中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030414

吃格子大亂鬥

學校名稱：澎湖縣立鳥嶼國民中學

作者：	指導老師：
國二 涂筱嫻 國二 洪雅俐 國二 吳珮辰	鄭宇成

關鍵詞：Dots and Boxes、奇偶性、必勝法

摘要

從遊玩 Dots and Boxes 中3×3的遊戲設定中發現必勝法，藉此推廣其方法至大小$2 \times n$的的狀況下，尋找其中的相關規律。

壹、 研究動機

有一天，我們看到班導在玩方格子遊戲，老師找我們跟他一起 PK，可我們一直輸，都不知道為什麼。於是，我們在網路上搜尋這個遊戲，名稱叫做 Dots and Boxes，和電腦練習好多次，但我們發現毫無頭緒的一直畫線，並不能想出什麼好辦法，可能永遠也不太可能贏，所以我們決定找數學老師一起來找找看這遊戲的規律以及有沒有必勝的方法，所以我們就以這個主題來做科展。

我們有參考過網路的相關資料，發現大多都是以正方形為主，於是我們有個大膽的想法，想用長方形來作為研究方向，以格數2×2開始，變成2×3、2×4，以這個順序，探討長迴廊和先後手間的關係，途中雖然遇到很多困難，但最後有找到一些影響勝利的可能因素，如果能夠都有所掌握，就能夠勝利，挺有成就感的，最後也贏了班導。

貳、 研究目的

在玩遊戲中，嘗試以系統性的方法來尋找遊戲的常勝訣竅，將其記錄下來，並嘗試將這個方法推廣到情況更多的情況，並記錄下來。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦。

肆、研究過程或方法

一、規則說明與運用定理

(一)名詞定義

1. 迴廊：一個單個或連在一起的方格，在被多畫上一步後就能夠完成其中所有方格的狀態。

2. (朱昭威[1])長迴廊：格數為三格以上的迴廊。

3. (朱昭威[1])短迴廊：格數小於三格的迴廊。

4. (朱昭威[1])臨界狀態：當遊戲進行到下一步無論畫在何處都會讓對手得分的狀態。

5.(朱昭威[1])臨界筆畫：當沒有人得分時遊戲達到臨界狀態時的筆劃數量。

6.強迫取分：在一個格數為二的短迴廊中，畫下一步讓對手必須在此迴廊得分的技巧。

(二)遊戲規則與研究範圍

在$m \times n$個點所組成的矩形中，雙方輪流畫一條垂直或水平的線，將連線區域封閉的人就佔有該格並且能夠再畫一條線，畫至沒有線可以畫至為止，誰獲得的格數較多就獲勝。

遊戲的變化相當多，在這次的研究中，我們只探討在達到臨界狀態前尚未有任何一方得方的時候，另外還有一個狀況在其中一個迴廊畫上一畫後，仍無法全部得分的狀況，就算在達到臨界狀態前尚未有人得分我們這次也不予討論。

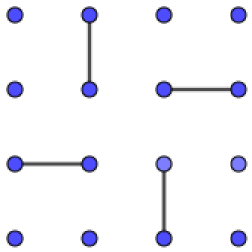
二、經典3×3

3×3是一個非常經典且平衡的狀態，也因為格數是奇數，所以一定有勝負，在多局的演練中，參考了網路上的方式，我們發現了一些有趣的規律：

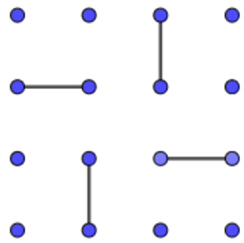
1.因為3×3的狀況是一個正方形，所以有許多邊可以透過旋轉而相同。

2.不同位置的邊有不同的功用，其中有一些邊非常重要，如圖一、圖二，甚至影響到勝負關鍵。

3.後手讓整個圖形有奇數個長迴廊就能勝利，而這個條件是永遠都可以做到的，所以後手有必勝法。



圖一



圖二

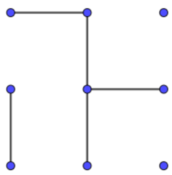
換個角度看，若先手玩家能夠創造偶數個長迴廊，就可以贏得勝利，但要製造長迴廊除了兩旁跟上下的路徑，剩下的就必須經過中間的格子，而不管是在旁邊或是中間的長迴廊，後手都可以先行將其切斷，讓其無法形成，這樣子的策略也被稱為「風車法」。

而我們好奇，若將格數縮小為$2 \times n$是否長迴廊的個數與遊戲的先後順序是否會有一定的規律。

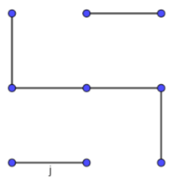
三、$2 \times n$

(一) 2×2

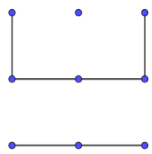
先從邊長少的狀況開始思考，再嘗試推廣到後面的狀況，是研究數學一貫的作法，因此我們先從最簡單的2×2開始，我們遊戲了許多局，大致上可以得到以下的結果：



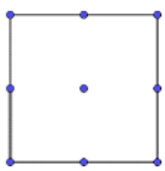
圖三



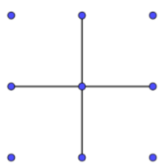
圖四



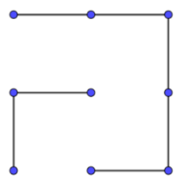
圖五



圖六



圖七



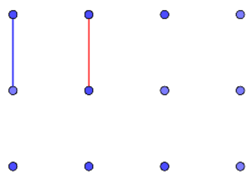
圖八

因為格數是偶數，有許多平手的結果十分不意外，但有趣的是在我們實驗的棋局中，竟然沒有後手(紅色)勝利的結果，這個結果十分有趣，在這裡我們發

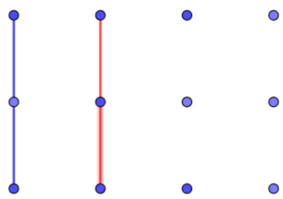
現，可能與可以畫的數量有關，到達臨界狀態時多為奇數，而紅色接著就只能開始送分，除非有先將四格分開，不然很容易就一次結束遊戲，而格數這麼少的狀態，去談論長迴廊與短迴廊，似乎也就失去了意義，更多的是關注在先後手以及到達臨界狀態時的總步數也許當格數慢慢擴增，就可以看出迴廊數的重要性。

