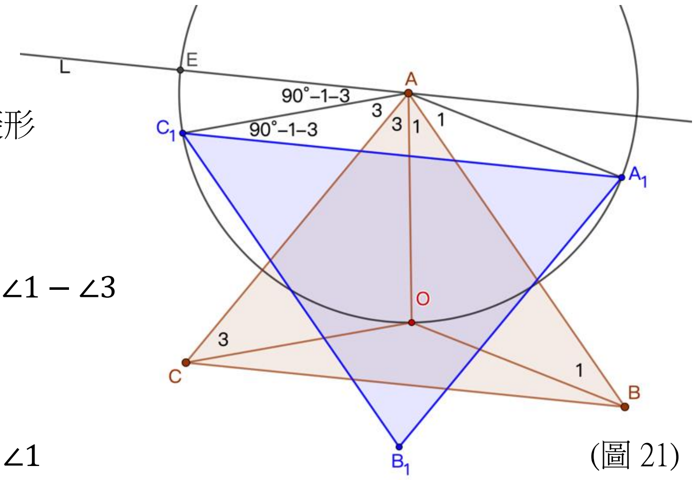
經過了前面角度轉換的探討，我們發現重複疊作頂外三角形各邊會有平行的性質

以{3k}為例：

已知：ΔABC外心為O，重複疊作第三層三角形為$\Delta A_3B_3C_3$（圖 21）

求證：{3k}對應邊平行

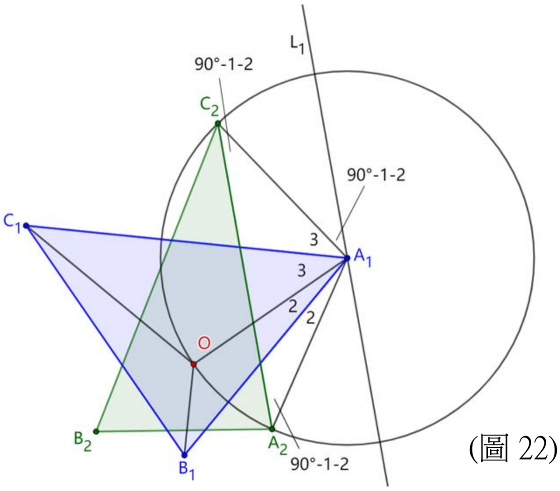
證明：



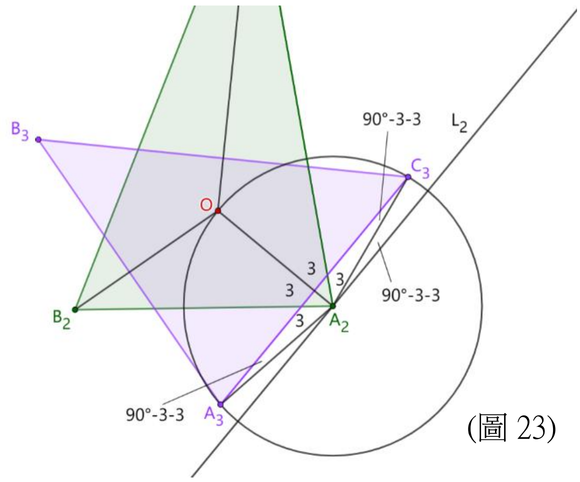
1. 過點A做$\overline{A_1C_1}$之平行線L
   $\because$四邊形$AOCC_1$和AA_1BO為菱形
   $\therefore \angle BAO = \angle BAA_1 = \angle 1$
   $\quad \angle CAO = \angle CAC_1 = \angle 3$
   $\because \overline{AC_1} = \overline{AA_1}$
   $\therefore \angle AC_1A_1 = \angle AA_1C_1 = 90° - \angle 1 - \angle 3$
   又$L // \overline{A_1C_1}$
   $\therefore \angle EAC_1 = 90 - \angle 1 - \angle 3$
   $\therefore \angle EAC = 90 - \angle 1$
   可知$\overline{AC}$、$\overline{A_1C_1}$之夾角為$90° - \angle 1$

(圖 21)

   同理，$\overline{A_1C_1}$、$\overline{A_2C_2}$和$\overline{A_2C_2}$、$\overline{A_3C_3}$之夾角變化如圖（圖 22、23）



(圖 22)



(圖 23)

綜合上述可得下表

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	…
$\overline{C_mA_m}$與$\overline{C_{m+1}A_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	…
$\overline{A_mB_m}$與$\overline{A_{m+1}B_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 1$	…
$\overline{B_mC_m}$與$\overline{B_{m+1}C_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	…

(表 10)

$\because \Delta ABC$ 內角和 $= 180° = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$
$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°$
$\therefore \overline{CA}$、$\overline{C_3A_3}$轉了$(90° - \angle 1) + (90° - \angle 2) + (90° - \angle 3) = 270° - 90° = 180°$
$\therefore \overline{CA} // \overline{C_3A_3}$
同理可證：$\overline{AB} // \overline{A_3B_3}$、$\overline{BC} // \overline{B_3C_3}$
故原三角形和疊作第三層對應邊平行
又任意一邊連續旋轉三次之夾角為$270° - 90° = 180°$
$\therefore \overline{A_mB_m} // \overline{A_{m+3}B_{m+3}}$
$\quad \overline{B_mC_m} // \overline{B_{m+3}C_{m+3}}$
$\quad \overline{C_mA_m} // \overline{C_{m+3}A_{m+3}}$
$\therefore$重複疊作頂外三角形第 m 層和第（m+3）層對應邊平行

（五） 重複疊作頂外三角形頂點外心共線性質之探討

利用前面的平行及角度轉換，我們證明了重複疊作頂外三角形各頂點和原三角形外心會有共線的性質

1. {3k}頂點、外心共線

已知： 原三角形ΔABC外心為O，疊作第 3k 層三角形為$\Delta A_{3k}B_{3k}C_{3k}$（圖 24）

求證： 外心O與A、A_{3k}共線，外心O與B、B_{3k}共線，外心O與C、C_{3k}共線

證明：

（1） 做L垂直$\overline{AB}$

$\because \overline{AB}//\overline{A_3B_3}$，則$\angle BJO = \angle B_3KO = 90°$

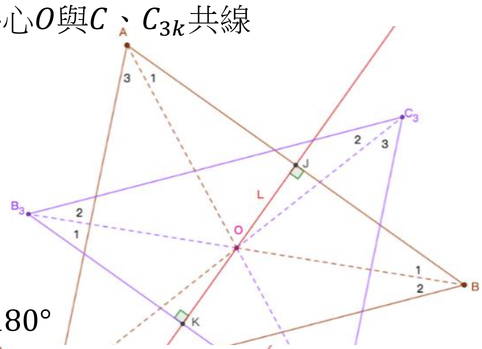
且$\angle ABO = \angle A_3B_3O = \angle 1$

$\therefore \Delta OBJ \sim \Delta OB_3K$（$AA$相似）

故$\angle BOJ = \angle B_3OK$

$\angle BOB_3 = \angle BOJ + \angle B_3OJ = \angle B_3OK + \angle B_3OJ = 180°$

$\therefore B$、O、B_3共線



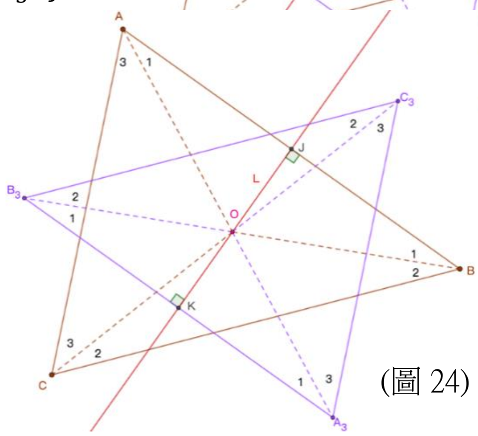


圖 24)

（2） 同理可證：A、O、A_3共線

C、O、C_3共線

（3） 不失一般性，同理可證

外心O與A、A_{3k}共線，

外心O與B、B_{3k}共線，

外心O與C、C_{3k}共線

故{3k}頂點、外心共線

(圖 24)

2. {3k}外心、{3k+1}頂點、{3k+2}頂點共線

已知： 重複疊作第 k 層三角形為$\Delta A_kB_kC_k$，原三角形外心為O，$\overline{C_1O} \perp \overline{A_1B_1}$（圖 25）

求證： 原三角形外心O與C_{3k+1}、A_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

原三角形外心O與B_{3k+1}、C_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

原三角形外心O與A_{3k+1}、B_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

證明：

（1） $\because$ {3k+1}、{3k+2}對應邊平行

$\therefore \overline{C_1B_1}//\overline{C_4B_4}$

又$\angle B_1C_1O = \angle B_4C_4O$

$\therefore C_1$、O、C_4共線（方法同前面證明 p.12）

（2） $\because$ 四邊形$A_1A_2B_1O$為箏形

$\therefore \overline{A_2O} \perp \overline{A_1B_1}$

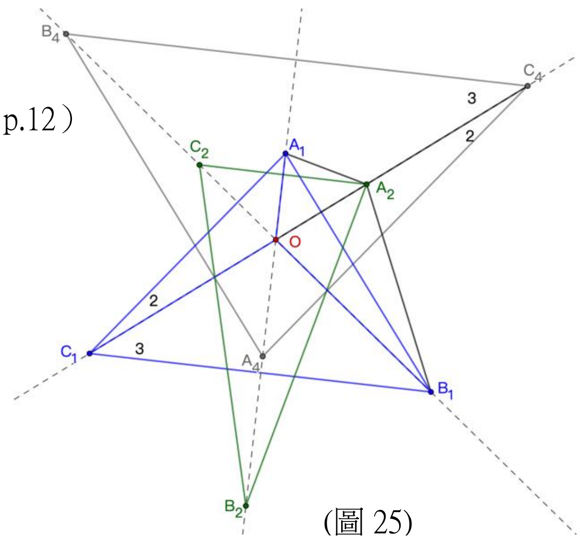
又$\Delta A_1B_1C_1$垂心與ΔABC外心共點

$\therefore \overline{C_1O} \perp \overline{A_1B_1}$

故C_1、O、A_2、C_4四點共線

同理可證： A_1、O、B_2、A_4共線

B_1、O、C_2、B_4共線



(圖 25)

（3） $\because$ {3k}外心共點

不失一般性，同理可證

原三角形外心O與C_{3k+1}、A_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

原三角形外心O與B_{3k+1}、C_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

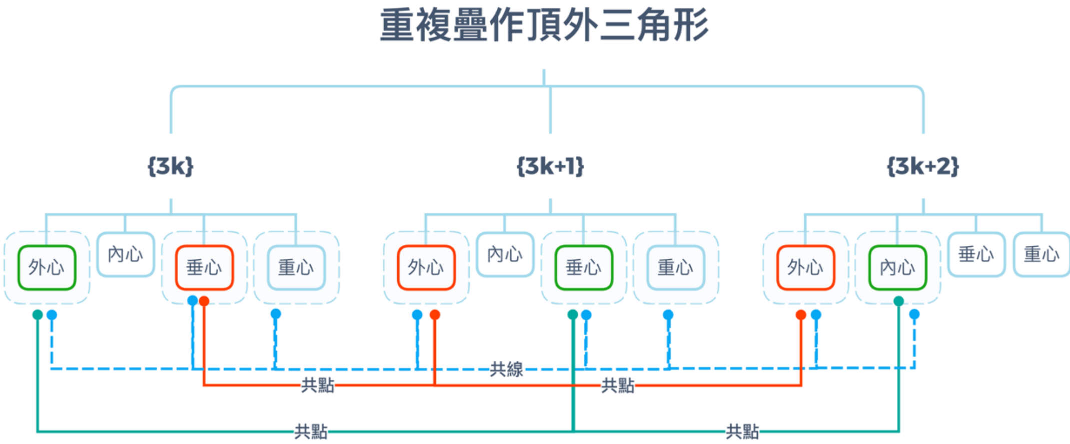
原三角形外心O與A_{3k+1}、B_{3k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

故{3k}外心、{3k+1}頂點、{3k+2}頂點共線

陸、　研究分析與討論

一、　重複疊作頂外三角形各心性質之探討

在角度轉換的證明中，我們發現了以重複疊作頂外三角形有以下性質（表 11）



(表 11)

1. 重複疊作{3k}外心共點
2. {3k}外心、{3k+1}垂心、{3k+2}內心共點
3. {3k}垂心、{3k+1}外心、{3k+2}外心共點
4. {3k}外心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共線

以下我們分別針對上述性質做探討

（一）{3k}外心共點

已知：原三角形ΔABC外心為O，重複疊作第 3k 層三角形為$\Delta A_{3k}B_{3k}C_{3k}$（圖 26）

求證：ΔABC與$\Delta A_{3k}B_{3k}C_{3k}$外心共點

證明：

由角度轉換可知

$\angle A_{3k}B_{3k}O = \angle B_{3k}A_{3k}O = \angle 1$

$\angle B_{3k}C_{3k}O = \angle C_{3k}B_{3k}O = \angle 2$

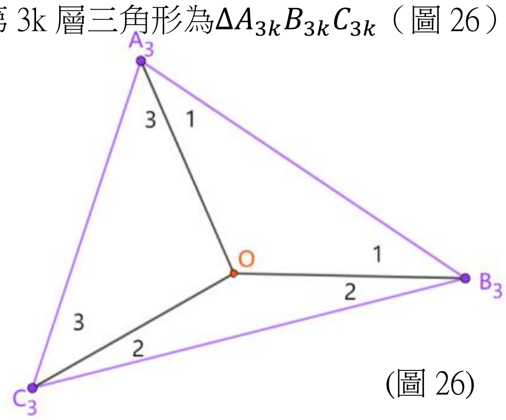
$\angle C_{3k}A_{3k}O = \angle A_{3k}C_{3k}O = \angle 3$

$\Rightarrow \overline{OA_{3k}} = \overline{OB_{3k}} = \overline{OC_{3k}}$

$\therefore \Delta A_{3k}B_{3k}C_{3k}$各邊中垂線過$O$

$\therefore \Delta ABC$與$\Delta A_{3k}B_{3k}C_{3k}$外心共點

故{3k}外心共點



(圖 26)

（二）{3k}外心與{3k+1}垂心共點

以鈍角Δ為例：

已知：原三角形ΔABC外心為O，重複疊作第一層三角形為$\Delta A_1B_1C_1$

重複疊作第一層垂心為H（圖 27）

求證：原三角形外心與重複疊作第一層垂心共點

證明：

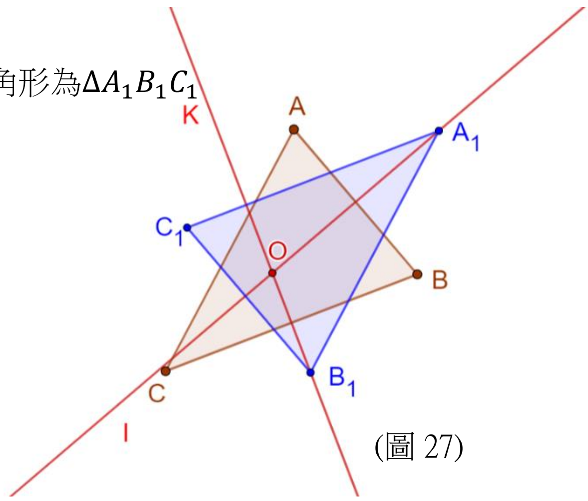
1. 做$\overline{BC}$中垂線k

   $\because O$為ΔABC之外心且四邊形BB_1CO為菱形

   $\therefore k$必過O點及B_1點

   又$\overline{BC}//\overline{A_1C_1}$（前面已證）$\Rightarrow k \perp \overleftrightarrow{A_1C_1}$

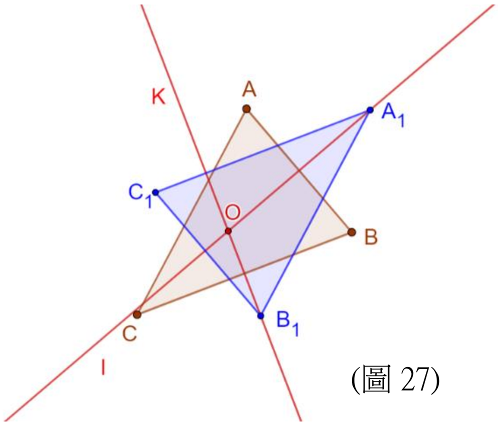
   $\therefore \Delta A_1B_1C_1$中$\overline{A_1C_1}$邊之高必在$k$上



(圖 27)

2. 做$\overline{AB}$中垂線l
同理可證：
$\Delta A_1B_1C_1$中$\overline{B_1C_1}$邊之高必在l上
3. 在ΔABC中k、l交點為外心O
在$\Delta A_1B_1C_1$中k、l交點為垂心H

故原三角形外心O與重複疊作第一層垂心H共點

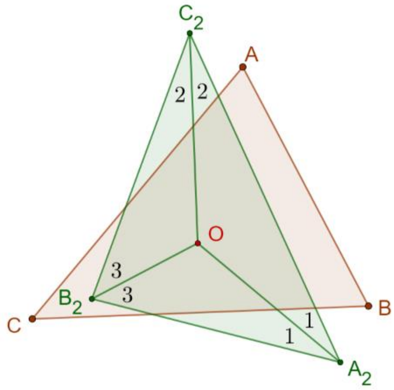


(圖 27)

（三） {3k}外心與{3k+2}內心共點

已知：原三角形ΔABC外心為O，重複疊作第二層為$\Delta A_2B_2C_2$（圖 28）
求證：ΔABC外心與$\Delta A_2B_2C_2$內心共點
證明：

由角度轉換可知：
$\angle OC_2A_2 = \angle OC_2B_2 = \angle 2$
$\angle OA_2C_2 = \angle OA_2B_2 = \angle 1$
$\angle OB_2A_2 = \angle OB_2C_2 = \angle 3$
$\therefore \angle B_2A_2C_2$角平分線過$O$點
$\angle A_2C_2B_2$角平分線過O點
$\Rightarrow \overleftrightarrow{A_2O}$與$\overleftrightarrow{C_2O}$交於$O$點
O為$\Delta A_2B_2C_2$內心
故重複疊作第二層內心和原三角形外心共點



(圖 28)

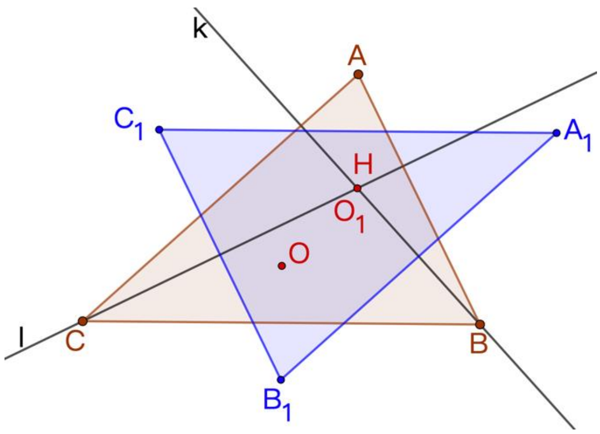
小結論 1：由（二）（三）可得{3k}外心、{3k+1}垂心、{3k+2}內心共點

（四） {3k}垂心與{3k+1}外心共點

以銳角Δ為例：
已知：原三角形ΔABC外心為O，重複疊作第一層三角形為$\Delta A_1B_1C_1$，
垂心為 H，重複疊作第一層外心為O_1（圖 29）
求證：原三角形的垂心和重複疊作第一層的外心共點
證明：

1. 做$\overline{A_1B_1}$中垂線k
$\because \overline{B_1B} = \overline{A_1B}$（$O$為$\Delta ABC$之外心）
$\therefore \Delta BA_1B_1$為等腰三角形
$\because \Delta BA_1B_1$為等腰三角形
$\therefore k$必過B點
又$\overline{AC} // \overline{A_1B_1}$（前面已證）$\Rightarrow k \perp \overline{AC}$
$\therefore k$為ΔABC中$\overline{AC}$的高
且k為$\Delta A_1B_1C_1$中$\overline{A_1B_1}$的中垂線
2. 同理可證：
做$\overline{C_1B_1}$中垂線l
$\therefore$l為ΔABC中$\overline{AB}$的高
且l為ΔCB_1C_1中$\overline{B_1C_1}$的中垂線
3. $\therefore$在ΔABC中k、l交點為垂心H
在$\Delta A_1B_1C_1$中k、l交點為外心O_1

故原三角形的垂心H和重複疊作第一層的外心O_1共點



(圖 29)