(二) 2×3

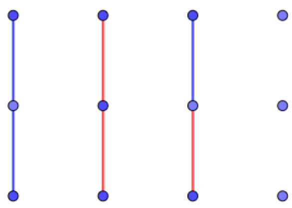
在許多次的遊戲中，我們發現了，後手的紅色可以掌握勝利的方法，如果將長迴廊的概念加入這一次的遊戲中，可以發現，如果先手得到偶數個長迴廊，那麼就會獲勝，反之，奇數個則後手勝利，但在格數這麼少的狀況下，要創造一個長迴廊就已經相當的困難，更何況兩個，而在這次的狀況下，後手有方式可以永遠阻斷先手的長迴廊，只要跟著先手所畫的步數，跟著畫，必定能夠阻斷先手發展長迴廊，如圖九、圖十、圖十一按照這個發展，會將迴廊數形成三個 2 格的迴廊，而達到臨界狀態的總是後手，因此後手就可以取得 4 格而取得勝利。



圖九



圖十

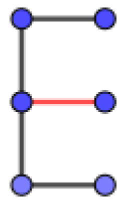


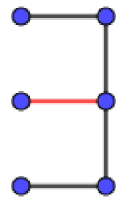
圖十一

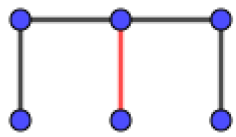
在2×2中，是藍色的勝利，而2×3中則是紅色的勝利，那麼是否在2×4中也是藍色會勝利呢？那麼2×5則是紅色勝利嗎？

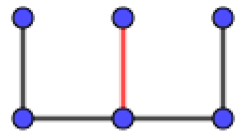
(三) 2×4

猜測中這個狀況下應當是對先手的藍色有利，並且應該是有奇數個長迴廊會使藍色勝利，而在格數這麼少的狀況下製造長迴廊是相當有難度的，要製造出偶數個則更加困難，那若沒有長迴廊的狀況呢？是否為紅色勝利？結果發現在沒有長迴廊的狀態下，先手藍色會勝利，有趣的是，我們發現，在大多數的對戰中，臨界狀態都會是藍色達到，換言之也就是藍色會得到先取分的機會，而若依照全部的迴廊數目來看，則常常為奇數個迴廊數，按照常理，應為先手取得最後一個長迴廊的分數，我們發現，若迴廊格數為 2 時，則可以透過強迫對手取分的方式取得最後一個迴廊分數，如圖十二、圖十三、圖十四、圖十五，若個數為 2 的迴廊數量為偶數個，則對方可以在做一次強迫對手取分的方式來取得長迴廊，也許在後續的遊戲中，我們應該把格數為 2 的迴廊也納入一個重要的觀察項目。


圖十二


圖十三


圖十四


圖十五

(四) 2×5

猜測：在偶數個長迴廊時，先手勝利，在奇數個長迴廊時，後手勝利，而在這個狀況，應該是對後手有利。

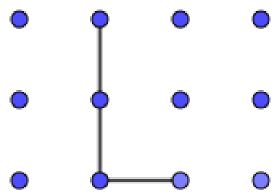
在這局遊戲中，我們發現一個與前幾種狀況很不相同的地方，這個狀況並不如我們預期的對後手有利，而長迴廊也不像前面那麼容易阻擋，而如果要進行阻擋，好像總有方法可以製造出新的長迴廊，這讓後手相當被動，但是勝利的結果依然如預測的一樣，在偶數個長迴廊先手勝利，奇數個長迴廊後手勝利，這個勝利條件可能有一個規律，在下一輪的遊戲中，應當變成奇數個長迴廊先手勝利，偶數個則為後手勝利。

(六) 2×6

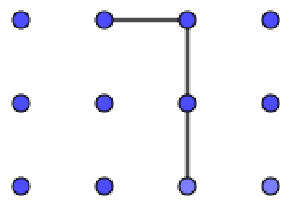
這局不意外的在奇數個長迴廊時，是先手玩家勝利，遊玩的感覺跟2×5的很像，還是藍色較有優勢，好像總有方法可以製造長迴廊，長迴廊的數量變得很難控制，也發現了一些製造長迴廊的方式與技巧，另外當對手使用強迫取分的方式交換順序時，可以取得兩格並使用下一個兩格的短迴廊作為強迫對手取分的方式。

長迴廊的製造方式：

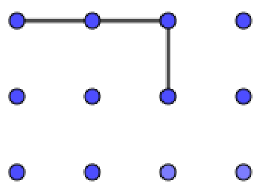
我們發現在某個圖形出現後，必定能夠做出一個長迴廊，如圖十六、圖十七、圖十八、圖十九，在這個幫助下，讓雙方如果想做長迴廊時，都有一個方向。