（五） {3k+1}外心與{3k+2}外心共點

已知：重複疊作第一層三角形為$\Delta A_1B_1C_1$，重複疊作第二層三角形為$\Delta A_2B_2C_2$
原三角形外心為O（圖 30）

求證：重複疊作第一層Δ與重複疊作第二層Δ外心共點

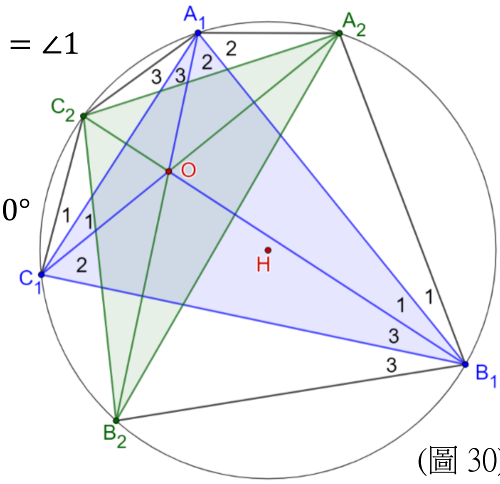
證明：

同 p. 4 證明（圖 3）

令$\angle OA_1C_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OAC = \angle OCA = \angle 3$
$\angle OAB = \angle OBA = \angle OC_1A_1 = \angle OB_1A_1 = \angle 2$
$\angle OBC = \angle OCB = \angle OA_1B_1 = \angle OC_1B_1 = \angle 1$

1. ∵四邊形$A_1OB_1A_2$為箏形
∴$\angle OA_1B_1 = \angle B_2A_1B_1 = \angle 2$、$\angle OB_1A_1 = \angle A_2B_1A_1 = \angle 1$
在四邊形$A_1A_2B_1C_1$中
∵$\angle C_1A_1A_2 = \angle 3 + 2\angle 2$、$\angle A_2B_1C_1 = \angle 3 + 2\angle 1$
又Δ內角和$= 180°$
∴$\angle C_1A_1A_2 + \angle A_2B_1C_1 = 2\angle 3 + 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$
∴A_1、A_2、B_1、C_1四點共圓（對角互補）
2. 同理可證：
A_1、B_1、B_2、C_1四點共圓
A_1、B_1、C_1、C_2四點共圓

由 1.、2.可得A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2六點共圓
故$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta A_2B_2C_2$外心共點



(圖 30)

小結論 2：由（四）、（五）可得{3k}垂心、{3k+1}外心、{3k+2}外心共點

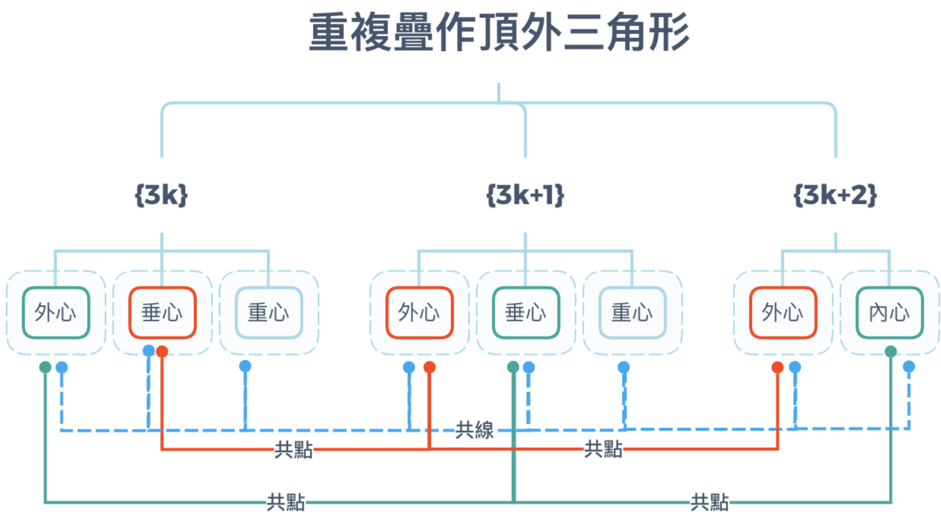
（六） {3k}外心、垂心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共線

我們先討論ΔABC、$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$各心間之關係

已知：原三角形為ΔABC，外心為O，垂心為H，重心為G
重複疊作第一層三角形為$\Delta A_1B_1C_1$，外心為O_1，垂心為H_1，重心為G_1
重複疊作第二層三角形為$\Delta A_2B_2C_2$，外心為O_2，內心為I_2（圖 31）

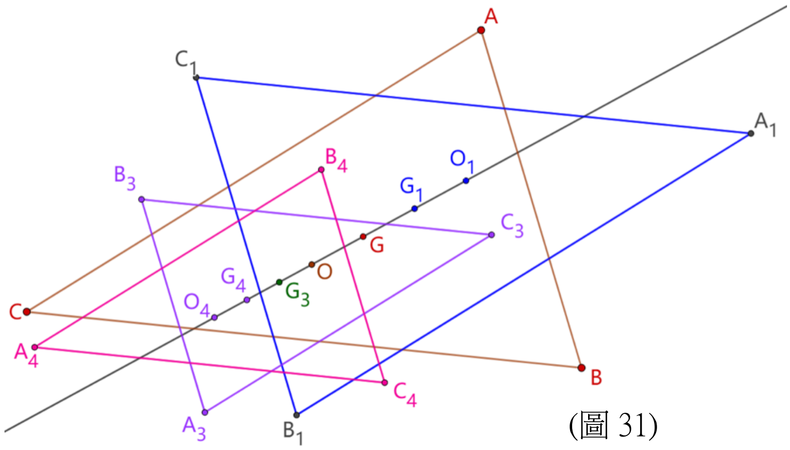
求證：{3k}外心、垂心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共線（表 12）

證明：



(表 12)

1. 由小結論 1 可得O、H_1、I_2共點（上圖綠色實線）
   由小結論 2 可得H、O_1、O_2共點（上圖紅色實線）
2. 已知尤拉線為三角形之重心、垂心、外心共線
   ∴在ΔABC中O、H、G共線
   在$\Delta A_1B_1C_1$中O_1、H_1、G_1共線
   ∵O、H_1共點，H、O_1共點
   故ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$知尤拉線相同
3. 由 1.、2.可得O、H、G、O_1、H_1、G_1、I_2、O_2八點共線



(圖 31)

小結論 3：

由小結論 1 可得{3k}外心、{3k+1}垂心、{3k+2}內心共點
由小結論 2 可得{3k}垂心、{3k+1}外心、{3k+2}外心共點
又已知尤拉線為三角形之重心、垂心、外心共線
可得{3k}外心、垂心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共點

二、 重複疊作頂外 n 邊形性質之探討

經過了重複疊作頂外三角形，我們發現換成 n 邊形也會有一些類似的性質

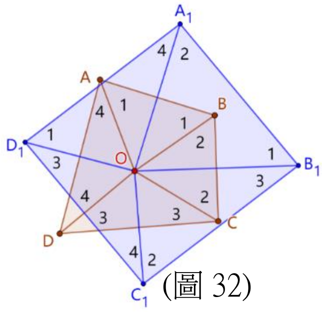
（一） 名詞定義：{nk}、{nk+1}、{nk+2}、……、{nk+（n-1）}定義（$k \in$ 非負整數）

{nk}為所有重複疊作層數除以 n 整除之 n 邊形（原 n 邊形為第零層）
{nk+1}為所有重複疊作層數除以 n 餘一之 n 邊形
{nk+2}為所有重複疊作層數除以 n 餘二之 n 邊形
…………
{nk+（n-1）}為所有重複疊作層數除以 n 餘（n-1）之 n 邊形

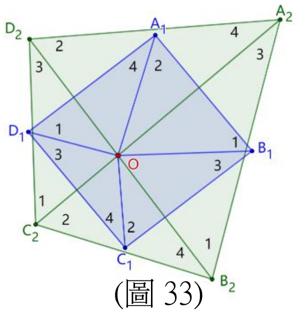
（二） 重複疊作頂外 n 邊形角度轉換之觀察

1. 四邊形至六邊形與重複疊作頂外四邊形至六邊形角度變化之觀察

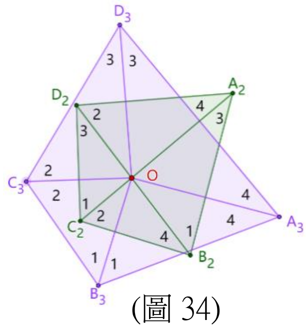
由相同的方法觀察，我們可以發現原四邊形與重複疊作四邊形之角度變化如下（表 13）：



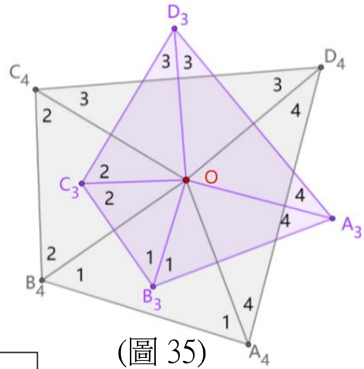
(圖 32)



(圖 33)



(圖 34)



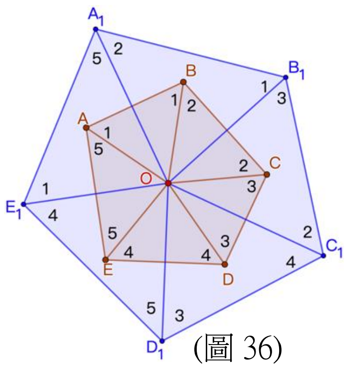
(圖 35)

四邊形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$	$\angle D_n$
原圖	∠4+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	∠3+∠4
第一層	∠4+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	∠3+∠1
第二層	∠4+∠3	∠1+∠4	∠2+∠1	∠3+∠2
第三層	∠4+∠4	∠1+∠1	∠2+∠2	∠3+∠3
第四層	∠4+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	∠3+∠4

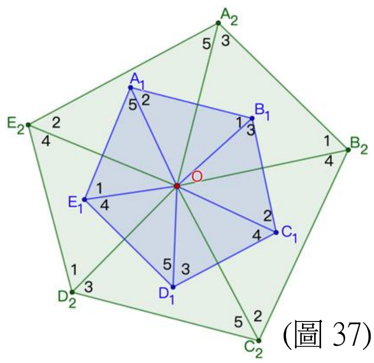
(表 13)

結論：(1)由上表可知經由四次角度轉換之後，第 m 層與第（m+4）層對應角相等
(2)由上表可知重複疊作第一層圖形對角相等

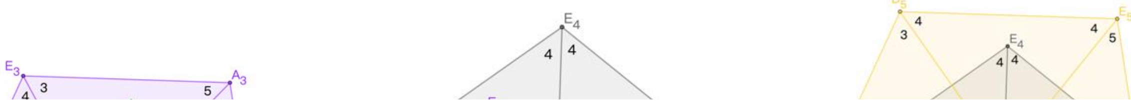
由相同的方法觀察，我們可以發現原五邊形與重複疊作五邊形之角度變化如下（表 14）：



(圖 36)



(圖 37)



五邊形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$	$\angle D_n$	$\angle E_n$
原圖	∠5+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	∠3+∠4	∠4+∠5
第一層	∠5+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	∠3+∠5	∠4+∠1
第二層	∠5+∠3	∠1+∠4	∠2+∠5	∠3+∠1	∠4+∠2
第三層	∠5+∠4	∠1+∠5	∠2+∠1	∠3+∠2	∠4+∠3
第四層	∠5+∠5	∠1+∠1	∠2+∠2	∠3+∠3	∠4+∠4
第五層	∠5+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	∠3+∠4	∠4+∠5

(表 14)

結論：由上表可知經由五次角度轉換之後，第 m 層與第（m+5）層對應角相等

2. 重複疊作頂外 n 邊形角度變化之觀察

經由重複疊作頂外三角形的觀察，我們推廣到 n 邊形，可得角度關係如下（表 15）:

n邊形	第一個角	第二個角	第三個角	…	第(n-1)個角	第n個角
原圖	∠n+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	…	∠(n-2)+∠(n-1)	∠(n-1)+∠n
第一層	∠n+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	…	∠(n-2)+∠n	∠(n-1)+∠1
第二層	∠n+∠3	∠1+∠4	∠2+∠5	…	∠(n-2)+∠1	∠(n-1)+∠n
…	…	…	…	…	…	…
第(n-1)層	∠n+∠n	∠1+∠1	∠2+∠2	…	∠(n-2)+∠(n-2)	∠(n-1)+∠(n-1)
第n層	∠n+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	…	∠(n-2)+∠(n-1)	∠(n-1)+∠n
第(n+1)層	∠n+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	…	∠(n-2)+∠n	∠(n-1)+∠1

結論： (表 15)

由上述的討論與觀察，我們得到以下 2 個性質

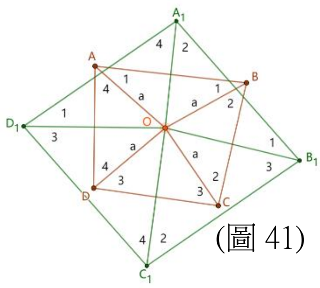
【性質 1】重複疊作頂外 n 邊形，第 m 層與第（m+n）層對應角相等

【性質 2】重複疊作 2m 邊形，第（m-1）層對角相等

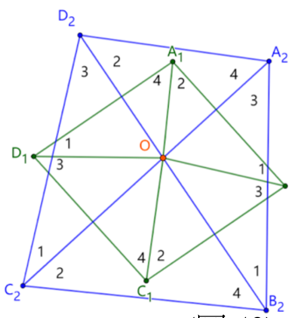
（三） 重複疊作頂外 n 邊形邊長變化之探討

1. 重複疊作頂外四邊形其比例變化之觀察

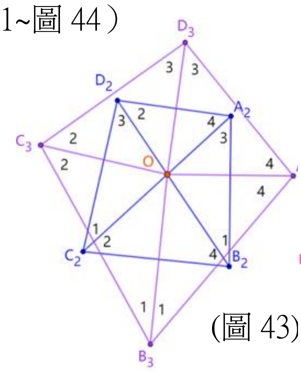
從【性質 1】中，可知四邊形對應角相同（圖 41~圖 44）



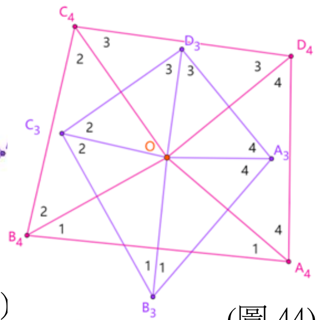
(圖 41)



(圖 42)



(圖 43)



(圖 44)

接下來證明四邊形對應邊成比例

已知： 原四邊形$ABCD$外心為O，其頂外四邊形為$A_1B_1C_1D_1$

求證： 四邊形$A_1B_1C_1D_1$和四邊形$A_4B_4C_4D_4$對應邊成比例

證明：

設$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=a$（外心到頂點等距）

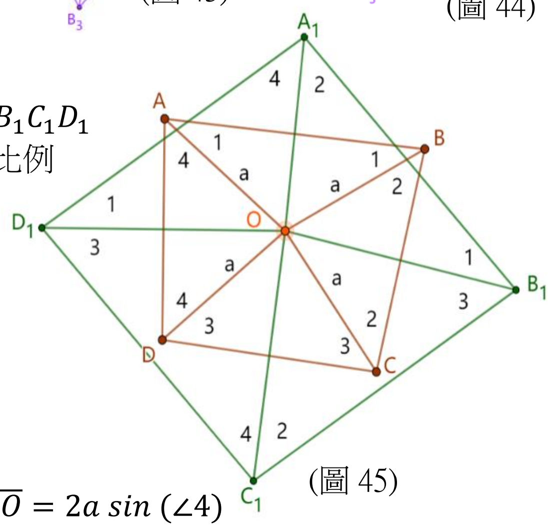
$\angle OAB=\angle OBA=\angle 1$、$\angle OBC=\angle OCB=\angle 2$

$\angle OCD=\angle ODC=\angle 3$、$\angle OAD=\angle ODA=\angle 4$

（1） 求出四邊形各層頂點頂點到O的距離（圖 45）

$\because$四邊形A_1AOB為菱形，$\therefore\overline{AB}$垂直平分$\overline{A_1O}$

$\therefore\overline{A_1O}=2a\sin(\angle 1)$



(圖 45)

同理：$\overline{B_1O}=2a\sin(\angle 2)$、$\overline{C_1O}=2a\sin(\angle 3)$、$\overline{D_1O}=2a\sin(\angle 4)$

再經由運算可知各層邊長同下表：

頂點到外心距離	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	…
$\overline{A_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 1)$	$4a\ \sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$	$8a\ \sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$	$16\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	…
$\overline{B_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 2)$	$4a\ \sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$	$8a\ \sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	$16\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	…
$\overline{C_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 3)$	$4a\ \sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	$8a\ \sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 1)$	$16\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	…
$\overline{D_mO}$	a	$2a\ \sin(\angle 4)$	$4a\ \sin(\angle 4)\sin(\angle 1)$	$8a\ \sin(\angle 4)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$	$16\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	…

(表 16)

設$K_4=\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$

（2） $\because \Delta A_1OD_1$內角和$=180°$（圖 46）

$\therefore \angle A_1OD_1 = 180° - (\angle 1 + \angle 4)$

$\Rightarrow sin(\angle A_1OD_1) = sin\,[180 - (\angle 1 + \angle 4)] = sin(\angle 1 + \angle 4)$

$\because \dfrac{\overline{A_1D_1}}{sin(\angle 1+\angle 4)} = 2a$（正弦定理）

$\therefore \overline{A_1D_1} = 2a\ sin(\angle 1 + \angle 4)$

同理：

$\overline{A_1B_1} = 2a\ sin\,(\angle 1 + \angle 2)$

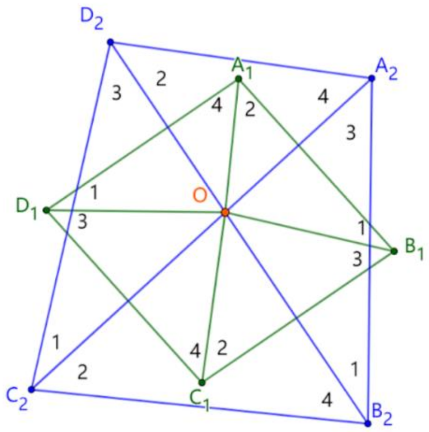
$\overline{B_1C_1} = 2a\ sin\,(\angle 2 + \angle 3)$

$\overline{C_1D_1} = 2a\ sin\,(\angle 3 + \angle 4)$

$\because$四邊形$B_1A_2A_1O$為箏形

$\therefore \overline{A_2B_2} = 2\,\overline{B_1O}\,sin(\angle 1 + \angle 3) = 4a\ sin\,(\angle 2) sin(\angle 1 + \angle 3)$

再經運算可知各層邊長同下表（表 17）



(圖 46)

邊長	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	…
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle 1)$	$2a\ sin(\angle 1+\angle 2)$	$4a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3+\angle 1)$	$8a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 4+\angle 1)$	$16a\ sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 4)\,sin(\angle 4+\angle 4)$	…
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle 2)$	$2a\ sin(\angle 2+\angle 3)$	$4a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 2+\angle 4)$	$8a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 4)\,sin(\angle 2+\angle 1)$	$16a\ sin(\angle 3)\,sin(\angle 4)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 1+\angle 1)$	…
$\overline{C_mD_m}$	$2a\ cos(\angle 3)$	$2a\ sin(\angle 3+\angle 4)$	$4a\ sin(\angle 4)\,sin(\angle 3+\angle 1)$	$8a\ sin(\angle 4)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2+\angle 3)$	$16a\ sin(\angle 4)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 2+\angle 2)$	…
$\overline{D_mA_m}$	$2a\ cos(\angle 4)$	$2a\ sin(\angle 1+\angle 4)$	$4a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2+\angle 4)$	$8a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 4+\angle 3)$	$16a\ sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 3+\angle 3)$	…

(表 17)

$$\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{16a\,sin(\angle 1+\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin(\angle 4)}{2a\,cos(\angle 1)}$$

$$= \frac{32a\,cos(\angle 1)\,sin(\angle 1)\,sin(\angle 2)\,sin(\angle 3)\,sin\,(\angle 4)}{2a\,cos\,(\angle 1)} = 16K_4$$