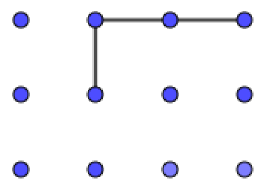
圖十六



圖十七



圖十八



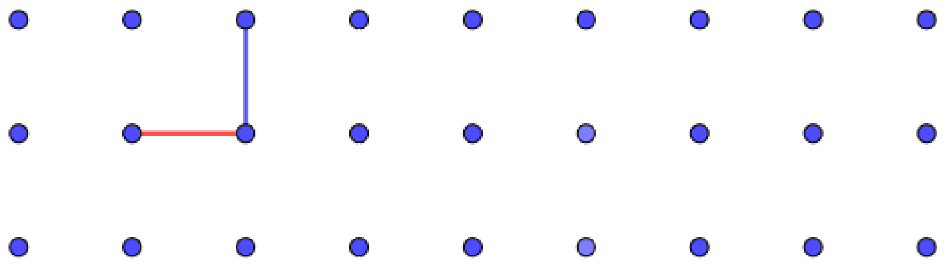
圖十九

(七) 2×7

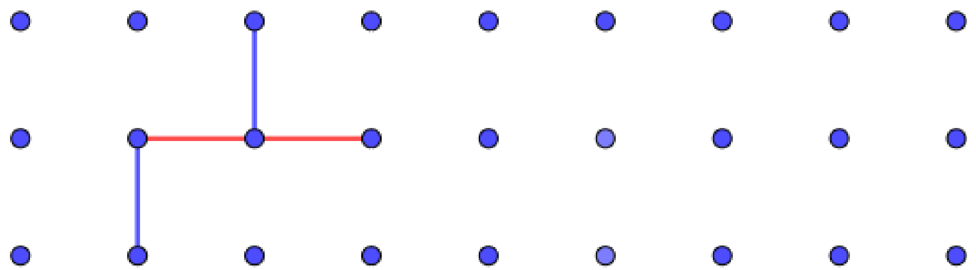
這個狀況下依然還是照著推測走，在奇數個長迴廊時，後手勝利，偶數個迴廊時先手勝利，但是已經沒有把握哪一個方向比較佔優勢了，長迴廊製造方法的發現，讓雙方都能夠製造長迴廊，而阻擋的方式因格數的增加導致效果相當有限，勝負條件慢慢的看得出規律，可必勝方法卻找不太到，只能有一個大概的方向導引。

(八) 2×8

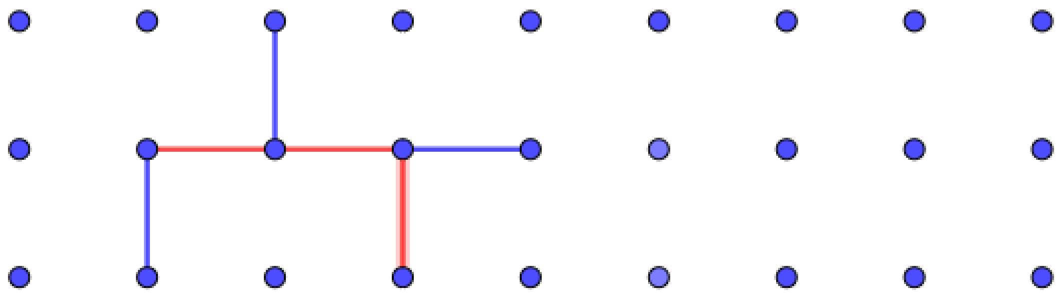
這個狀況下，勝負的條件依然相同，只是有零星幾局遊戲中，應該是某方勝利的遊戲，最後卻成了平手，難道是勝負條件有變化了嗎？思考了許久，在遊戲的格數慢慢加長之後，這一次的平手是步是在暗示我們應當修正長迴廊的格數呢？