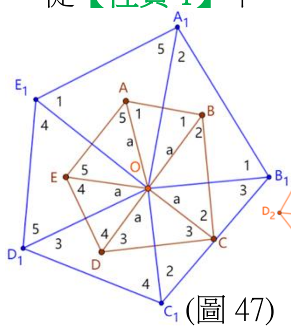
（3） 同理：

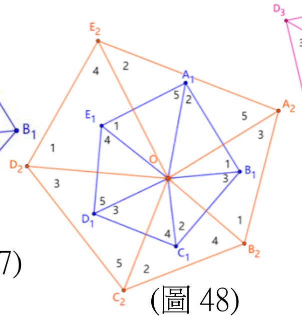
$$\frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{C_4D_4}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{D_4E_4}}{\overline{D_1E_1}} = \frac{\overline{E_4A_4}}{\overline{E_1A_1}} = 16K_4$$

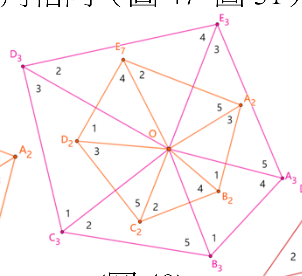
結論：第 m 層與第（m+4）層對應邊比例為$16K_4$，又對應角相等，故相似。

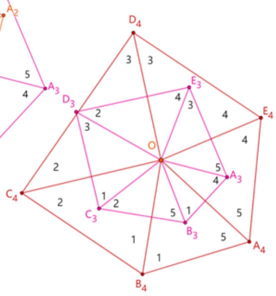
2. 重複疊作頂外五邊形其比例變化之觀察

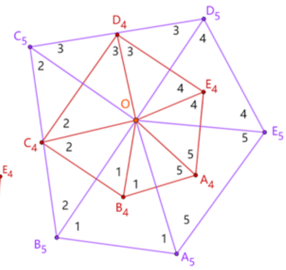
從【性質 1】中，可知五邊形對應角相同（圖 47~圖 51）


(圖 47)


(圖 48)


(圖 49)


(圖 50)


(圖 51)

接下來證明五邊形對應邊成比例

已知：O為原五邊形外心，五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$為其頂外五邊形

求證：五邊形$A_1B_1C_1D_1E_1$和五邊形$A_5B_5C_5D_5E_5$邊長成比例

證明：

設$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=\overline{EO}=a$

$\angle OAB=\angle OBA=\angle 1$，$\angle OBC=\angle OCB=\angle 2$，$\angle OCD=\angle ODC=\angle 3$

$\angle ODE=\angle OED=\angle 4$，$\angle OEA=\angle OAE=\angle 5$

（1） ∵四邊形A_1AOB為菱形（圖 52）

∴$\overline{AB}$垂直平分$\overline{A_1O}$

∴$\overline{A_1O}=2a\sin(\angle 1)$

同理：

$\overline{B_1O}=2a\sin(\angle 2)$

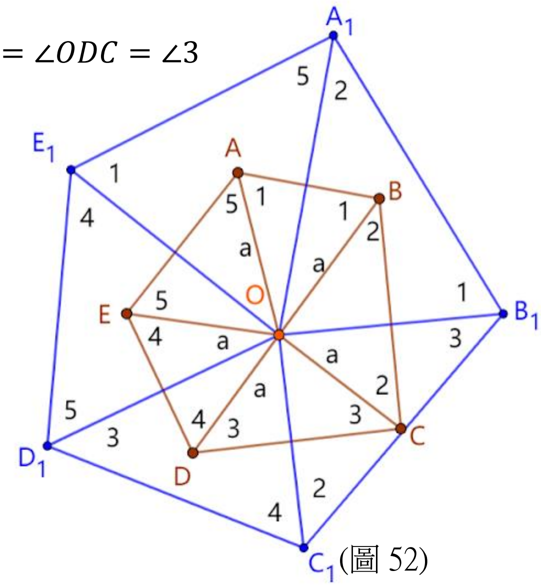
$\overline{C_1O}=2a\sin(\angle 3)$

$\overline{D_1O}=2a\sin(\angle 4)$

$\overline{E_1O}=2a\sin(\angle 5)$

$\overline{A_2O}=2\,\overline{A_1O}\sin(\angle 2)=2\cdot 2a\sin(\angle 1)\cdot\sin(\angle 2)$

$=4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$



(圖 52)

經由運算可得知各層頂點到外心距離如下表（表 18）

頂點到外心的距離	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	…
$\overline{A_mO}$	a	$2a\sin(\angle 1)$	$4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$	$8a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$	$8a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	$32\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	…
$\overline{B_mO}$	a	$2a\sin(\angle 2)$	$4a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$	$8a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	$8a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	$32\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	…
$\overline{C_mO}$	a	$2a\sin(\angle 3)$	$4a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)$	$8a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	$8a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)$	$32\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	…
$\overline{D_mO}$	a	$2a\sin(\angle 4)$	$4a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	$8a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)$	$8a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$	$32\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	…
$\overline{E_mO}$	a	$2a\sin(\angle 5)$	$4a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)$	$8a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)$	$8a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)$	$32\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$	…

設$K_5=\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)$

(表 18)

（2） ∵ΔA_1OE_1內角和$=180°$

∴$\angle A_1OE_1=180-(\angle 1+\angle 5)$

⇒$\sin(\angle A_1OD_1)=\sin[180-(\angle 1+\angle 5)]=\sin(\angle 1+\angle 5)$

∵$\dfrac{\overline{A_1E_1}}{\sin(\angle 1+\angle 5)}=2a$（正弦定理）

∴$\overline{A_1E_1}=2a\sin(\angle 1+\angle 5)$

同理：

$\overline{A_1B_1}=2a\sin(\angle 1+\angle 2)$

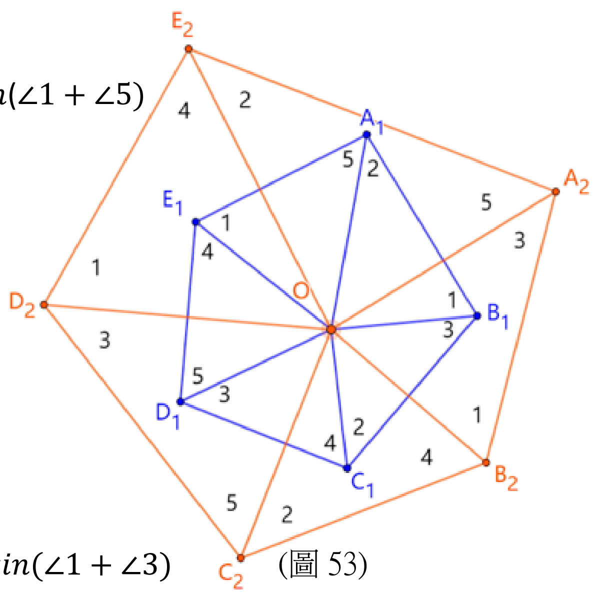
$\overline{B_1C_1}=2a\sin(\angle 3+\angle 2)$

$\overline{C_1D_1}=2a\sin(\angle 3+\angle 4)$

$\overline{D_1E_1}=2a\sin(\angle 4+\angle 5)$

∵四邊形$B_1A_2A_1O$為箏形（圖 53）

∴$\overline{A_2B_2}=2\,\overline{B_1O}\sin(\angle 1+\angle 3)=4a\sin(\angle 2)\sin(\angle 1+\angle 3)$



(圖 53)

再經運算可知各層邊長同下表（表 19）

邊長	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	...
$\overline{A_mB_m}$	$2\cos(\angle 1)$	$2a\sin(\angle 1+\angle 2)$	$4a\sin(\angle 2)\sin(\angle 1+\angle 3)$	$8a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 1+\angle 4)$	$16a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 1+\angle 5)$	$32a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1+\angle 1)$	...
$\overline{B_mC_m}$	$2\cos(\angle 2)$	$2a\sin(\angle 2+\angle 3)$	$4a\sin(\angle 3)\sin(\angle 2+\angle 4)$	$8a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 2+\angle 5)$	$16a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 2+\angle 1)$	$32a\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2+\angle 2)$	...
$\overline{C_mD_m}$	$2\cos(\angle 3)$	$2a\sin(\angle 3+\angle 4)$	$4a\sin(\angle 4)\sin(\angle 3+\angle 5)$	$8a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 3+\angle 1)$	$16a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 3+\angle 2)$	$32a\sin(\angle 4)\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3+\angle 3)$	...
$\overline{D_mE_m}$	$2\cos(\angle 4)$	$2a\sin(\angle 4+\angle 5)$	$4a\sin(\angle 5)\sin(\angle 4+\angle 1)$	$8a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 4+\angle 2)$	$16a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 4+\angle 3)$	$32a\sin(\angle 5)\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4+\angle 4)$	...
$\overline{E_mA_m}$	$2\cos(\angle 5)$	$2a\sin(\angle 5+\angle 1)$	$4a\sin(\angle 1)\sin(\angle 5+\angle 2)$	$8a\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5+\angle 3)$	$16a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 5+\angle 4)$	$32a\sin(\angle 1)\sin(\angle 2)\sin(\angle 3)\sin(\angle 4)\sin(\angle 5+\angle 5)$	

(表 19)

結論：第 m 層與第（m+5）層對應邊比例為$32K_5$，又對應角相等，故相似。

3. 重複疊作頂外 n 邊形第 m 層與第（m+n）層其比例變化之觀察

經由 n 次角度轉換之後，可知對應角相等
同理，和重複疊作四邊形、五邊形方法相同，
可知原 n 邊形與重複疊作第 n 層邊長比為2^nK_n

結論：重複疊作頂外 n 邊形第 m 層與第（m+n）層對應邊成比例，又對應角相等，故相似。

（四） 重複疊作{nk}外心共點

1. 重複疊作{4k}外心共點

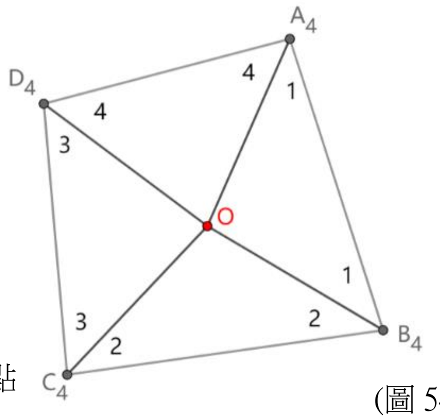
已知：原四邊形為$ABCD$為O，重複疊作第 4k 層四邊形為$A_{4k}B_{4k}C_{4k}D_{4k}$（圖 54）

求證：四邊形$ABCD$與四邊形$A_{4k}B_{4k}C_{4k}D_{4k}$外心共點

證明：

由角度轉換可知

$\angle A_{4k}B_{4k}O=\angle B_{4k}A_{4k}O=\angle 1$
$\angle B_{4k}C_{4k}O=\angle C_{4k}B_{4k}O=\angle 2$
$\angle C_{4k}D_{4k}O=\angle D_{4k}C_{4k}O=\angle 3$
$\angle D_{4k}A_{4k}O=\angle A_{4k}D_{4k}O=\angle 4$
$\Rightarrow \overline{OA_{4k}}=\overline{OB_{4k}}=\overline{OC_{4k}}=\overline{OD_{4k}}$
$\because O$點到各頂點距離相等
$\therefore O$為$A_{4k}B_{4k}C_{4k}D_{4k}$的外心
故四邊形$ABCD$與四邊形$A_{4k}B_{4k}C_{4k}D_{4k}$外心共點



(圖 54)

2. 重複疊作{nk}外心共點

已知：原 n 邊形為$ABCD\cdots$，重複疊作第 nk 層 n 邊形為$A_{nk}B_{nk}C_{nk}D_{nk}\cdots$原 n 邊形外心為$O$

求證：$ABCD\cdots$與$A_{nk}B_{nk}C_{nk}D_{nk}\cdots$外心共點

證明：

由角度轉換可知

$\angle A_{nk}B_{nk}O=\angle B_{nk}A_{nk}O=\angle 1$
$\angle B_{nk}C_{nk}O=\angle C_{nk}B_{nk}O=\angle 2$
$\angle C_{nk}D_{nk}O=\angle D_{nk}C_{nk}O=\angle 3$
$\angle D_{nk}A_{nk}O=\angle A_{nk}D_{nk}O=\angle 4$
………………

$\Rightarrow \overline{OA_{nk}} = \overline{OB_{nk}} = \overline{OC_{nk}} = \overline{OD_{nk}} = \cdots\cdots$
$\because O$點到各頂點距離相等
$\therefore O$為$A_{nk}B_{nk}C_{nk}D_{nk}\cdots\cdots$的外心
$\therefore$原 n 邊形$ABCD\cdots\cdots$與 n 邊形$A_{nk}B_{nk}C_{nk}D_{nk}\cdots\cdots$外心共點

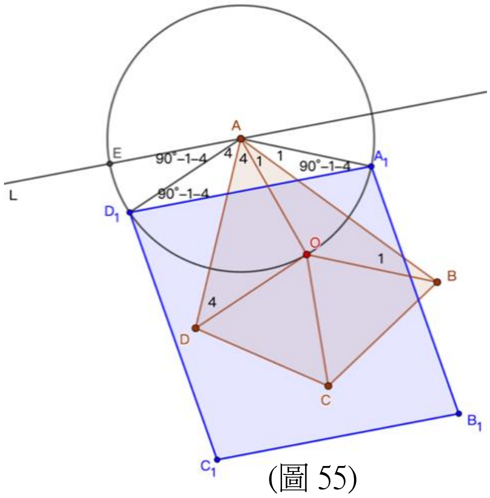
（五） 重複疊作 n 邊形第 k 層與第（k+n）層對應邊平行

發現第 k 層與第（k+n）層相似的過程中，還發現第 k 層與第（k+n）層的對應邊會互相平行

1. 重複疊作頂外四邊形第 k 層與第（k+4）層對應邊平行

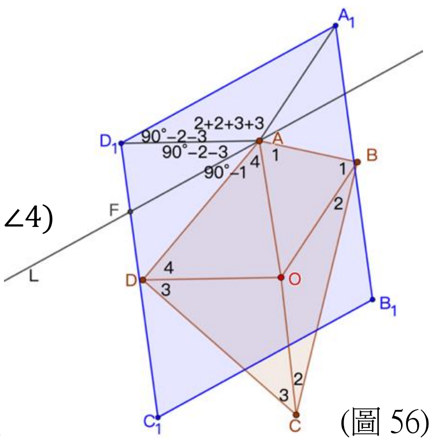
以{4k}為例：
已知：原四邊形為$ABCD$外心為O，重複疊作第四層四邊形為$A_4B_4C_4D_4$
求證：{4k}對應邊平行
證明：

（1） 當A點在四邊形$A_1B_1C_1D_1$外（圖 55）
過A點做$\overline{A_1D_1}$之平行線L
$\because$四邊形$AODD_1$和AA_1BO為菱形
$\therefore \angle BAA_1 = \angle BAO = \angle 1$
$\angle DAO = \angle DAD_1 = \angle 4$
$\because \Delta AD_1A_1$內角和$= 180°$且$\overline{AD_1} = \overline{AA_1}$
$\therefore \angle AD_1A_1 = \angle AA_1D_1$
又$L // \overline{A_1D_1}$，$\therefore \angle EAD_1 = 90° - \angle 1 - \angle 4$
$\therefore \angle EAD = 90° - \angle 1$



(圖 55)

（2） 當A點在四邊形$A_1B_1C_1D_1$內（圖 56）
過A點做$\overline{A_1D_1}$之平行線L
$\because$四邊形$AODD_1$和AA_1BO為菱形
$\therefore \angle BAA_1 = \angle BAO = \angle 1$
$\angle DAO = \angle DAD_1 = \angle 4$
$\because$四邊形ABCD內角和$= 360° = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$
且$\angle D_1AO + \angle A_1AO + \angle A_1AD_1$=360°
$\therefore \angle A_1AD_1 = 360° - 2(\angle 1 + \angle 4) = 2(\angle 2 + \angle 3)$
又$\overline{D_1A} = \overline{A_1A}$且$\Delta A_1D_1A$ 內角和 $= 180°$
$\therefore \angle A_1D_1A = 180° - 2(\angle 2 + \angle 3) = 90° - \angle 2 - \angle 3$
$\because \overline{A_1D_1} // L$，$\therefore \angle A_1D_1A = \angle D_1AF = 90° - \angle 2 - \angle 3$
$\therefore \angle FAD = \angle 4 - (90° - \angle 2 - \angle 3)$
$= \angle 4 - (90° - \angle 2 - \angle 3) - (180° - \angle 1 - \angle 2 - \angle 3 - \angle 4)$=$90° - \angle 1$



(圖 56)

由（1）、（2）可知$\overline{AD}$、$\overline{A_1D_1}$之夾角為$90° - \angle 1$
同理可得下表（表 20）

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	…
$\overline{D_mA_m}$與$\overline{D_{m+1}A_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	…
$\overline{A_mB_m}$與$\overline{A_{m+1}B_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 1$	…
$\overline{B_mC_m}$與$\overline{B_{m+1}C_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	…
$\overline{C_mD_m}$與$\overline{C_{m+1}D_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	…

(表 20)

$\therefore \overline{DA}$ 、$\overline{D_4A_4}$轉$(90° - \angle 1) + (90° - \angle 2) + (90° - \angle 3) + (90° - \angle 4)$
$= 360° - 180° = 180°$

$\therefore \overline{DA} // \overline{D_4A_4}$

同理可證：$\overline{AB} // \overline{A_4B_4}$
$\overline{BC} // \overline{B_4C_4}$
$\overline{CD} // \overline{C_4D_4}$

故原四邊形和重複疊作第四層對應邊平行

又任意一邊連續旋轉四次之夾角為$360° - 180° = 180°$

$\therefore \overline{A_kB_k} // \overline{A_{k+4}B_{k+4}}$
$\overline{B_kC_k} // \overline{B_{k+4}C_{k+4}}$
$\overline{C_kD_k} // \overline{C_{k+4}D_{k+4}}$
$\overline{D_kA_k} // \overline{D_{k+4}A_{k+4}}$

$\therefore$重複疊作頂外四邊形第 k 層和第 k+4 層對應邊平行

2. {4k}與{4k+2}對應邊平行

研究過程中我們發現{4k}與{4k+2}對應邊平行

已知：原四邊形為$ABCD$外心為O，重複疊作第二層為$A_2B_2C_2D_2$，
$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的夾角為$\angle 1 + \angle 4$（圖 57）

求證：{4k}與{4k+2}對應邊平行

證明：

$\because$從$\overline{AB}$到$\overline{A_2B_2}$需要順時針轉$(90° - \angle 2) + (90° - \angle 3)$

又$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的夾角為$\angle 1 + \angle 4$

$\therefore \overline{AD}$和$\overline{A_2B_2}$轉$(90° - \angle 2) + (90° - \angle 3) - (\angle 1 + \angle 4) = 0°$

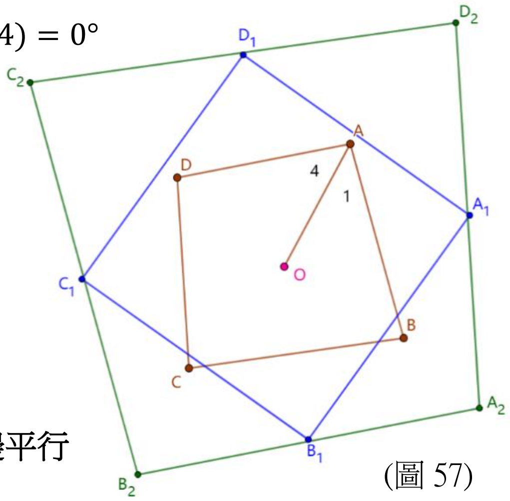
$\therefore \overline{AD} // \overline{A_2B_2}$

同理可證：
$\overline{AB} // \overline{C_2B_2}$
$\overline{BC} // \overline{A_2D_2}$

$\because${4k}外心共點

不失一般性，同理可證

故{4k}與{4k+2}對應邊平行



(圖 57)

3. 重複疊作頂外五邊形第 k 層與第（k+5）層對應邊平行

用上述 1.方法可得表（表 21）

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	…
$\overline{E_mA_m}$與$\overline{E_{m+1}A_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 5$	…
$\overline{A_mB_m}$與$\overline{A_{m+1}B_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 5$	$90° - \angle 1$	…
$\overline{B_mC_m}$與$\overline{B_{m+1}C_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 5$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	…
$\overline{C_mD_m}$與$\overline{C_{m+1}D_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 4$	$90° - \angle 5$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	…
$\overline{D_mE_m}$與$\overline{D_{m+1}E_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 5$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 4$	…

(表 21)

故$\overline{A_kB_k} // \overline{A_{k+5}B_{k+5}}$
$\overline{B_kC_k} // \overline{B_{k+5}C_{k+5}}$
$\overline{C_kD_k} // \overline{C_{k+5}D_{k+5}}$
$\overline{D_kE_k} // \overline{D_{k+5}E_{k+5}}$