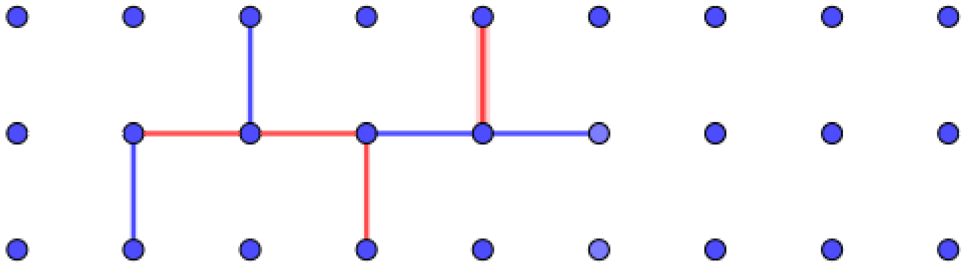
圖二十



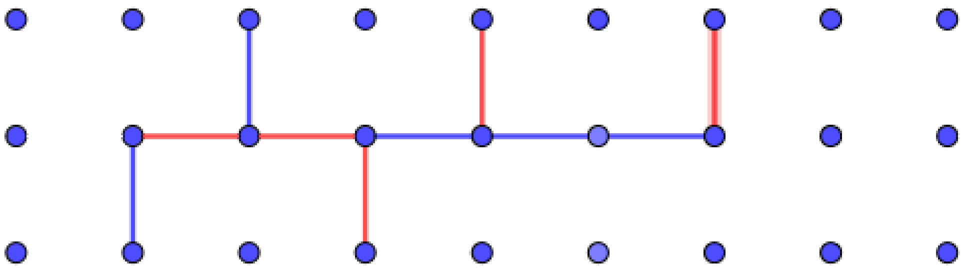
圖二十一



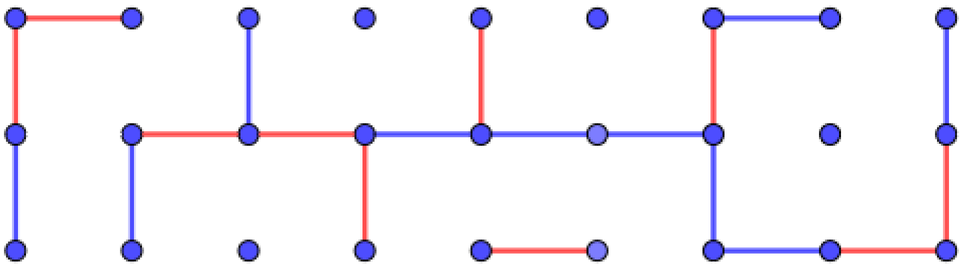
圖二十二



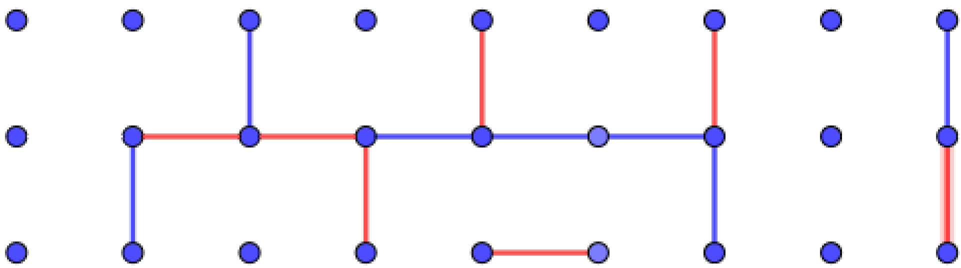
圖二十三



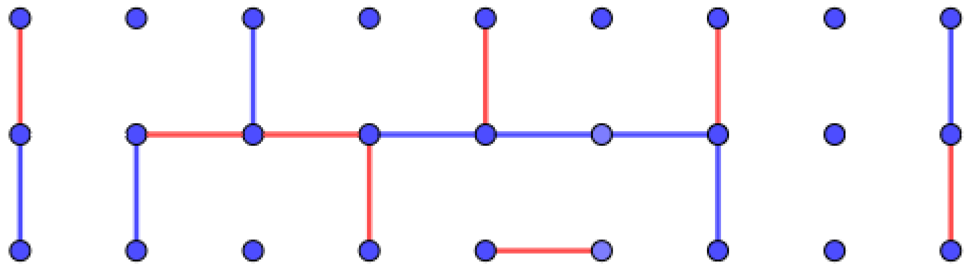
圖二十四



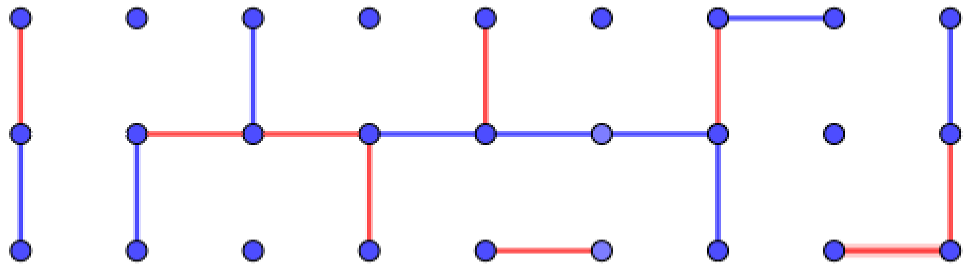
圖二十五



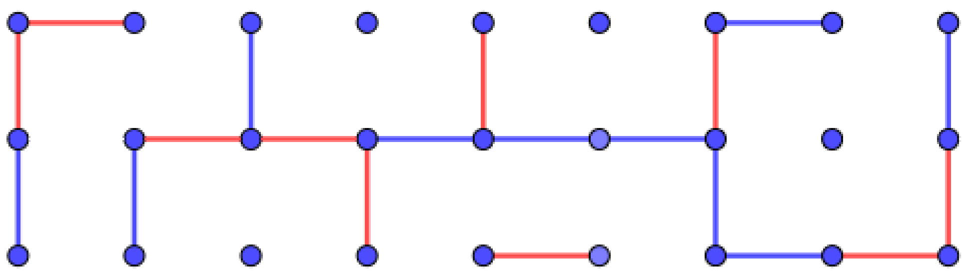
圖二十六



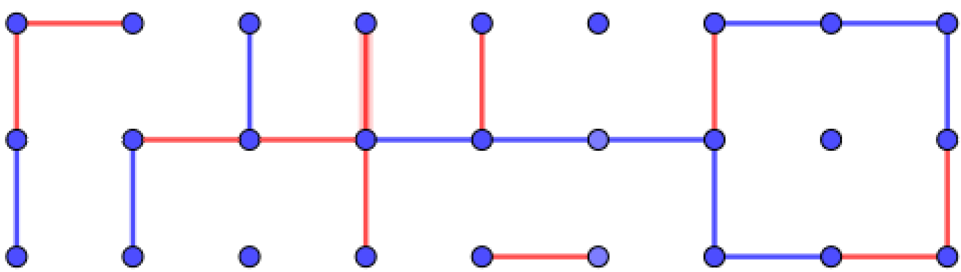
圖二十七



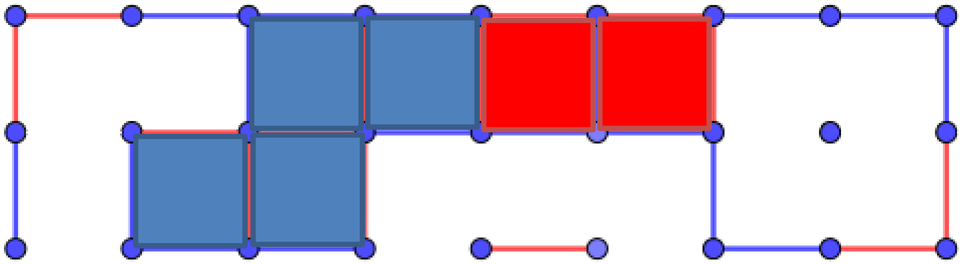
圖二十八



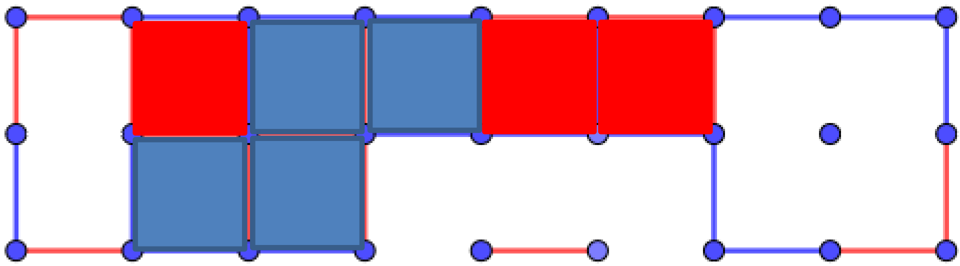
圖二十九



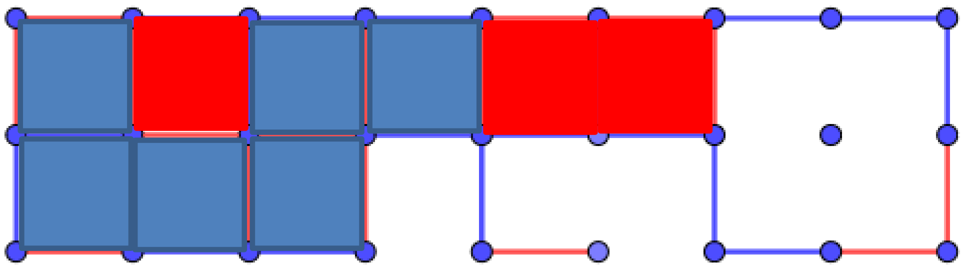
圖三十



圖三十一



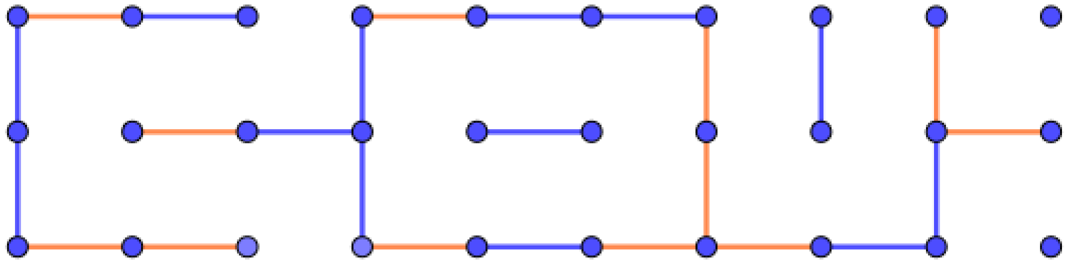
圖三十二



圖三十三

(九) 2×9

這一次玩了幾局，發現了其中一局勝負不如我們的預期規則，這局提醒我們也許有一些觀點我們忽略沒有看見，也許長迴廊的個數是一個標準，但並不是全部的因素，我們很有可能忽略了許多資訊，在查找了相關的資料，之前的科展作品並沒有提到相關的問題，而意外的發現了一篇碩士論文是研究這個主題的，但是其中研究的範圍與遊戲設定，都是在長與寬都是奇數個的狀況下，與我們做的內容不相關，但也許內容與想法有一些是我們能夠參考與借鏡的。



圖三十四

(十)探討與比較

1.臨界狀態的筆畫與迴廊個數

在遊玩這麼多不同的狀況後，我們發現有兩個要素蠻重要的，第一個是達到臨界狀態時的筆劃數，這個影響到了是誰先將分數送出，而另外一個則是迴廊個數，若遊戲很正常的進行，也就是可以預期一方吃一個迴廊，而若是一般人則不會先把長迴廊送出去，因此長迴廊總是會留在最後，而也就可以預期迴廊的先後順序應為由小到大，按照這樣子的推論，若臨界狀態的筆畫為奇數(也就是說先取得第一個迴廊的是先手)，而迴廊總數為奇數，那麼能夠取得最後一個長迴廊的玩家就是先手，若迴廊總數為偶數，那麼取得最後一個長迴廊的玩家就是後手，我們可以整理出一個表格如下：

	迴廊總數為奇數	迴廊總數為偶數
臨界筆畫為奇數	先手取得長迴廊	後手取得長迴廊
臨界筆畫為偶數	後手取得長迴廊	先手取得長迴廊

這樣的狀態是在於雙方沒有強迫對手取分的狀態，依照我們遊玩的經驗，為了改變先後順序，而長短迴廊也有不同的功用。

2.迴廊的特性

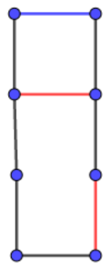
(1) 短迴廊

在我們的定義下，短迴廊是格數為一或二的迴廊，格數是一的迴廊並沒有太多變化，也可以看做就是一個迴廊順序的轉換，時常是臨界狀態下第一個被捨棄的迴廊，但格數為二的迴廊就不同了，這個迴廊很有趣，隨著需要的狀況

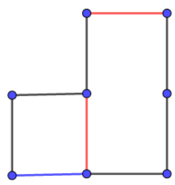
不同，時常被用來強迫取分。

(2)長迴廊

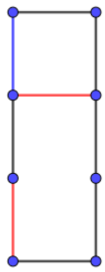
長迴廊是格數大於或等於三格的迴廊，同時也是雙方遊戲者爭奪的迴廊，因為格數多，可以拉開雙方的得分，而在遊玩時，通常不會最先把最長的迴廊分掉，因此最長得迴廊總是在最後才被取得，為了爭取這個迴廊，則必須先取得第一個長迴廊的得分權，取得後就能夠取得最後一個最長的迴廊，迴廊個數也就代表了迴廊順序的轉換，也就是說，同一個人無法在取得迴廊的同時再次取得下一個迴廊，但是透過不把長迴廊取完，而在最後留下一個兩格的短迴廊強迫對手取分，則可以讓取得長迴廊時又可以獲得下一個長迴廊的得分權，而這樣的方法保證了先取得長迴廊得分權的人可以穩穩的取得最後一個長迴廊，如圖三十五、圖三十六、圖三十七、圖三十八。