$\overline{E_kA_k}//\overline{E_{k+5}A_{k+5}}$

∴重複疊作頂外五邊形第 k 層與第（k+5）層對應邊平行

4. 重複疊作頂外 n 邊形第 k 層與第（k+n）層對應邊平行

由 1.、2.、3.方法推論可知

$\overline{A_kB_k}//\overline{A_{k+n}B_{k+n}}$

$\overline{B_kC_k}//\overline{B_{k+n}C_{k+n}}$

$\overline{C_kD_k}//\overline{C_{k+n}D_{k+n}}$

…………………………

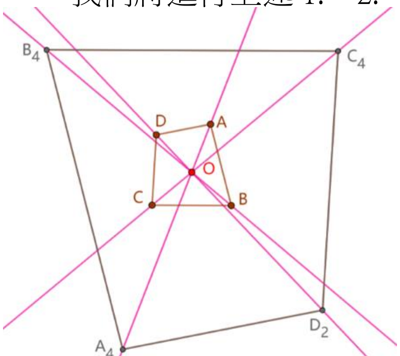
故重複疊作頂外 n 邊形第 k 層與第（k+n）層對應邊平行

（六） 原 n 邊形外心與重複疊作頂外 n 邊形頂點共線關係之探討

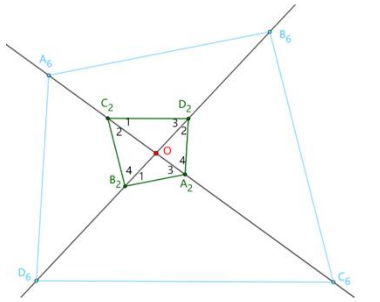
在研究過程中，我們發現原三角形外心與重複疊作頂外三角形其中一頂點共線之關係如下：

1. {4k}頂點、外心共線（圖 58）
2. {4k}外心、{4k+2}頂點共線（圖 59）
3. {4k}外心、{4k+1}頂點、{4k+3}頂點共線（圖 60）

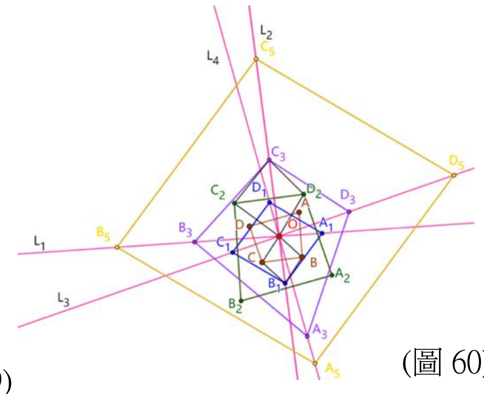
我們將進行上述 1.、2.、3.性質之探討



(圖 58)



(圖 59)



(圖 60)

1. {4k}頂點、外心共線

已知： 重複疊作第 k 層四邊形為$A_kB_kC_kD_k$，原四邊形外心為O（圖 61）

求證： {4k}頂點、外心共線

證明：

（1） ∵$\overline{AB}//\overline{A_4B_4}$且$\angle ABO=\angle A_4B_4O$

∴B、O、B_4共線（方法同前面證明 p.12）

（2） 同理可證：A、O、A_4共線

C、O、C_4共線

D、O、D_4共線

（3） ∵{4k}外心共點

不失一般性，同理可證

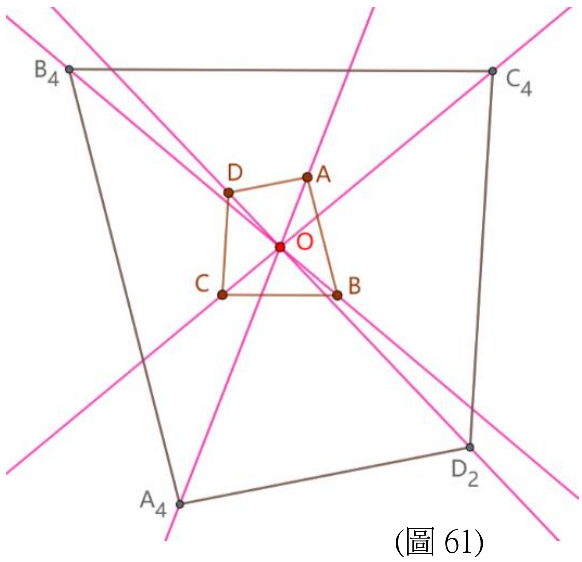
外心O與A、A_{4k}共線（$k\in$非負整數）

外心O與B、B_{4k}共線（$k\in$非負整數）

外心O與C、C_{4k}共線（$k\in$非負整數）

外心O與D、D_{4k}共線（$k\in$非負整數）

故{4k}頂點、外心共線



(圖 61)

2. {4k}外心、{4k+2}頂點共線

已知： 重複疊作第 k 層四邊形為$A_{4k+2}B_{4k+2}C_{4k+2}D_{4k+2}$，原四邊形外心為$O$（圖 62）

求證： {4k}外心、{4k+2}頂點共線

證明：

（1） $\because \overline{A_2B_2}//\overline{A_6B_6}$且$\angle A_2B_2O = \angle A_6B_6O$

$\therefore B_2$、O、B_6共線（方法同前面證明 p.12）

同理可證：A_2、O、A_6共線

C_2、O、C_6共線

D_2、O、D_2共線

（2） 又$\angle B_2OA_2 + \angle D_2OA_2$

$= (180° - \angle 1 - \angle 3) + (180° - \angle 2 - \angle 4)$

$= 180°$

$\therefore B_2$、O、D_2共線

$\therefore B_2$、O、B_6、D_2、D_6共線

同理：A_2、O、A_6、C_2、C_6共線

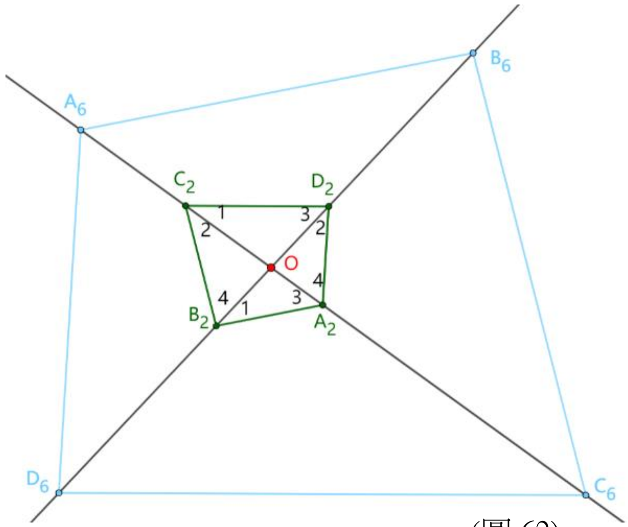
（3） $\because${4k}外心共點

不失一般性，同理可證

外心O與A_{4k+2}、C_{4k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與B_{4k+2}、D_{4k+2}共線（$k \in$ 非負整數）

故{4k}外心、{4k+2}頂點共線



(圖 62)

3. {4k}外心、{4k+1}頂點、{4k+3}頂點共線

已知： 原四邊形$ABCD$，重複疊作第一層四邊形為$A_1B_1C_1D_1$

重複疊作第二層四邊形為$A_2B_2C_2D_2$，重複疊作第三層四邊形為$A_3B_3C_3D_3$

{4k}、{4k+2}對應邊平行（圖 63）

求證： {4k}外心、{4k+1}頂點、{4k+3}頂點共線

證明：

（1） $\because$四邊形OBB_1C和$OC_2C_3D_2$為箏形

$\therefore \overline{C_3O} \perp \overline{C_2D_2}$，$\overline{B_1O} \perp \overline{CB}$

又$\overline{C_2D_2}//\overline{CB}$

$\therefore B_1$、O、C_3共線於L_2

同理：A_3、O、D_1共線於L_4

A_1、O、B_3共線於L_1

C_1、O、D_3共線於L_3

（2） $\because${4k}外心共點

不失一般性，同理可證

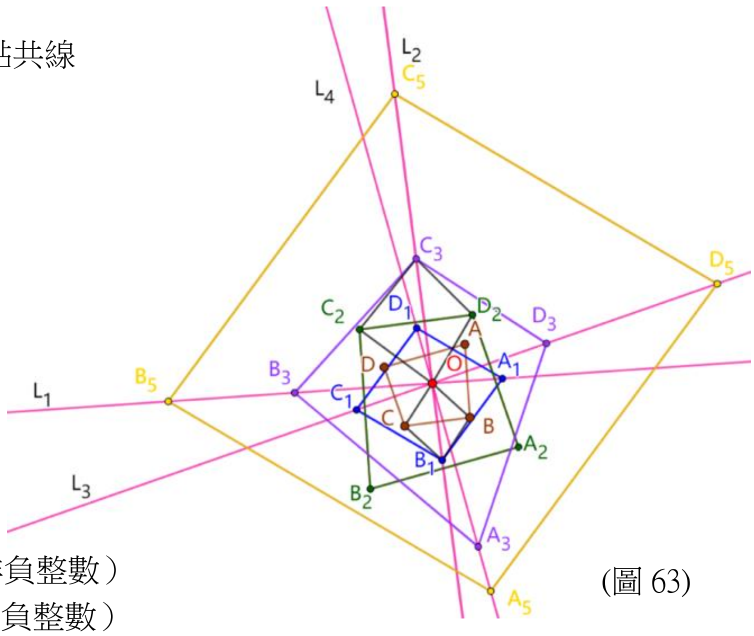
外心O與A_{4k+1}、B_{4k+3}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與B_{4k+1}、C_{4k+3}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與C_{4k+1}、D_{4k+3}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與A_{4k+3}、D_{4k+1}共線（$k \in$ 非負整數）

故{4k}外心、{4k+1}頂點、{4k+3}頂點共線



(圖 63)

我們由 1.、2.、3.證明推論以下性質

4. [{nk}頂點、外心共線]、[{nk+1}頂點、{nk}外心]⋯、[{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線

已知：{nk}、{nk+1}、⋯、{nk+(n-1)}對應邊平行

求證：[{nk}頂點、{nk}外心]、[{nk+1}頂點、{nk}外心]⋯⋯、[{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線

證明：

（1） $\because \overline{A_kB_k} / / \overline{A_{k+4}B_{k+4}}$且$\angle A_kB_kO = \angle A_{k+4}B_{k+4}O$

$\therefore B_k$、O、B_{k+4}共線（方法同前面證明 p.12）

同理可證：A_k、O、A_{k+4}共線

C_k、O、C_{k+4}共線

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

（2） ∵{nk}外心共點

不失一般性，同理可證

外心O與A_k、A_{4k+4}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與B_k、B_{4k+4}共線（$k \in$ 非負整數）

外心O與C_k、C_{4k+4}共線（$k \in$ 非負整數）

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

故[{nk}頂點、{nk}外心]、[{nk+1}頂點、{nk}外心]⋯⋯、[{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線

三、 特殊多邊形之特殊性質之探討

（一） 探討重複疊作偶數邊形對邊平行之性質

在探討過程中我們發現 2m 邊形之間有對邊平行的關係，接下來我們針對四邊形、六邊形、八邊形⋯⋯進行探討。

1. 重複疊作第一層四邊形各組對邊平行

已知：重複疊作第一層四邊形為$A_1B_1C_1D_1$，原四邊形外心為O（圖 64）

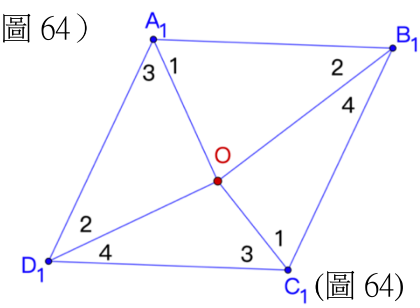
求證：重複疊作第一層四邊形各組對邊平行

證明：

由角度轉換可知重複疊作第一層四邊形兩組對角相等

∴重複疊作第一層四邊形為平行四邊形

∴重複疊作第一層四邊形兩組對邊平行



(圖 64)

2. 重複疊作第二層六邊形各組對邊平行

已知：重複疊作第二層六邊形為$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，原六邊形外心為O

求證：重複疊作第二層六邊形各組對邊平行

證明：由【性質 2】可知重複疊作頂外六邊形之角度（圖 65）

設$\angle OA_2D_2 = x°$，$\angle B_2A_2D_2 = \angle 3 - x°$

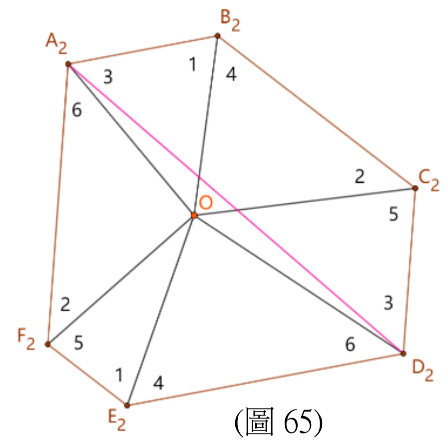
$\therefore \angle OD_2A_2 = 180° - x° - \angle A_2OD_2$

$= 180° - x° - [540° - (2\angle 3 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 5)]$

∵六邊形內角和$= 720° = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6)$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$

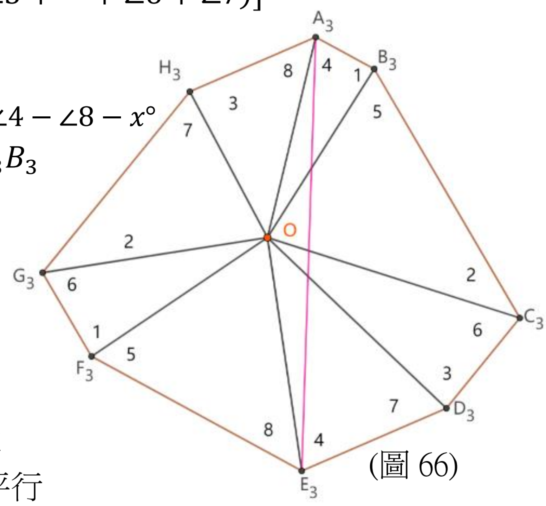
$\therefore \angle OD_2A_2 = 180° - x° - [540° - (\angle 3 + 360° - \angle 6)] = \angle 3 - \angle 6 - x°$
$\therefore \angle A_2D_2E_2 = \angle 6 + (\angle 3 - \angle 6 - x°) = \angle 3 - x° = \angle B_2A_2D_2$
$\therefore \overline{A_2B_2} // \overline{E_2D_2}$（內錯角相等）
同理可證：$\overline{A_2F_2} // \overline{C_2D_2}$，$\overline{F_2E_2} // \overline{B_2C_2}$
故重複疊作第二層六邊形各組對應邊平行



(圖 65)

3. **重複疊作第三層八邊形各組對邊平行**

已知：重複疊作第三層八邊形為$A_3B_3C_3D_3E_3F_3G_3H_3$，原八邊形外心為O
求證：重複疊作第三層八邊形各組對邊平行
證明：由【性質 2】可知重複疊作頂外八邊形之角度如（圖 66）
設$\angle OA_3E_3 = x°$，$\angle B_3A_3E_3 = \angle 4 - x°$
$\angle A_3OE_3 = 180° - x° - [180° \times 4 - (\angle 4 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \cdots + \angle 6 + \angle 7)]$
$\because$八邊形內角和$= 1080° = 2(\angle 1 + \angle 2 + \cdots + \angle 8)$
$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \cdots + \angle 8 = 540°$
$\therefore \angle A_3OE_3 = 180° - x° - [180° \times 4 - (540° + \angle 4 - \angle 8)] = \angle 4 - \angle 8 - x°$
$\therefore \angle A_3E_3F_3 = \angle 8 + (\angle 4 - \angle 8 - x°) = \angle 4 - x° = \angle E_3A_3B_3$
$\therefore \overline{A_3B_3} // \overline{F_3E_3}$（內錯角相等）
同理：
$\overline{B_3C_3} // \overline{G_3F_3}$，$\overline{C_3D_3} // \overline{H_3G_3}$，$\overline{D_3E_3} // \overline{H_3A_3}$
故重複疊作第三層八邊形各組對應邊平行



(圖 66)

4. **重複疊作偶數邊形各組對邊平行**

由【性質 2】可知重複疊作 2m 邊形第（m-1）層對角相等
在用上述相同之方法，可知 2m 邊形第（m-1）層對應邊平行

（二） 探討重複疊作 4m 邊形頂點共圓之性質

當 n=4m 時，4m 邊形，第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層同方位頂點會共圓

已知：原四邊形為四邊形$ABCD$，重複疊作第一層為四邊形$A_1B_1C_1D_1$，
重複疊作第三層為四邊形$A_3B_3C_3D_3$，重複疊作第五層為四邊形$A_5B_5C_5D_5$
重複疊作第七層為四邊形$A_7B_7C_7D_7$，O、C_1、D_7共線，O、B_3、A_5共線
四邊形$ABCD$之外接圓半徑為a
$x_4 = sin(\angle 1)sin(\angle 2)sin(\angle 3)sin(\angle 4)$

求證：C_1、B_3、A_5、D_7四點共圓
D_1、C_3、B_5、A_7四點共圓
A_1、D_3、C_5、B_7四點共圓
B_1、A_3、D_5、C_7四點共圓（圖 68）

證明：

同 p.19~ p.20 邊長比例中，頂點到外心距離之證明

設$\angle B_1C_1B_3 = x°$

$\because \overline{C_1O} = 2a\ sin(\angle 3)$

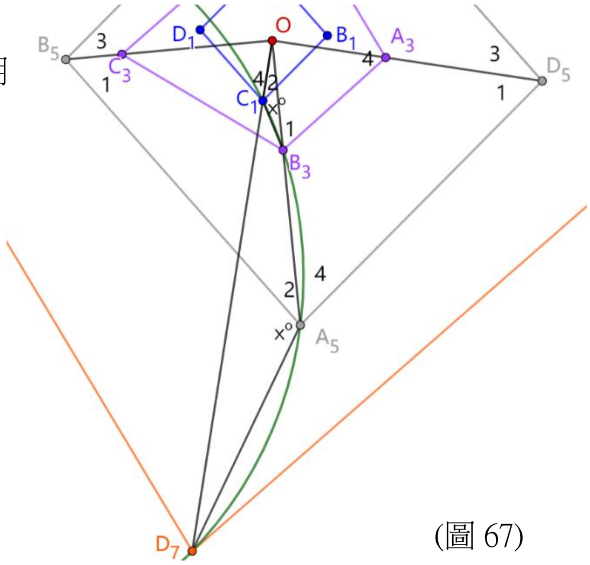
$\overline{B_3O} = 8a\ sin(\angle 2)sin(\angle 3)sin(\angle 4)$

$\overline{A_5O} = 32ax_4\ sin(\angle 1)$

$\overline{D_7O} = 128a\ x_4\ sin(\angle 4)sin(\angle 1)sin(\angle 2)$

$\because \dfrac{\overline{D_7O}}{\overline{B_3O}} = \dfrac{128a\ x_4\ sin(\angle 4)\ sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)}{8a\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)\ sin(\angle 4)} = \dfrac{32ax_4\ sin(\angle 1)}{2a\ sin(\angle 3)}$

且$\dfrac{\overline{A_5O}}{\overline{C_1O}} = \dfrac{32ax_4\ sin(\angle 1)}{2a\ sin(\angle 3)}$，$\therefore \dfrac{\overline{A_5O}}{\overline{C_1O}} = \dfrac{\overline{D_7O}}{\overline{B_3O}}$



(圖 67)

又$\angle C_1OB_3 = \angle A_5OD_7$

$\therefore \Delta C_1OB_3 \sim \Delta A_5OD_7(SAS$相似$)$

$\therefore \angle OA_5D_7 = \angle OC_1B_3$

$\because$角度轉換性質

$\therefore \angle B_1C_1B_3 = \angle B_5A_5D_7 = x°$

$\therefore \angle OA_5D_7 + \angle D_7C_1B_3 =$

$\angle 2 + x° + [180° - (\angle 2 + x°)] = 180°$

$\therefore$四邊形$C_1B_3A_5D_7$為圓內接四邊形（對角互補）

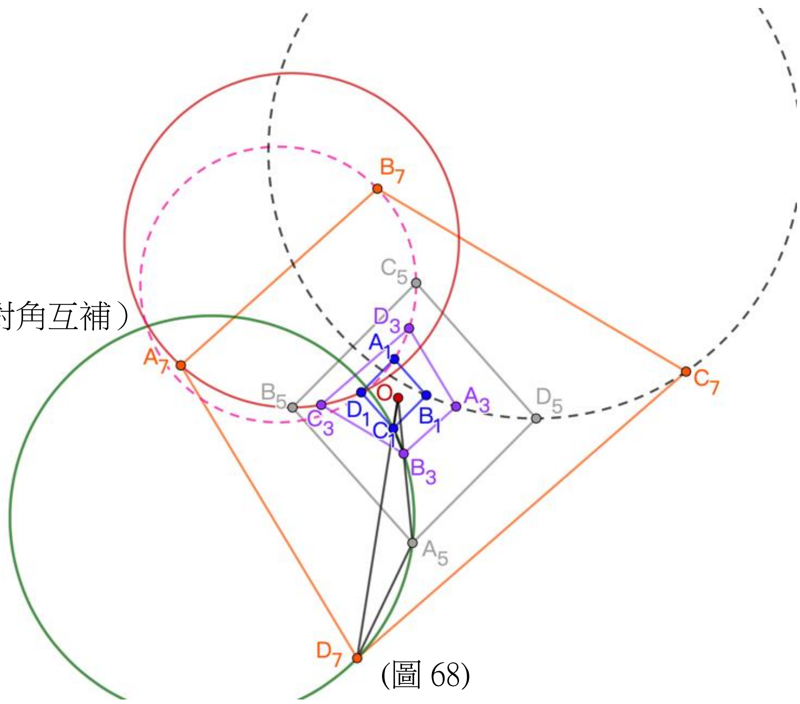
$\therefore C_1$、B_3、A_5、D_7四點共圓

同理：

D_1、C_3、B_5、A_7四點共圓

A_1、D_3、C_5、B_7四點共圓

B_1、A_3、D_5、C_7四點共圓



(圖 68)

同理：

4m 邊形以第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層同方位頂點連線之四邊形其對角和= 180°

故當 n=4m 時，4m 邊形，第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層同方位頂點共圓

四、 延伸至頂垂、頂內三角形與 n 邊形

（一） 重複疊作頂垂三角形各心與頂點關係之探討

由角度轉換可知原三角形垂心與重複疊作第二層外心共點，所以把重複疊作第二層當原三角形並對其外心重複疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外三角相似性質

（二） 重複疊作頂內三角形各心與頂點關係之探討

由角度轉換可知原三角形內心與重複疊作第一層外心共點，所以把重複疊作第一層當原三角形並對其外心重複疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外三角相似性質

（三） 重複疊作頂內四邊形各心與頂點關係之探討：

重複疊作頂內四邊形: 由角度轉換可知原四邊形內心與疊作第一層外心共點，所以把疊作第一層當原四邊形並對其外心重複疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外四邊形相似性質

（四） 重複疊作頂內 n 邊形各心與頂點關係之探討：

重複疊作頂內 n 邊形: 由角度轉換可知原 n 邊形內心與疊作第一層外心共點，所以把疊作第一層當原 n 邊形並對其外心疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外 n 邊形相似性質

柒、 結論

一、 原三角形會全等於第一層頂外三角形

即{3k}≅{3k+1}

二、 重複疊作頂外三角形之性質

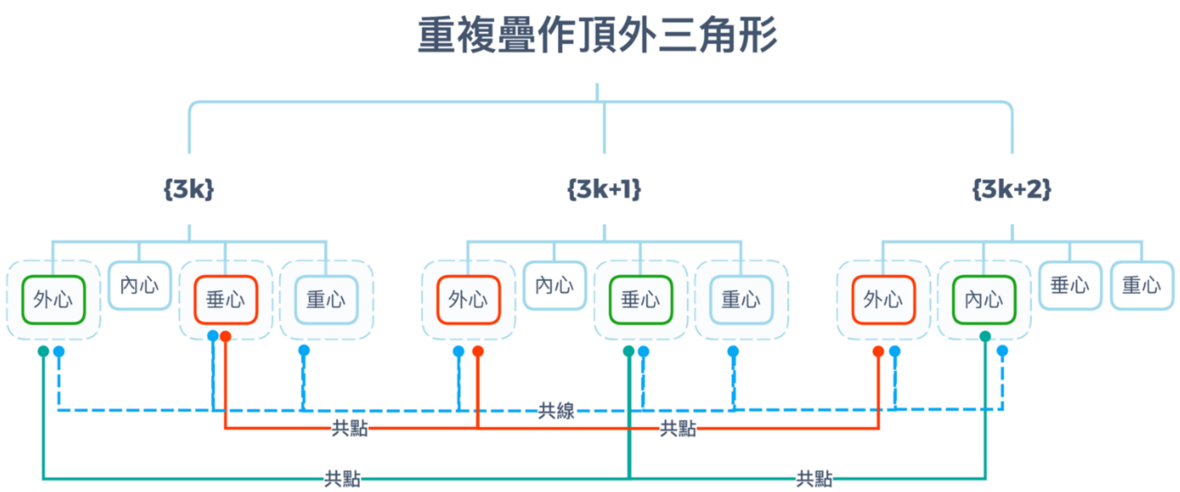
（一） 第 k 層~第（k+3）層且對應邊平行

（二） {3k}外心共點

（三） {3k}頂點、外心共線

（四） {3k}外心、{3k+1}頂點、{3k+2}頂點共線

（五） 重複疊作頂外三角形各心性質（表 22）



(表 22)

三、 重複疊作頂外四邊形之性質

（一） 第 k 層~第（k+4）層且對應邊平行

（二） {4k}外心共點

（三） {4k}頂點、外心共線

（四） {4k}外心、{4k+2}頂點共線

（五） {4k}外心、{4k+2}外心共線

（六） {4k}外心、{4k+1}頂點、{4k+3}頂點共線

四、　重複疊作頂外 n 邊形之性質

（一）　$\boldsymbol{n}$邊形

1. **相似性質**：第 k 層~第（k+n）層
2. **共線性質**：原 n 邊形外心，第 k 層頂點、第（k+n）層頂點共線
3. **對應邊平行**：第 k 層和第（k+n）層對應邊平行

（二）　特殊多邊形之特殊性質

1. $\boldsymbol{n=2m}$，**偶數邊形**：第（m-1）層對邊平行
2. $\boldsymbol{n=4m}$，$\boldsymbol{4m}$**邊形**：第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層共圓

五、　延伸至頂垂、頂內三角形有和頂外三角形相似性質

捌、　未來展望

一、　探討「中外 n 邊形」其性質，並將外心換成垂心和內心

【評語】030415

　　此研究主題為幾何作圖探討,討論多邊形之疊作圖形(運用外心及各頂點所形圓之焦點所構成之圖形)，透過特定規則連續疊代，發現到疊代所產生的一連串三角形間存在著巧妙的關連性。針對這些關連性給出討論與分析，並對所有可以想像的特性都做出了說明，可以看出作者們投入了許多心力，值得鼓勵。作者們應該是希望把所有的研究歷程完整呈現，所以針對每一個特定的性質，都依據原始的想法來給出論證。這樣當然很好,只是當要談論的內容稍多時，就會顯得有些雜亂無章。與此問題相關的一些主題其實曾經被提出討論過，作者們應該要說明那些結果已出現在之前作品，而本作品給出了那些新的成果，如此，才能讓人更清楚前人遺留了什麼樣的問題無法解答，而作者們又如何克服了這些難以攻克的瓶頸，也才能更彰顯本作品的價值。

作品海報

壹、研究動機

我們在上專題課時，聽到數學老師說，前幾屆的學長姐做了重心疊作，發現了一些性質，因此我們試著把重心換成內心、外心和垂心，於是我們開始了這一連串的研究。

貳、研究目的

一、原三角形和其第一層頂外三角形關係之探討

二、重複疊作頂外三角形關係之探討

三、重複疊作頂外三角形各心性質之探討

四、重複疊作重複頂外 n 邊形性質之探討

五、特殊多邊形之特殊性質

參、研究架構

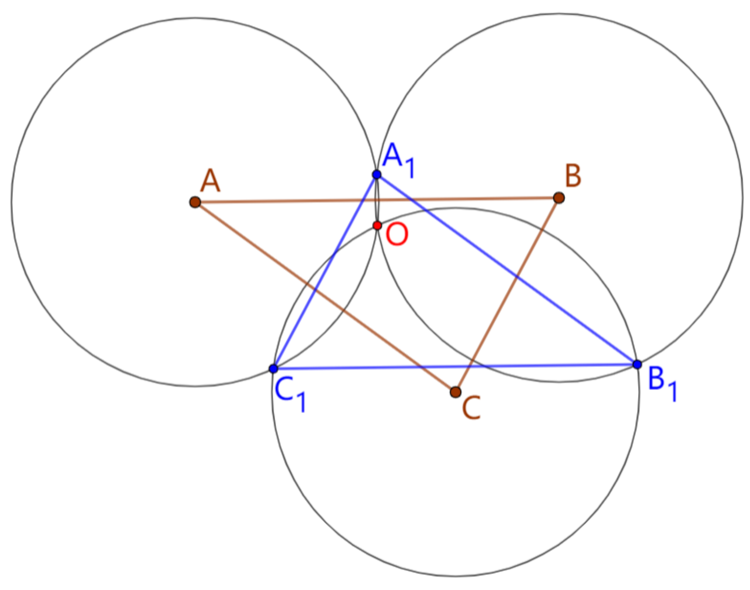
- 頂外多邊形
  - 重複疊作頂外三角形
    - 原三角形與頂外三角形全等
    - 重複疊作頂外三角形第k層和第(k+3)層相似，且對應邊平行
    - 原三角形外心與重複疊作頂外三角形頂點共線關係
      - {3k}頂點、外心共線
      - {3k}外心、{3k+1}{3k+2}頂點共線
    - 各心的關係
      - {3k}外心、{3k+1}垂心、{3k+2}內心共點
      - {3k}垂心、{3k+1}外心、{3k+2}外心共點
      - {3k}外心、{3k}重心、{3k+1}外心、{3k+1}垂心、{3k+1}重心、{3k+2}外心、{3k+2}內心共線
  - 重複疊做頂外n邊形
    - 重複疊做頂外n邊形第k層和第(k+n)層相似，且對應邊平行
    - {nk}外心共點
    - 頂點外心共線
      - [{nk}頂點、{nk}外心]共線
      - [{nk+1}頂點、{nk}外心]共線
      - [{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線
  - 特殊多邊形
    - n=2m，2m邊形 —— 第(m-1)層對邊平行
    - n=4m，4m邊形 —— 第(4k-3)m、(4k-1)m、(4k+1)m、(4k+3)m層同方位頂點共圓

肆、研究過程和方法

一、名詞解釋

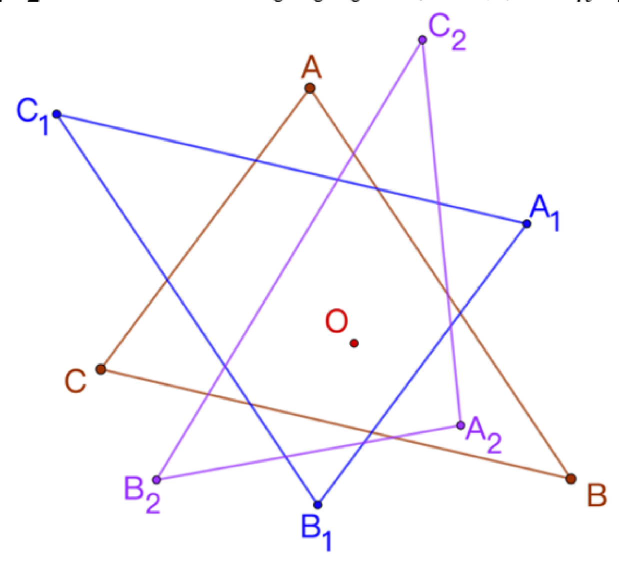
(一)頂外三角形

以ΔABC三頂點當圓心，以頂點到外心的距離當半徑畫圓，三圓的交點(不包含ΔABC外心)連線即為頂外$\Delta A_1B_1C_1$。



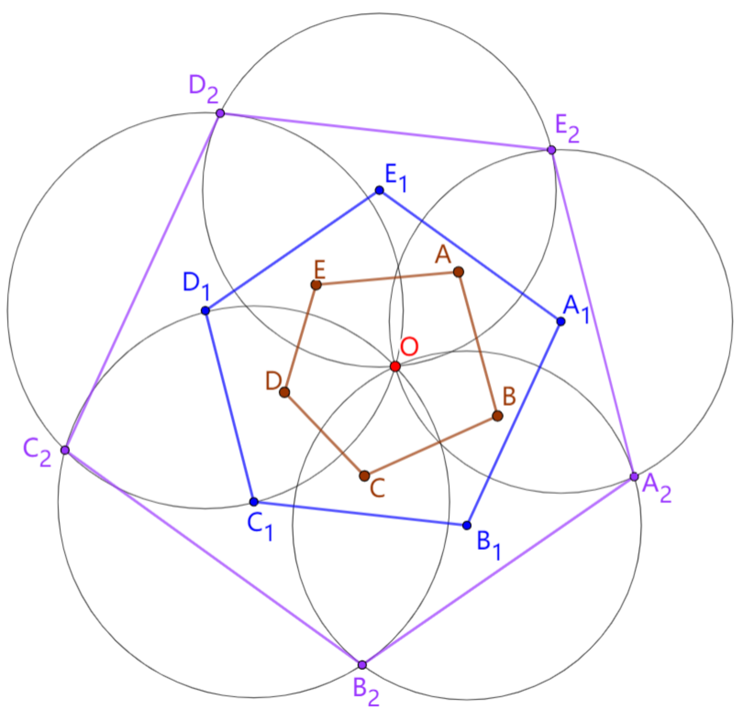
(二)重複疊作頂外三角形

以ΔABC為例，先做出頂外$\Delta A_1B_1C_1$，再以$\Delta A_1B_1C_1$的三頂點當圓心，到ΔABC外心為半徑畫圓，三圓的交點(不包含ΔABC外心)連線即為第二層重複疊作頂外三角形$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta ABC = \Delta A_0B_0C_0$，第 n 層為$A_nB_nC_n$



(三)重複疊作頂外 n 邊形

先做出一圓上多邊形，並做出其頂外 n 邊形，再用其頂點為圓心，到原 n 邊形外心為半徑畫圓，n 個圓的交點連線即為第二層重複疊作頂外 n 邊形，重複疊作 m 次即為第 m 層重複疊作頂外 n 邊形（原 n 邊形為第零層重複疊作頂外 n 邊形）。



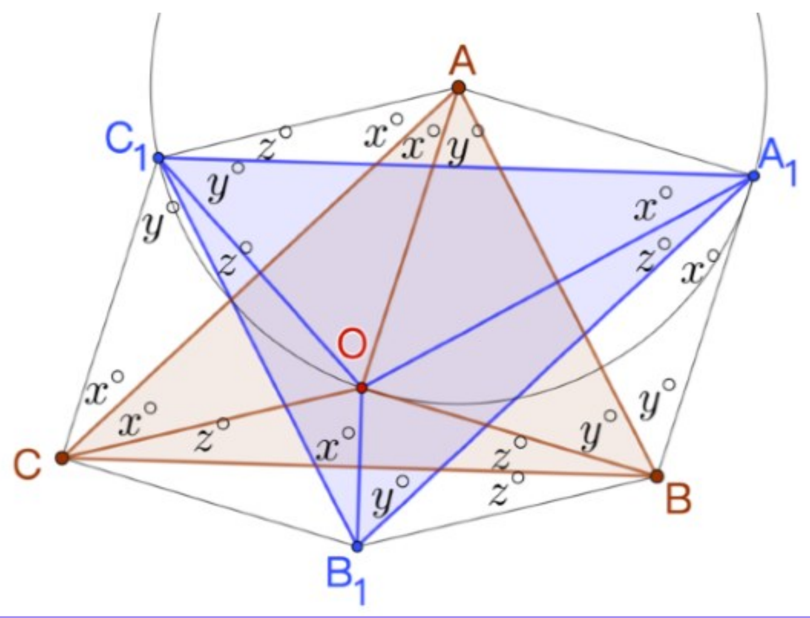
二、原三角形和其第一層頂外三角形關係之探討

(一)銳角三角形

1.等角關係

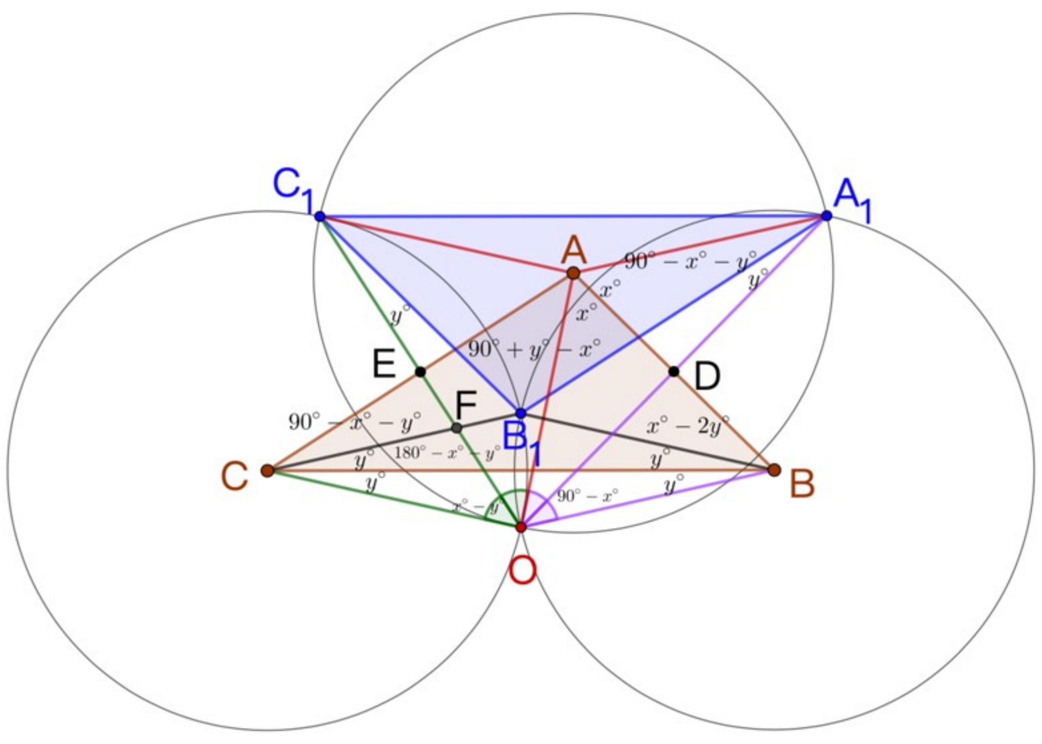
我們利用圓心角是圓周角的兩倍和菱形的性質可知 $\angle OAC = \angle OA_1C_1$ 剩下的依此類推