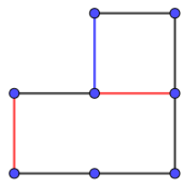
圖三十五



圖三十六



圖三十七



圖三十八

可以發現長迴廊如果是 3 格的，就可以拆解成一個 2 格和一個 1 格的短迴廊，而 4 格的就可拆解成兩個 2 格的短迴廊，而在格數越來越多的情形下，中間強迫對手取分所導致的格數可能比最後取得的長迴廊格數還多，所以當遊戲擴增到某個程度後，最後一個長迴廊的格數應該需要有所修正，才能夠達到符合這樣做法的效益。

3.修正

加上長短迴廊的特性，我們大致上可以說，到達臨界狀態時，迴廊的先後順序可以由小到大排列，而為了取得最後一個長迴廊，我們關注的重

點就不應該是迴廊總數，而是第一個長迴廊的得分權，但是長迴廊開始的時候可能是奇數或偶數個，無法預測，所以我們改觀察短迴廊的數量，可以整理出一個新的表：

	短迴廊總數為奇數	短迴廊總數為偶數
臨界筆畫為奇數	後手取得第一個長迴廊	先手取得第一個長迴廊
臨界筆畫為偶數	先手取得第一個長迴廊	後手取得第一個長迴廊

4.新想法

在得到第一個長迴廊得分權的表格後，每當遊戲進行到臨界狀態時，我們都可以對照表格找到是誰會取得，並且計算分數，後來我們發現，短迴廊中的兩格的數量是很關鍵的，當我們進行到臨界狀態時，如果到兩格時就先強迫對手取分藉此改變先後順序，也許是可以打破這個表格所列的先後順序，同樣的，對手也可以強迫我們取下下一個短迴廊，來轉換這個先後順序，也就是說，除了表格上的狀態，還要搭配格數為二的短迴廊個數，才能確保遊戲能夠照著計畫進行，如果為偶數個，那麼可以肯定的照著計畫走，而如果是奇數個，先後順序應該會有所改變。

伍、研究結果

一、3×3的必勝方法：

後手將遊戲結束時的長迴廊(格數為3格或3格以上)維持在奇數個或沒有，就能夠獲勝，採取風車式的方法可以有效阻絕先手的長迴廊發展。

二、長迴廊的製造方式

在圖形出現固定的狀態時，必定可以製造出一個以上的長迴廊。

三、臨界狀態筆畫以及短迴廊總數關係表：

	短迴廊總數為奇數	短迴廊總數為偶數
臨界筆畫為奇數	後手取得第一個長迴廊	先手取得第一個長迴廊
臨界筆畫為偶數	先手取得第一個長迴廊	後手取得第一個長迴廊

加上考慮格數為二的短迴廊數量，可以更精準掌控遊戲發展。

陸、討論

一、迴廊數量：

在3×3的狀況下，勝負的判定可以透過長迴廊的數個數來判斷，因此當我們在做$2 \times \mathrm{n}$的時候，也就直覺的用長迴廊數量來判斷，而大致上也都正確，直到我們認真去計算臨界筆畫數以及總迴廊個數，才發現原來長迴廊數量並不是絕對準確的判斷標準，而真正重要的是其中短迴廊的數量及臨界筆畫，也難怪我們一直嘗試用長迴廊個數去說明$2 \times \mathrm{n}$的狀況時往往都碰壁，但在3×3的狀況下，也許臨界筆畫數跟迴廊總數也有其中的關聯性，是可以去尋找的。

二、遊戲小技巧：

遊戲過程中，我們發現了一些小技巧，像是兩格的短迴廊強迫取分，以及用不取完長迴廊的方式來取得最後一個長迴廊的得分權，還有長迴廊的製作方式，這些是在真正認真遊玩之前無法想到的，還有許多看似合理的遊玩方式所創造出來的圖形，在加入了人為求勝的成分後，都顯得相當不合理，而這些都必須在無數次嘗試之後才會浮現出來，而在這麼多次嘗試後，我們發現，在$2 \times \mathrm{n}$的狀況下，也許可以在最旁邊先切割出一個兩格的短迴廊，情況也許可以與$2 \times (\mathrm{n}-1)$做一定程度的結合，也許會有些新發現。

三、後續發展方向：

這次處理了$2 \times \mathrm{n}$的勝負判斷方式，但還不夠完備，因為當 n 越來越大時，最後一個長迴廊若還是三格，也許在其中的效益就根本不值得爭取，所以我們認為最後一個長迴廊應該會隨著 n 的變大，而有所修正，才會符合其意義，而這次我們在臨界狀態下還排除了一個狀況，那個狀況如果加進來會更加的完備，

卻也會讓討論的難度提升不少。

柒、結論

這個遊戲看起來簡單，其中需要注意的點卻很多，狀況也很複雜，在這個狀況下不僅要顧及迴廊總數、臨界狀態的筆劃數、長短迴廊個數以及強迫取分狀態，在 3×3的狀況下，剛好在長迴廊奇數個跟偶數個可以判斷勝負，但在研究中我們發現，真正重要的並不是長迴廊個數，而是短迴廊個數與臨界筆畫，藉此來取得長迴廊的得分權，在這樣的狀況下，要有一個系統性的概念真的很困難，這次以筆畫的觀點去看，應該是算相當全面的，只是討論還不夠完備，比較可惜一點。

這次在格數小的時候有找到必勝的方式，卻沒有辦法推廣上去更多格數的狀況，僅能找到一些判斷方式，在遊玩的感覺倒有點像是在下圍棋，需要去思考對手以及每一筆畫的佈局，讓整體的情勢往有利的方向前進。

捌、參考資料及其他

一、朱昭維(2003) • Dots-and-Boxes 遊戲的研究(未出版的碩士論文)，臺北：國立政治大學應用數學系。

二、魏恩立(2015 年 5 月 21 日) • 響尾蛇的數學天地數學課程設計(dots&boxes) • 取自 https://sites.google.com/site/20931genetic/te-se-ke-cheng-she-ji/dotsandboxes