2.由等角關係和角度的轉換可知原三角形和其頂外三角形三組對應邊連線會形成三個平行四邊形，故原三角形和其頂外三角形 SSS 全等且對應邊平行



(二)鈍角三角形

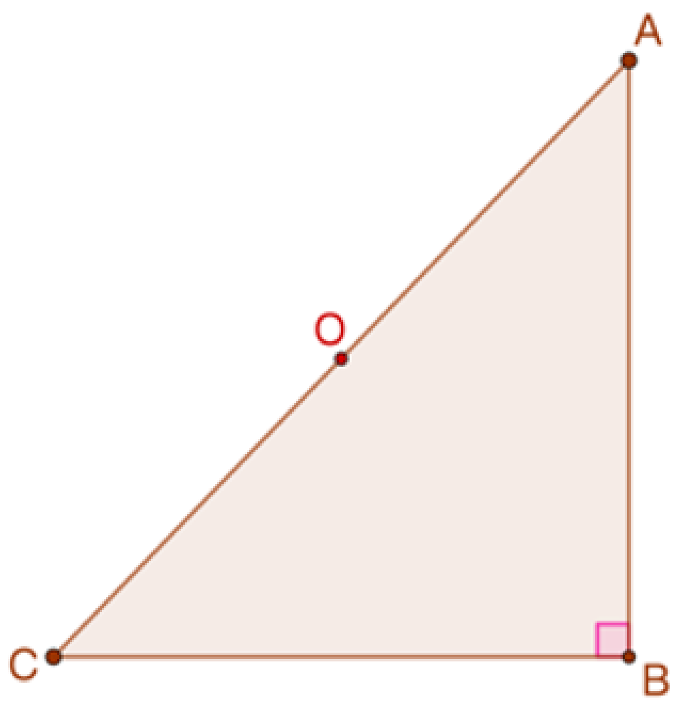
由和銳角三角形類似方法可支原鈍角三角形和其頂外三角形三邊等長、故他們全等



(三)直角三角形

∵直角三角形外心在斜邊上

∴無法做出頂外三角形



三、重複疊作頂外三角形關係之探討

(一)名詞定義：{3k}、{3k+1}、{3k+2}（k 為非負整數）

{3k}為所有重複疊作層數除以三整除之三角形（第 0、3、6、9……層）

{3k+1}為所有重複疊作層數除以三餘一之三角形（第 1、4、7、10……層）

(二)三角形與其頂外三角形角度變化之觀察

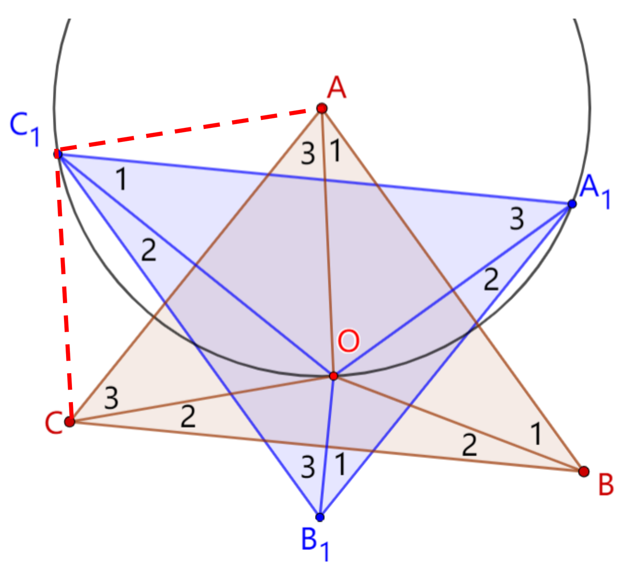
1.第零層和第一層重複疊作頂外三角形角度之轉換

利用圓心角和圓周角的性質可知

$$\because \angle OA_1C_1 = \frac{1}{2}\widehat{OC_1}\text{（圓周角）}$$
$$= \frac{1}{2}\angle OAC_1\text{（圓心角）}$$
$$= \angle OAC\text{（四邊形}AOCC_1\text{為菱形）}$$
$$= \angle OCA\text{（}O\text{為外心）}$$

再加上外心性質可得

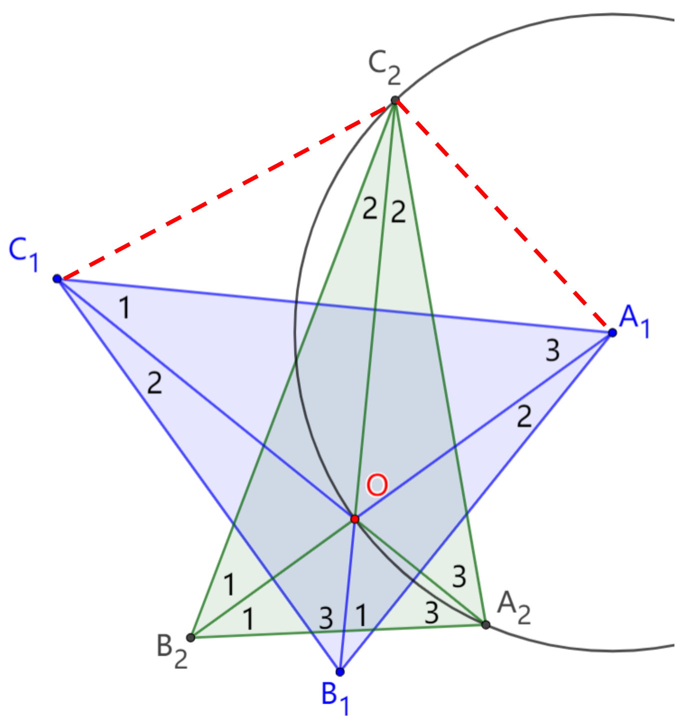
$$\angle OA_1C_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OAC = \angle OCA = \angle 3$$
$$\angle OAB = \angle OBA = \angle OC_1A_1 = \angle OB_1A_1 = \angle 1$$
$$\angle OBC = \angle OCB = \angle OA_1B_1 = \angle OC_1B_1 = \angle 2$$



在研究過程中我們發現若以第一層頂外三角形進行疊作，將會與原三角形重和，因此接下來我們都以原三角形外心進行疊作

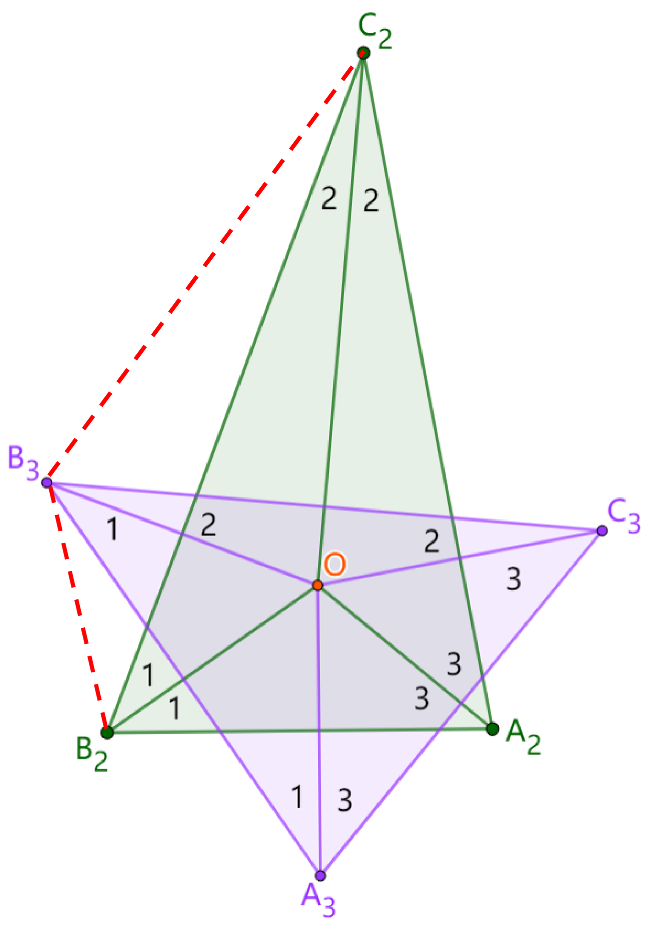
2.第一層重複疊作頂外三角形和第二層重複疊作第一層頂外三角形角度之轉換

利用和第 1 點相同方法，可知第一層和第二層角度如右圖



3.第二層重複疊作頂外三角形和第三層重複疊作頂外三角形角度之轉換

利用和前面類似方法可知第二層和第三層之角度如右圖



4.綜合上述可得下表

三角形	$\angle A_n$	$\angle B_n$	$\angle C_n$
第零層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$
第一層	$\angle 3+\boxed{\angle 2}$	$\angle 1+\boxed{\angle 3}$	$\angle 2+\boxed{\angle 1}$
第二層	$\angle 3+\boxed{\angle 3}$	$\angle 1+\boxed{\angle 1}$	$\angle 2+\boxed{\angle 2}$
第三層	$\angle 3+\boxed{\angle 1}$	$\angle 1+\boxed{\angle 2}$	$\angle 2+\boxed{\angle 3}$

故可知經由三次角度轉換之後，第 m 層與第（m+3）層對應角相等，因此第 m 層與第（m+3）層三角形相似

(三)三角形與其頂外三角形邊長比例變化之觀察

1.重複疊作頂外三角形各層頂點到原三角形外心的距離

我們利用三角函數可知

∵四邊形A_1AOB為菱形

∴$\overline{AB}$垂直平分$\overline{A_1O}$

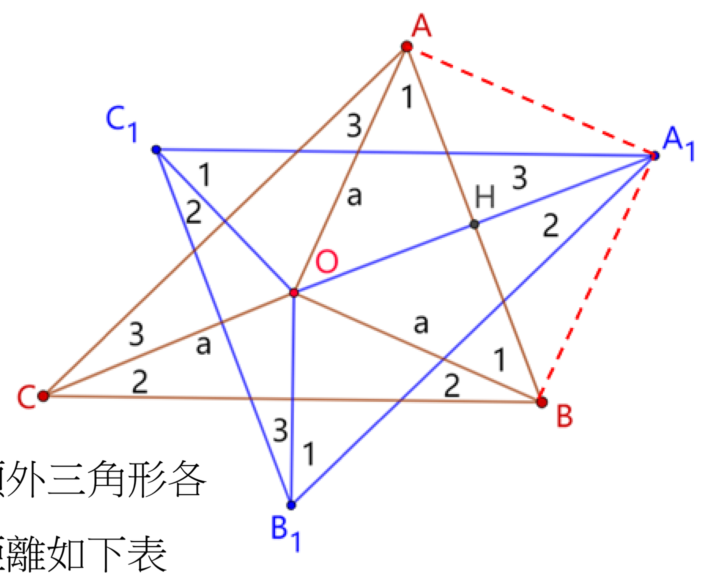
又$\overline{OH} = a\ sin(\angle 1)$

∵$\overline{OH} = \overline{HA_1}$

∴$\overline{A_1O} = 2 \cdot a\ sin\ (\angle 1)$

同理：$\overline{B_1O} = 2 \cdot a\ sin\ (\angle 2)$

$\overline{C_1O} = 2 \cdot a\ sin\ (\angle 3)$



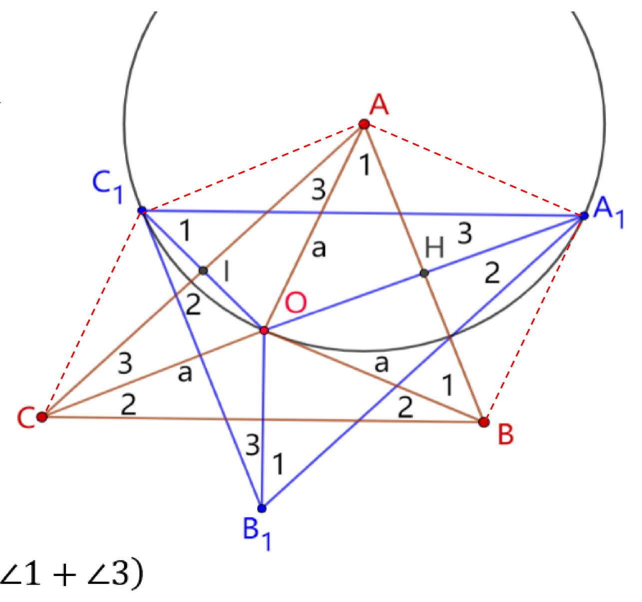
用類似方法可知重複疊作頂外三角形各層頂點到原三角形外心的距離如下表

各頂點到外心距離	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	…
$\overline{A_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 1)$	$4a\ sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)$	$8a\ sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)$	…
$\overline{B_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 2)$	$4a\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)$	$8a\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)\ sin(\angle 1)$	…
$\overline{C_mO}$	a	$2a\ sin(\angle 3)$	$4a\ sin(\angle 3)\ sin(\angle 1)$	$8a\ sin(\angle 3)\ sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)$	…

設$K_3 = sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)$，若是 n 邊形中$sin(\angle 1)\ sin(\angle 2) \cdots sin(\angle n)$即為$K_n$

2.重複疊作頂外三角形各邊長度

利用前面第一層頂點到原三角形外心的距離和正弦定理可知



∵$\overline{AC} \perp \overline{C_1O}$，$\overline{AB} \perp \overline{A_1O}$(菱形性質)

∴A 為ΔA_1C_1O外心

∴a為ΔA_1C_1O外接圓半徑$= \overline{AO}$

在ΔA_1C_1O中利用正弦定理可知

$\frac{\overline{A_1C_1}}{sin(\angle A_1OC_1)} = 2\overline{AO} = 2a$

∴$\overline{A_1C_1} = 2a\ \ sin(\angle A_1OC_1)$

$= 2a\, sin[180 - (\angle 1 + \angle 3)] = 2a\, sin(\angle 1 + \angle 3)$

同理：

$\overline{A_1B_1} = 2a\, sin(\angle 1 + \angle 2)$

$\overline{B_1C_1} = 2a\, sin(\angle 2 + \angle 3)$

用類似方法可知重複疊作頂外三角形各邊邊長如下表

邊長	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	…
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle 1)$	$2a\ sin(\angle 1+\angle 2)$	$4a\ sin(\angle 3+\angle 1)\ sin(\angle 2)$	$8a\ sin(\angle 1+\angle 1)\ sin(\angle 2)\ sin(\angle 3)$	…
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle 2)$	$2a\ sin(\angle 2+\angle 3)$	$4a\ sin(\angle 1+\angle 2)\ sin(\angle 3)$	$8a\ sin(\angle 2+\angle 2)\ sin(\angle 3)\ sin(\angle 1)$	…
$\overline{C_mA_m}$	$2a\ cos(\angle 3)$	$2a\ sin(\angle 3+\angle 1)$	$4a\ sin(\angle 2+\angle 3)\ sin(\angle 1)$	$8a\ sin(\angle 3+\angle 3)\ sin(\angle 1)\ sin(\angle 2)$	…

3. 計算$\Delta A_0B_0C_0$和$\Delta A_3B_3C_3$邊長比例

$$\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{8a\, sin(\angle 1 + \angle 1)\, sin(\angle 2)\, sin(\angle 3)}{2a\, cos(\angle 1)}$$

$$= \frac{16a\, cos(\angle 1)\, sin(\angle 1)\, sin(\angle 2)\, sin(\angle 3)}{2a\, cos\ (\angle 1)} = 8K_3$$

$$\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_0C_0}} = \frac{\overline{C_3A_3}}{\overline{C_0A_0}} = 8K_3$$

結論：

重複疊作頂外三角形第 m 層和第（m+3）層相似且對應邊比例為$8K_3$

每一組{3k}之間的邊長比為$8K_3$

每一組{3k+1}之間的邊長比為$8K_3$

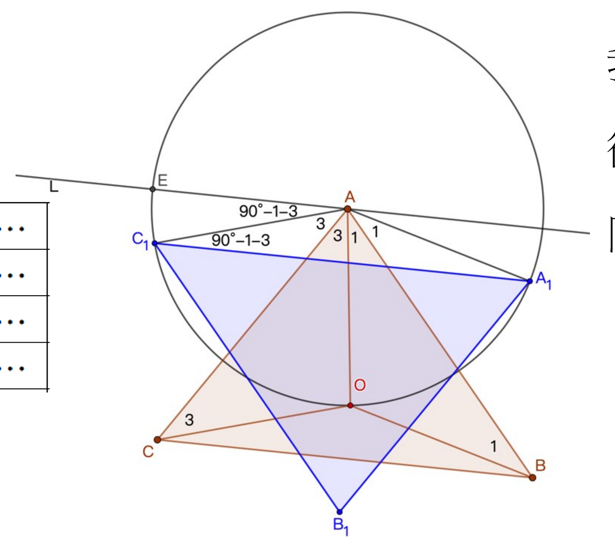
每一組{3k+2}之間的邊長比為$8K_3$

(四)重複疊作三角形第 k 層與第（k+3）層對應邊平行

我們利用角度的轉換，算出重複疊作後，每一層之間每邊夾角的角度(以三角形為例)

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	…
$\overline{C_mA_m}$與$\overline{C_{m+1}A_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	…
$\overline{A_mB_m}$與$\overline{A_{m+1}B_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 2$	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 1$	…
$\overline{B_mC_m}$與$\overline{B_{m+1}C_{m+1}}$夾角	$90° - \angle 3$	$90° - \angle 1$	$90° - \angle 2$	…

由表格可知重複疊作頂外三角形每重複疊作三次，對應邊會轉 180 度，故第 k 層和第(k+3)層對應邊平行，同理可知重複疊作頂外 n 邊形第(k+n)層對應邊平行。