【評語】030414

此研究主題屬賽局問題探討（Dots and Boxes、點格棋）,運用邏輯推演討論幾類具體圖形的可行之策略,有趣的科展題目。作者從 2xn 的棋盤開始考慮，針對達到臨界情況時，那一種殘局對先手或後手而言是具有優勢作了討論與分析。此問題與一般的雙人對戰問題有一個關鍵的不同點（遊戲過程某一方可能連續走許多步），而這個關鍵的不同點也讓分析遊戲是否存在必勝策略變的更具難度。能從某一種特定的殘局（臨界狀態）著手，針對此種殘局的各類型態說明先後手誰較具有優勢是很不錯的想法。比較可惜的是，沒能給出一些更為具體的結論。需加強歸納論證,建議以演算法進行模擬,協助找出(或歸納)可行的策略。

作品海報

摘要

從遊玩Dots and Boxes中3x3的遊戲設定中發現必勝法，藉此推廣其方法至大小2xn的的狀況下，尋找其中的相關規律。

壹、研究動機

有一天，我們看到班導在玩方格子遊戲，我們跟他PK，可我們一直輸。於是我們在網路上搜尋這個遊戲，名稱叫做Dots and Boxes，和電腦練習好多次，但我們毫無頭緒的一直畫線，並不能想出好辦法，所以我們找數學老師一起來尋找這遊戲的規律以及必勝的方法，而我們就以這個主題來做科展。

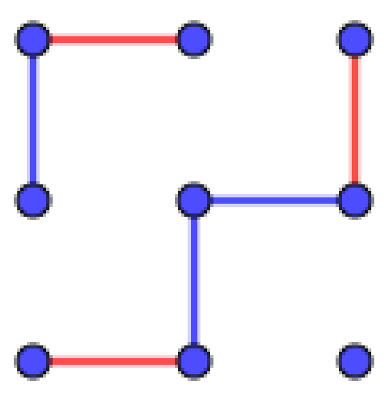
我們有參考過網路的相關資料，發現大多都是以正方形為主，於是我們有個大膽的想法，想用長方形來作為研究方向，以格數2×2開始，變成2×3、2×4，以這個順序，探討長迴廊和先後手間的關係，途中雖然遇到很多困難，但最後有找到一些影響勝利的可能因素，如果能夠都有所掌握，就能夠勝利，挺有成就感的，最後也贏了班導。

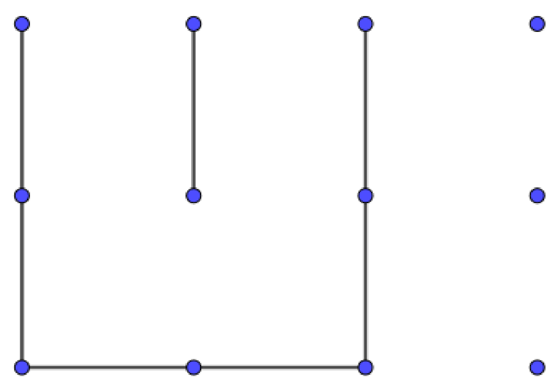
貳、研究過程或方法

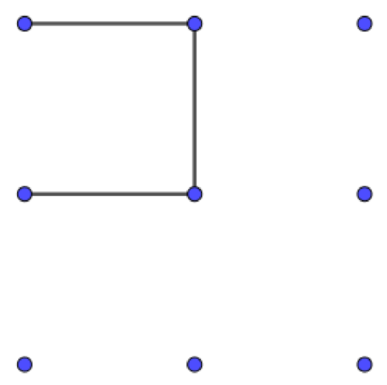
一、規則說明與運用定理

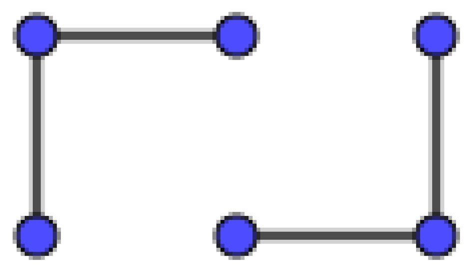
(一)名詞定義

1. 迴廊：一個單個或連在一起的方格，在被多畫上一步後就能夠完成其中所有方格的狀態。
2. 長迴廊：格數為三格以上的迴廊。如(圖一)、(圖二)
3. 短迴廊：格數小於三格的迴廊。 如(圖三)、(圖四)

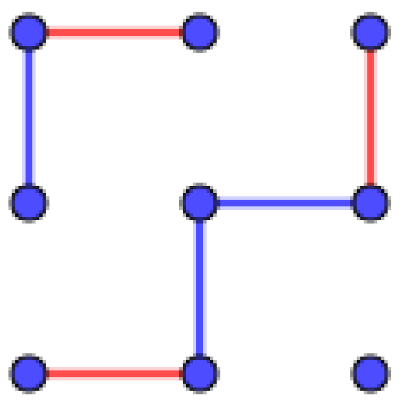

圖一

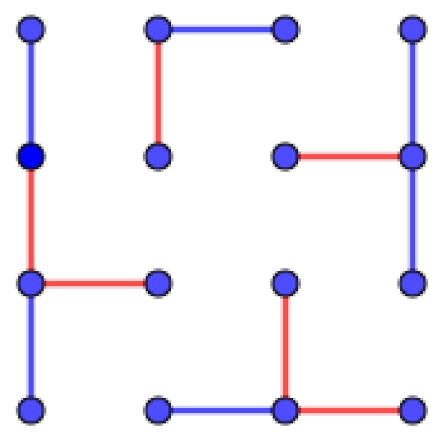

圖二


圖三


圖四

4. 臨界狀態：當遊戲進行到下一步無論畫在何處都會讓對手得分的狀態。如圖(五)、圖(六)