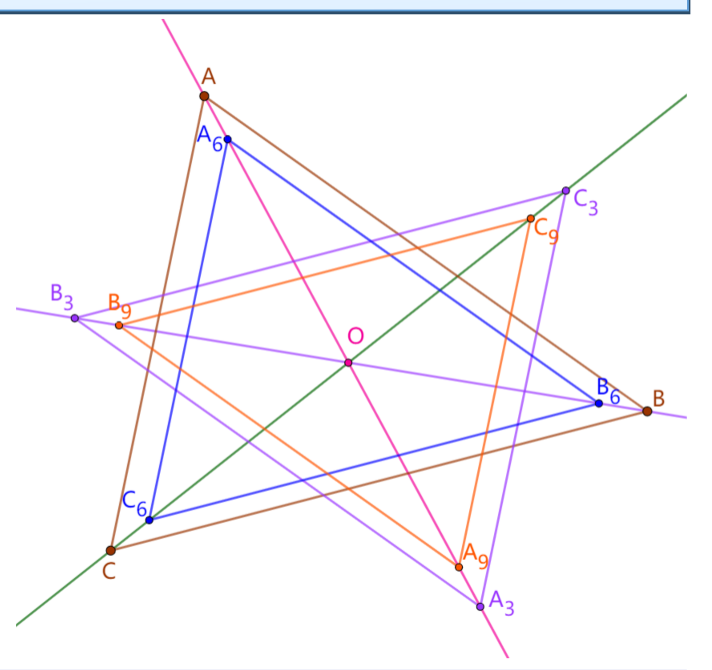
(五){3k}頂點、外心共線

我們利用重複疊作頂外三角形第 k 層和第(k+3)層對應邊平行

得知{3k}頂點、外心共線，

同理可知

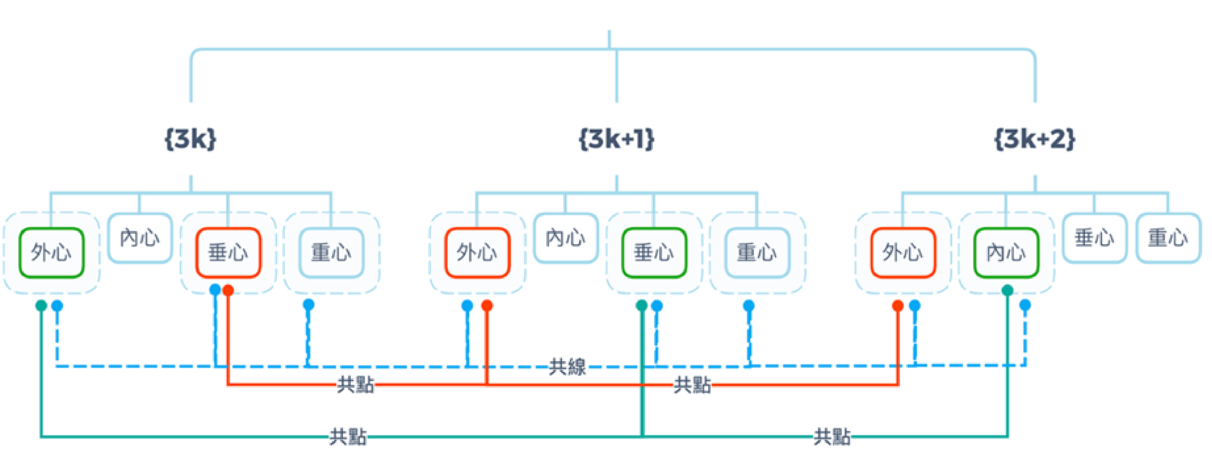
[{3k+1}頂點、{3k}外心共線]、[{3k+2}頂點、{3k}外心]共線



伍、研究分析與討論

一、重複疊作頂外三角形各心性質之探討

重複疊作頂外三角形



在研究過程中，我們發現重複疊作頂外三角形各心之間有一些性質如上表

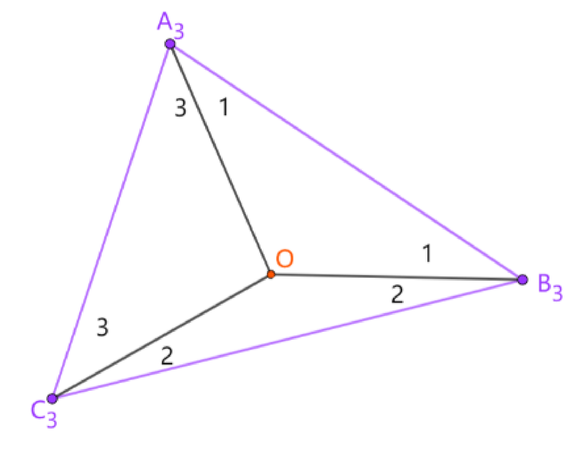
接下來分別針對上述性質進行探討

(一)重複疊作{3k}外心共點

由角度轉換可知重複疊作頂外三角形{3k}各邊頂點到與原三角形外心連線形成之兩夾角相等

故重複疊作頂外三角形{3k}外心共點

同理可證**{nk}外心共點**



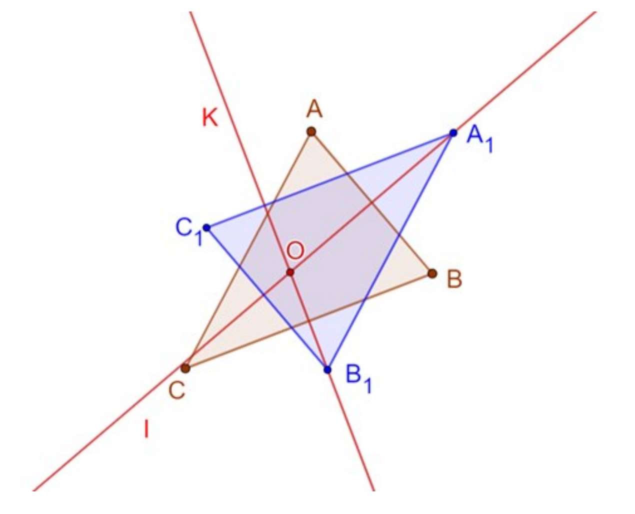
(二){3k}外心、{3k+1}垂心共點

藉由{3k}、{3k+1}對應邊平行

和等腰三角形底邊中垂線會過

其頂角所在的點可知

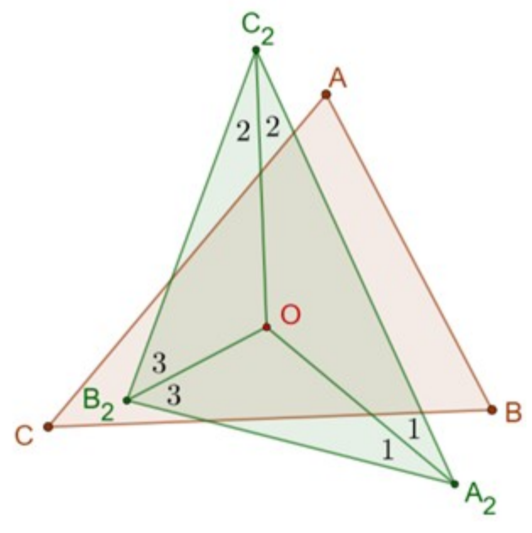
{3k}外心、{3k+1}垂心共點



(三){3k}外心、{3k+2}內心共點

由角度轉換可知{3k+2}各角角平分線會過{3k}外心，故

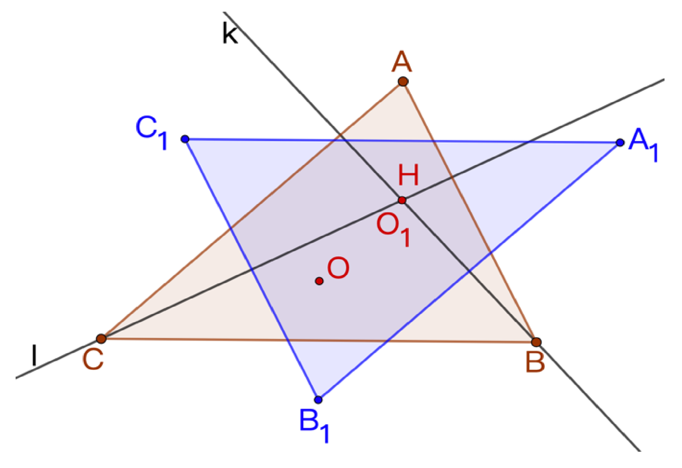
{3k}外心、{3k+2}內心共點



(四){3k}垂心、{3k+1}外心共點

我們利用同(二)類似的性質可證出

{3k}垂心、{3k+1}外心共點

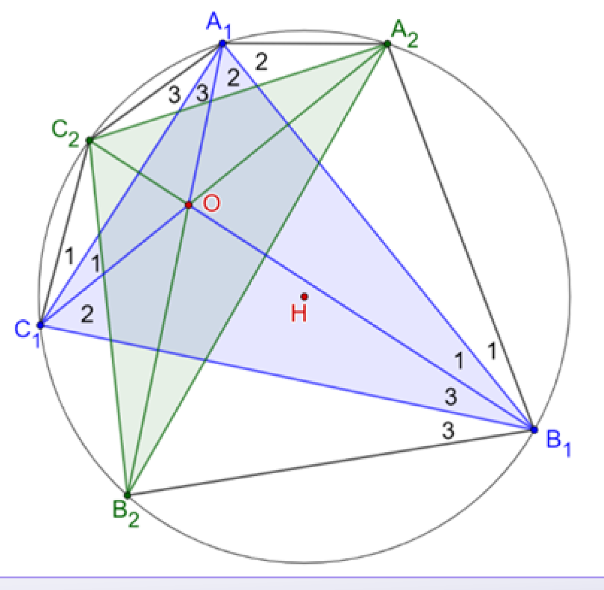


(五){3k+1}、{3k+2}外心共點

藉由角度轉換可知{3k+1}、{3k+2}頂點會形成三個圓內接四邊形，

∴ {3k+1}、{3k+2}頂點共圓

∴ **{3k+1}、{3k+2}外心共點**



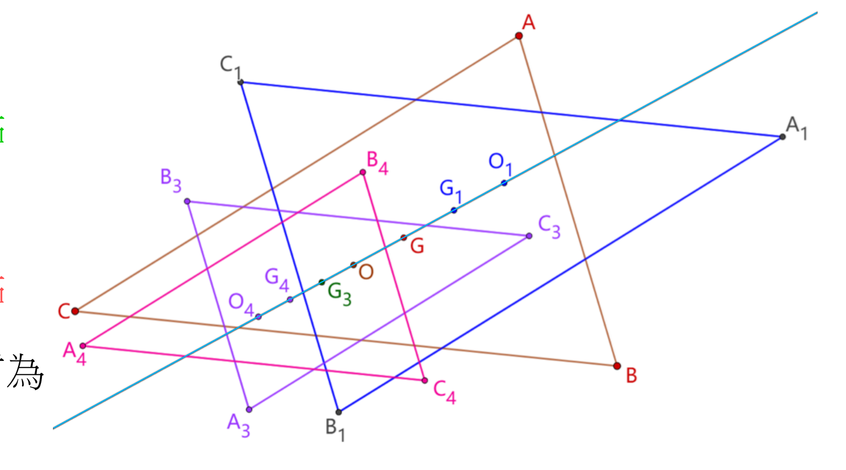
(六)、{3k}外心、垂心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共線

1.由(一)、(二)可知{3k}外心、{3k+1}垂心、{3k+2}內心共點

2.由(三)、(四)可知{3k}垂心、{3k+1}外心、{3k+2}外心共點

3.由 1.、2.加上已知尤拉線性質為三角形之重心、垂心、外心共線，可得：

{3k}外心、垂心、重心、{3k+1}外心、垂心、重心、{3k+2}外心、內心共線



二、重複疊作頂外 n 邊形性質之探討

(一)名詞定義：{nk}、{nk+1}、{nk+2}、……、{nk+（n-1）}定義（k 為非負整數）

{nk}為所有重複疊作層數除以 n 整除之 n 邊形（原 n 邊形為第零層）

{nk+1}為所有重複疊作層數除以 n 餘一之 n 邊形

{nk+2}為所有重複疊作層數除以 n 餘二之 n 邊形

…………

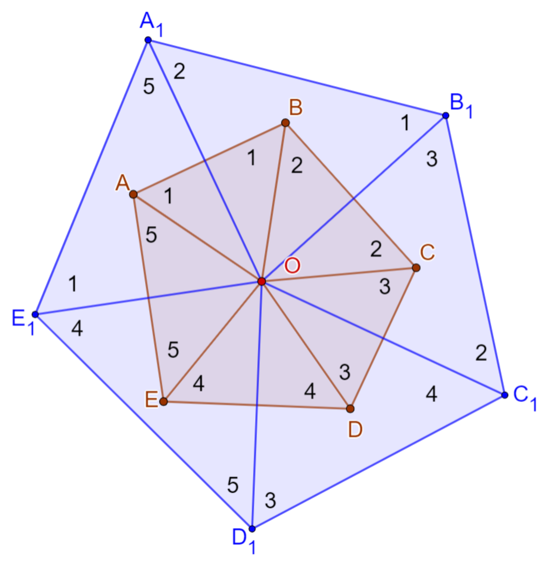
{nk+（n-1）}為所有重複疊作層數除以 n 餘（n-1）之 n 邊形

(二)重複疊作頂外 n 邊形角度轉換之觀察

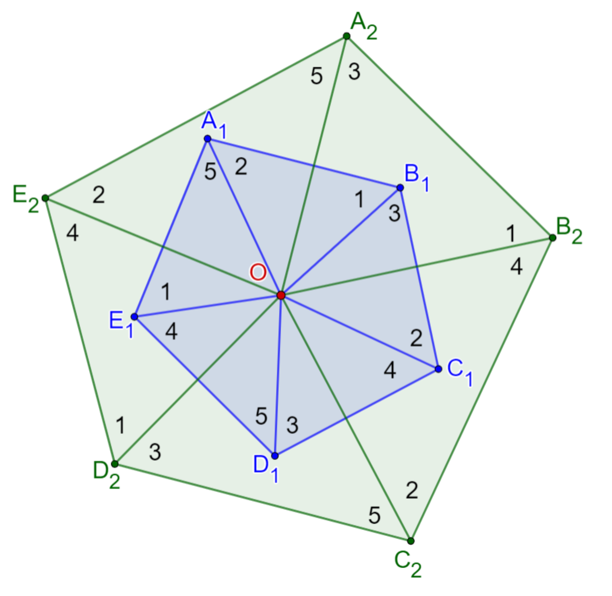
利用和重複疊作頂外三角形相同方法，可得重複疊作頂外 n 邊形角度如下表

n邊形	第一個角	第二個角	第三個角	…	第(n-1)個角	第n個角
原圖	∠n+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	…	∠(n-2)+∠(n-1)	∠(n-1)+∠n
第一層	∠n+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	…	∠(n-2)+∠n	∠(n-1)+∠1
第二層	∠n+∠3	∠1+∠4	∠2+∠5	…	∠(n-2)+∠1	∠(n-1)+∠n
…	…	…	…	…	…	…
第(n-1)層	∠n+∠n	∠1+∠1	∠2+∠2	…	∠(n-2)+∠(n-2)	∠(n-1)+∠(n-1)
第n層	∠n+∠1	∠1+∠2	∠2+∠3	…	∠(n-2)+∠(n-1)	∠(n-1)+∠n
第(n+1)層	∠n+∠2	∠1+∠3	∠2+∠4	…	∠(n-2)+∠n	∠(n-1)+∠1

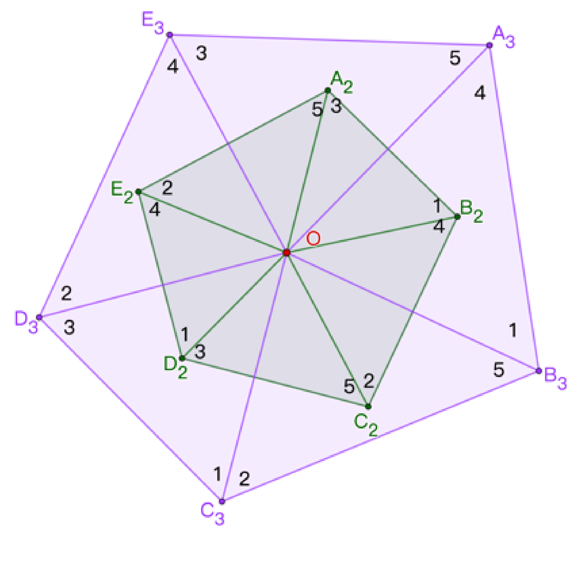
重複疊作頂外五邊形圖示



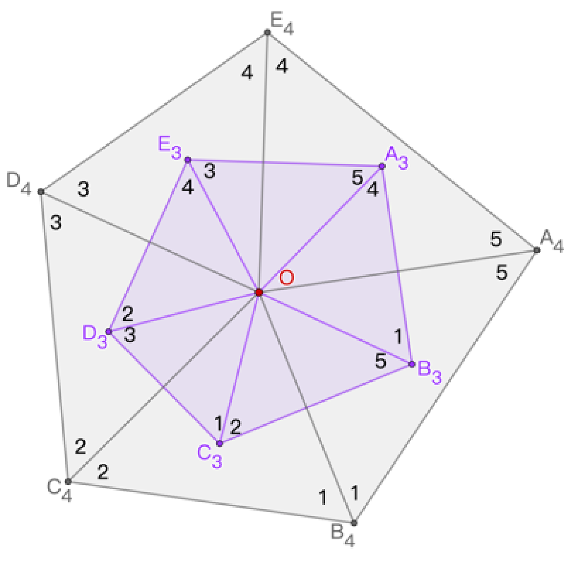
原五邊形和其頂外五邊形角度轉換圖



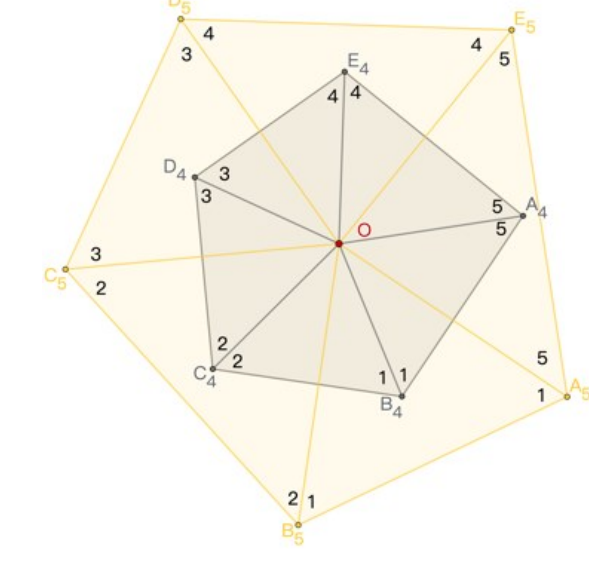
第一層和第二層角度轉換圖



第二層和第三層角度轉換圖



第三層和第四層角度轉換圖



第四層和第五層角度轉換圖

結論：由重複疊作頂外 n 邊形角度可知經由 n 次角度轉換之後，第 m 層與第（m+n）層對應角相等

(三)重複疊作頂外 n 邊形邊長之比例

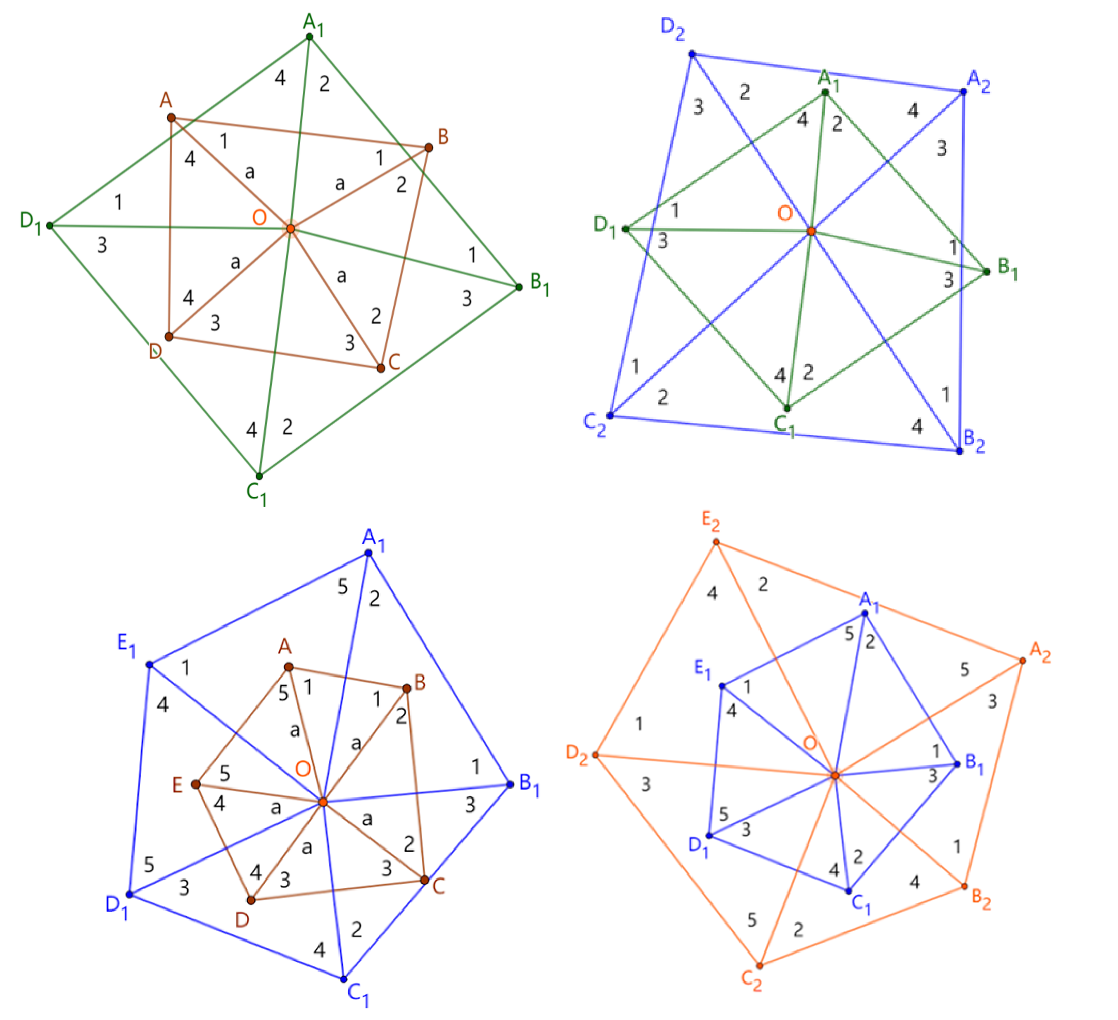
利用和三角形相同方法可知重複疊作頂外四邊形和五邊形各頂點到外心的距離，再利用各頂點到外心的距離和正弦定理(三角形中角與對邊的比例)可知其各層邊長

故可得下表(以五邊形為例)

邊長	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	…
$\overline{A_mB_m}$	$2a\ cos(\angle1)$	$2a\ sin(\angle2+\angle3)$	$4a\sin(\angle2)$ $sin(\angle1+\angle3)$	$8a\ sin(\angle2)\,sin(\angle3)$ $sin(\angle1+\angle4)$	$16a\ sin(\angle2)\,sin(\angle3)\,sin(\angle4)$ $sin(\angle1+\angle5)$	$32a\ sin(\angle2)\,sin(\angle3)\,sin(\angle4)$ $sin(\angle5)sin(\angle1+\angle1)$	…
$\overline{B_mC_m}$	$2a\ cos(\angle2)$	$2a\ sin(\angle3+\angle4)$	$4a\sin(\angle3)$ $sin(\angle2+\angle4)$	$8a\ sin(\angle3)\,sin(\angle4)$ $sin(\angle2+\angle5)$	$16a\ sin(\angle3)\,sin(\angle4)\,sin(\angle5)$ $sin(\angle2+\angle1)$	$32a\ sin(\angle3)\,sin(\angle4)\,sin(\angle5)$ $sin(\angle1)sin(\angle2+\angle2)$	…
$\overline{C_mD_m}$	$2a\ cos(\angle3)$	$2a\ sin(\angle4+\angle5)$	$4a\sin(\angle4)$ $sin(\angle3+\angle5)$	$8a\ sin(\angle4)\,sin(\angle5)$ $sin(\angle3+\angle1)$	$16a\ sin(\angle4)\,sin(\angle5)\,sin(\angle1)$ $sin(\angle3+\angle2)$	$32a\ sin(\angle4)\,sin(\angle5)\,sin(\angle1)$ $sin(\angle2)sin(\angle3+\angle3)$	…
$\overline{D_mE_m}$	$2a\ cos(\angle4)$	$2a\ sin(\angle5+\angle1)$	$4a\sin(\angle5)$ $sin(\angle4+\angle1)$	$8a\ sin(\angle5)\,sin(\angle1)$ $sin(\angle4+\angle2)$	$16a\ sin(\angle5)\,sin(\angle1)\,sin(\angle2)$ $sin(\angle4+\angle3)$	$32a\ sin(\angle5)\,sin(\angle1)\,sin(\angle2)$ $sin(\angle3)sin(\angle4+\angle4)$	…
$\overline{E_mA_m}$	$2a\ cos(\angle5)$	$2a\ sin(\angle1+\angle2)$	$4a\sin(\angle5)$ $sin(\angle4+\angle1)$	$8a\ sin(\angle2)\,sin(\angle3)$ $sin(\angle5+\angle3)$	$16a\ sin(\angle1)\,sin(\angle2)\,sin(\angle3)$ $sin(\angle5+\angle4)$	$32a\ sin(\angle1)\,sin(\angle2)\,sin(\angle3)$ $sin(\angle4)sin(\angle5+\angle5)$	…

設$K_5=sin(\angle1)\,sin(\angle2)\,sin(\angle3)\,sin(\angle4)\,\sin(\angle5)$，若是 n 邊形中$sin(\angle1)\,sin(\angle2)\cdots sin(\angle n)$即為$K_n$

由上表可知重複疊作頂外五邊形每重複疊作五次對應邊會成固定比例，再加上對應角相等，可知重複疊作頂外五邊形第 m 層和第(m+5)層相似，同理可知**重複疊作頂外 n 邊形第 m 層和第(m+n)層相似且對應邊比例為** 2^nK_n



(四)重複疊作頂外 n 邊形第 k 層和第(k+n)層對應邊平行

利用和三角形相同方法，可得出重複疊作頂外五邊形各層邊長如下表：

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	…
$\overline{E_mA_m}$與$\overline{E_{m+1}A_{m+1}}$夾角	$90°-\angle1$	$90°-\angle2$	$90°-\angle3$	$90°-\angle4$	$90°-\angle5$	…
$\overline{A_mB_m}$與$\overline{A_{m+1}B_{m+1}}$夾角	$90°-\angle2$	$90°-\angle3$	$90°-\angle4$	$90°-\angle5$	$90°-\angle1$	…
$\overline{B_mC_m}$與$\overline{B_{m+1}C_{m+1}}$夾角	$90°-\angle3$	$90°-\angle4$	$90°-\angle5$	$90°-\angle1$	$90°-\angle2$	…
$\overline{C_mD_m}$與$\overline{C_{m+1}D_{m+1}}$夾角	$90°-\angle4$	$90°-\angle5$	$90°-\angle1$	$90°-\angle2$	$90°-\angle3$	…
$\overline{D_mE_m}$與$\overline{D_{m+1}E_{m+1}}$夾角	$90°-\angle5$	$90°-\angle1$	$90°-\angle2$	$90°-\angle3$	$90°-\angle4$	…

由上表可知重複疊作頂外四邊形第 m 層和第(m+5)層對應邊轉 180°，故可知重複疊作頂外四邊形第 m 層和第(m+5)層對應邊平行。

同理可知重複疊作頂外 n 邊形第 m 層和第(m+n)層對應邊平行。

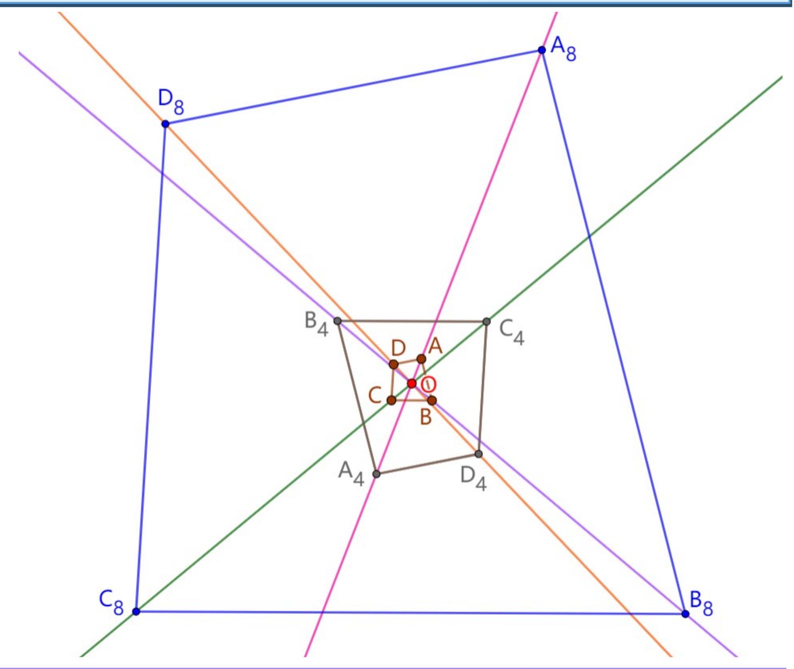
(五)[{nk}頂點、外心共線]、[{nk+1}頂點、{nk}外心]…、[{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線

利用重複疊作頂外 n 邊形第 k 層和第(k+n)層對應邊平行以及角度轉換

故可知[{nk}頂點、外心]共線、

[{nk+1}頂點、{nk}外心]共線…、

[{nk+(n-1)}頂點、{nk}外心]共線



三、特殊多邊形之特殊性質之探討

(一)重複疊作偶數邊形各組對邊平行

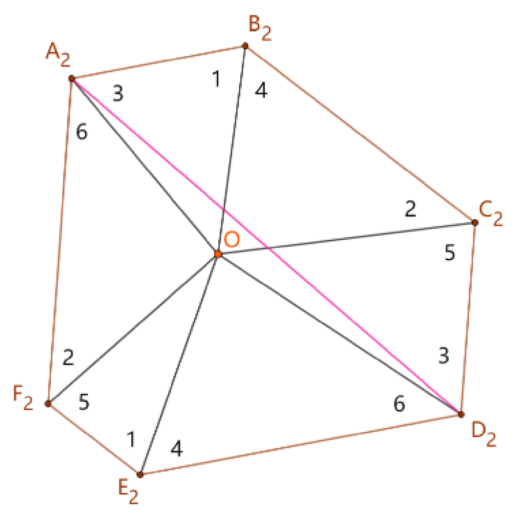
我們利用角度轉換可知第二層重複疊作頂外六邊形

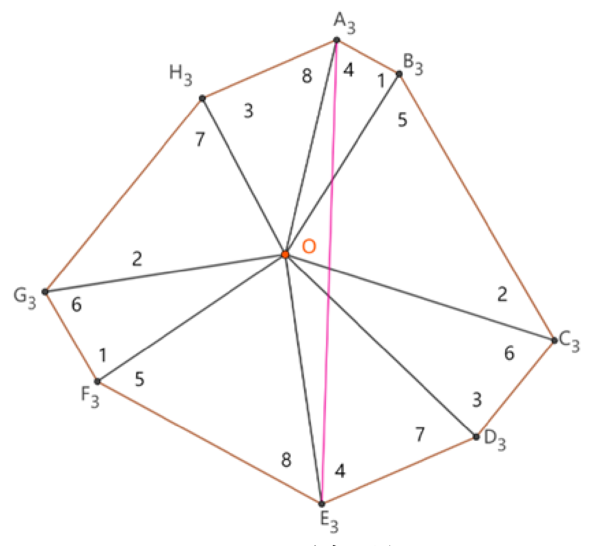
對角相等，再利用三角形內角和可知第二層重複疊作

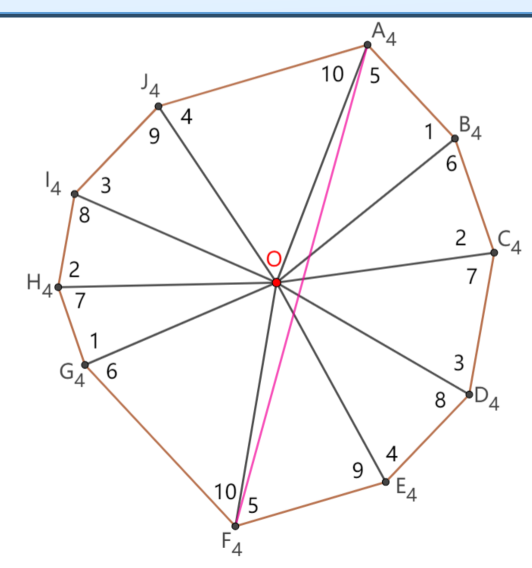
頂外六邊形各組對邊內錯角相等，故平行

同理可知重複疊作頂外 2m 邊形第(m-1)層對角相等，

故重複疊作頂外 2m 邊形第(m-1)層各組對邊平行


六邊形


八邊形


十邊形

(二)重複疊作 4m 邊形頂點共圓之性質

我們利用三角函數可算出重複疊作頂外四邊形各頂點到{4k}外心之距離

再加上頂點共線，可得知 $\Delta C_1OB_3\sim\Delta A_5OD_7$

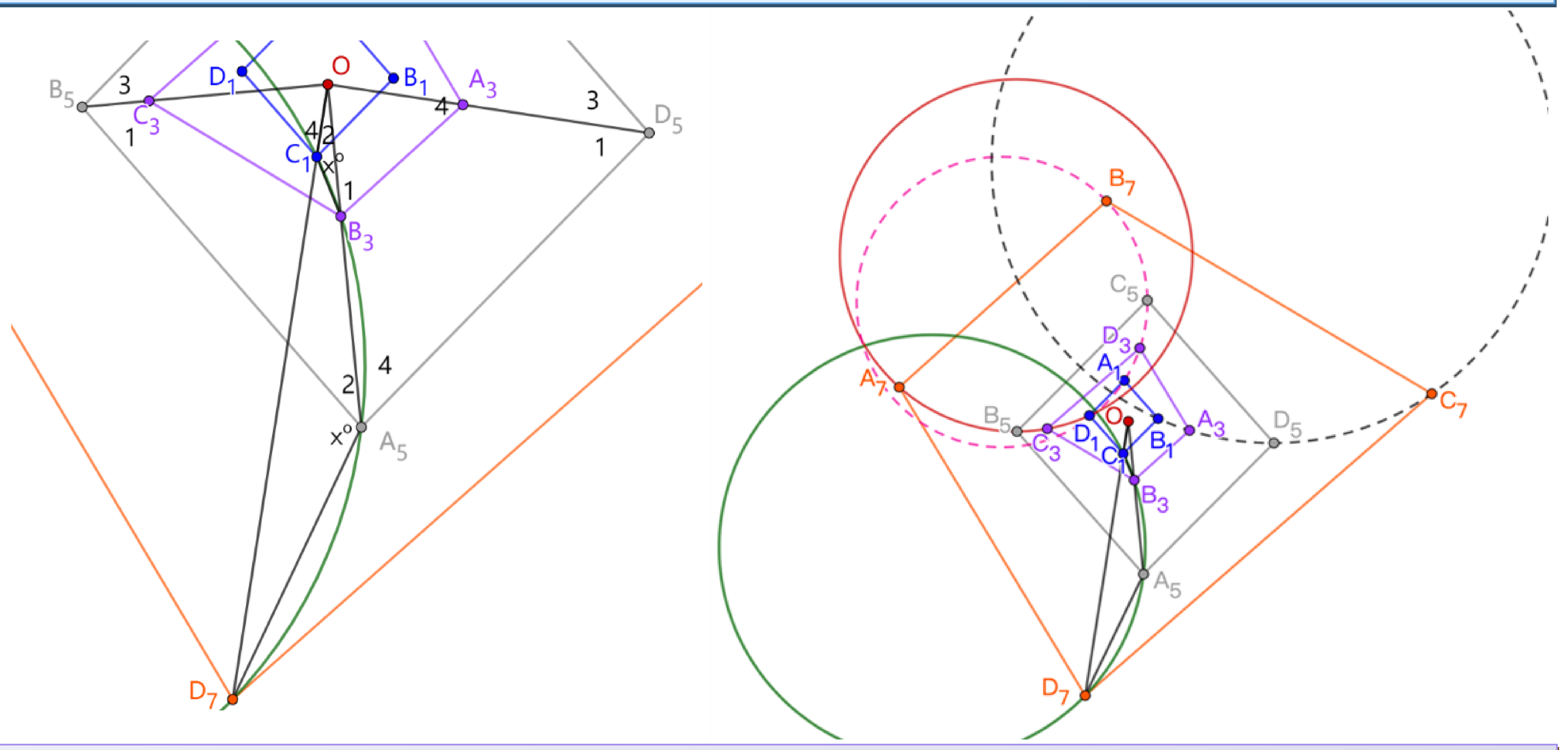
利用兩個三角 $C_1B_3A_5D_7$ 形相似和角度轉換，可知 C_1、B_3、A_5、D_7四點共圓

四邊形為圓內接四邊形，故

同理：

4m 邊形第（4k-3）m、（4k-1）m、（4k+1）m、（4k+3）m 層同方位

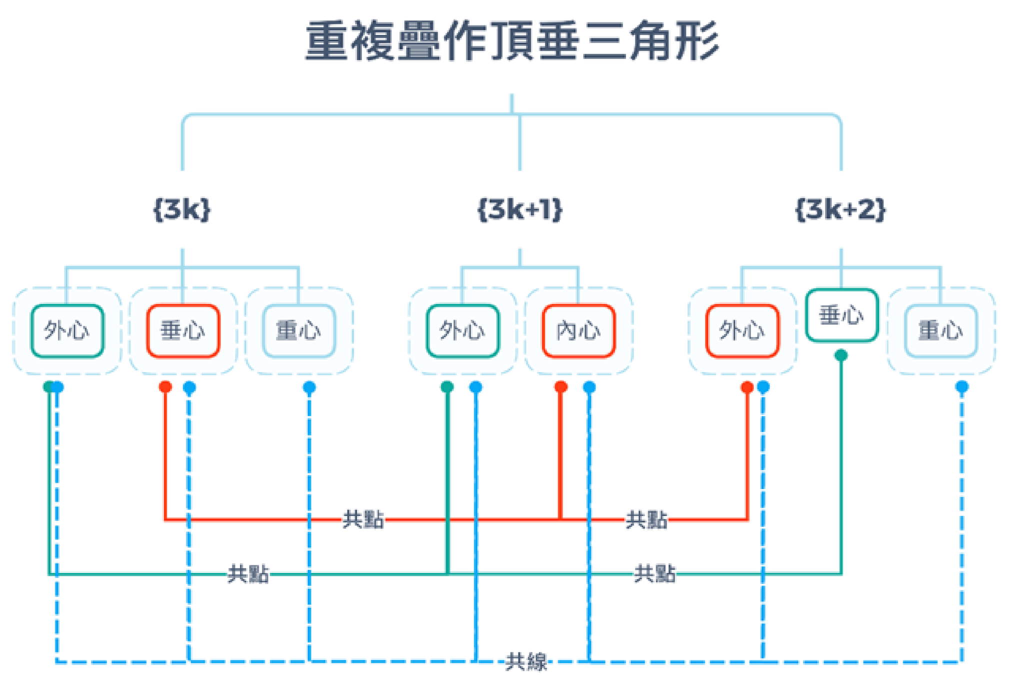
頂點連線之四邊形其對角互補



四、延伸至頂垂、頂內三角形

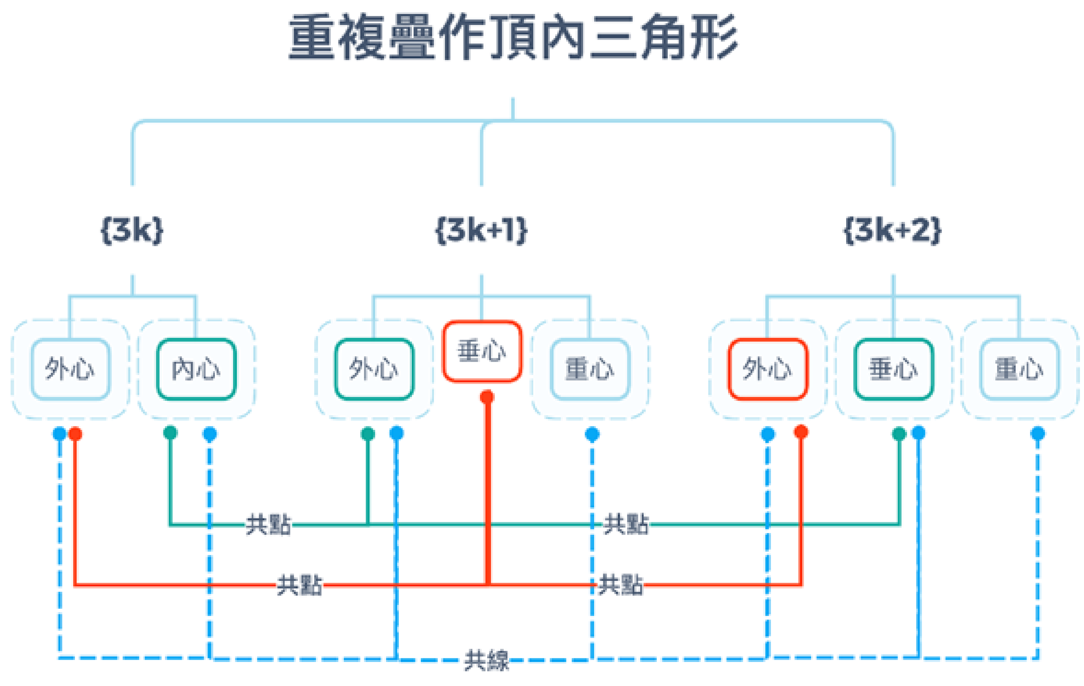
(一)重複疊作頂垂三角形各心關係之探討

由角度轉換可知原三角形垂心與重複疊作第二層外心共點，所以把重複疊作第二層當原三角形並對其外心重複疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外三角相似性質如下表



(二)重複疊作頂內三角形各心關係之探討

由角度轉換可知原三角形內心與重複疊作第一層外心共點，所以把重複疊作第二層當原三角形並對其外心重複疊作，經由前面的性質，可整理出和頂外三角相似性質如下表



陸、研究結論

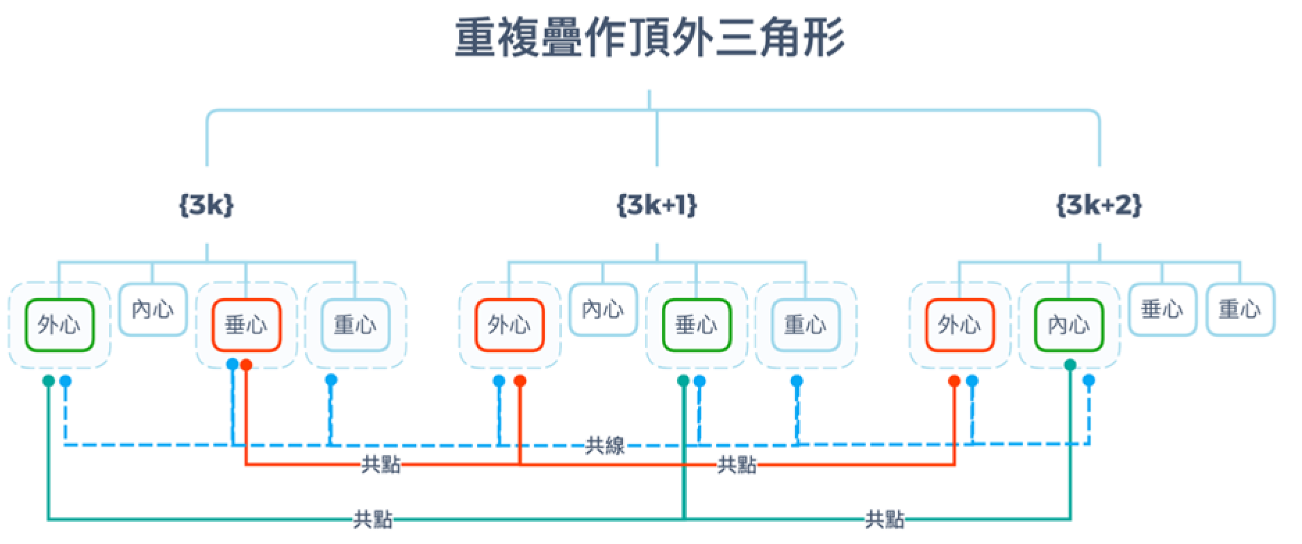
一、多邊形與重複疊作頂外多邊形有相似、對應邊平行、共點、共線之性質

二、重複疊作 2m 邊形第(m-1)層對邊平行

三、重複疊作 4m 邊形第(4m-3)、(4m-1)、(4m+1)、(4m+3)層同方位頂點共圓

四、三角形與重複疊作頂垂三角形有相似、對應邊平行、共點、共線之性質

五、多邊形與重複疊作頂內多邊形有相似、對應邊平行、共點、共線之性質



柒、未來展望

一、探討「中外 n 邊形」其性質，並將外心換成垂心和內心

捌、參考資料及其他

一、第 54 屆科展作品（多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討）

二、第 57 屆科展作品（頂圓多邊形之性質研究與探討）