圖五


圖六

5. 臨界筆畫：當遊戲達到臨界狀態時的筆劃數量。
6. 強迫取分：在一個格數為二的短迴廊中，畫下一步讓對手必須在此迴廊得分的技巧。

(二)遊戲規則與研究範圍

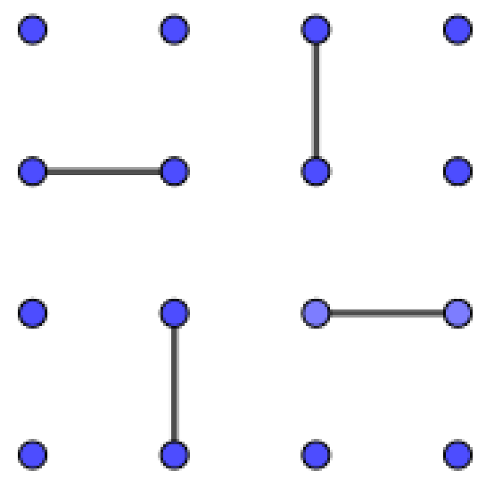
在$m\times n$個格子所組成的矩形中，雙方輪流畫一條垂直或水平的線，將連線區域封閉的人就佔有該格並且能夠再畫一條線，畫至沒有線可以畫至為止，誰獲得的格數較多就獲勝。

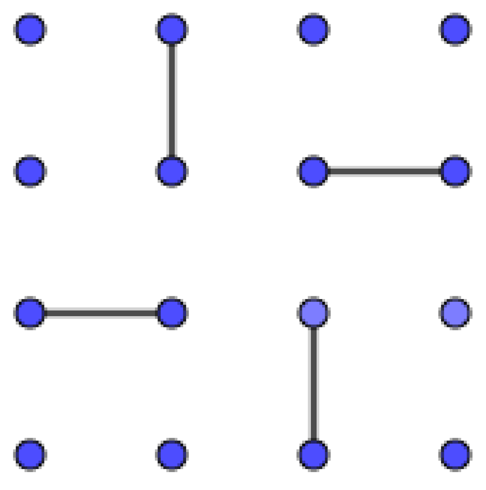
遊戲的變化相當多，在這次的研究中，我們只探討在達到臨界狀態前尚未有任何一方得方的時候，另外還有一個狀況在其中一個迴廊畫上一畫後，仍無法全部得分的狀況，就算在達到臨界狀態前尚未有人得分我們這次也不予討論。

二、經典3×3

3×3是一個非常經典且平衡的狀態，也因為格數是奇數，所以一定有勝負，在多局的演練中，參考了網路上的方式，我們發現了一些有趣的規律：

1. 因為3×3的狀況是一個正方形，所以有許多邊可以透過旋轉而相同。
2. 不同位置的邊有不同的功用，其中有一些邊非常重要，如圖七、圖八，甚至影響到勝負關鍵。
3. 後手讓整個圖形有偶數個長迴廊就能勝利，而這個條件是永遠都可以做到的，所以後手有必勝法。


圖七

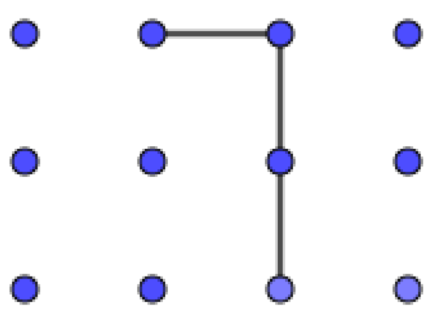

圖八

換個角度看，若先手玩家能夠創造奇數個長迴廊，就可以贏得勝利，但要製造長迴廊除了兩旁跟上下的路徑，剩下的就必須經過中間的格子，而不管是在旁邊或是中間的長迴廊，後手都可以先行將其切斷，讓其無法形成，這樣子的策略也被稱為「風車法」。

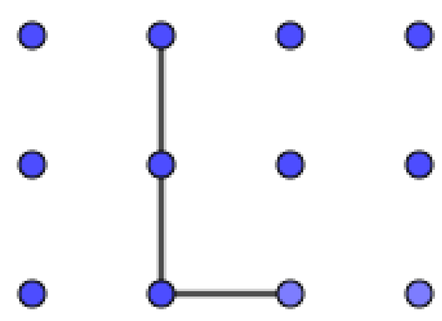
而我們好奇，若將格數縮小為$2\times n$是否長迴廊的個數與遊戲的先後順序是否會有一定的規律。

三、2×2～2×9 的發現

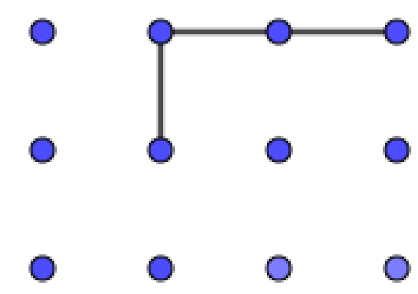
（一）長迴廊的製造方式



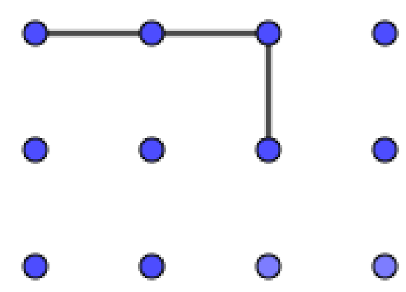
圖九



圖十

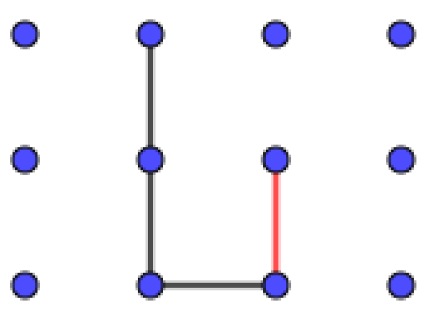


圖十一

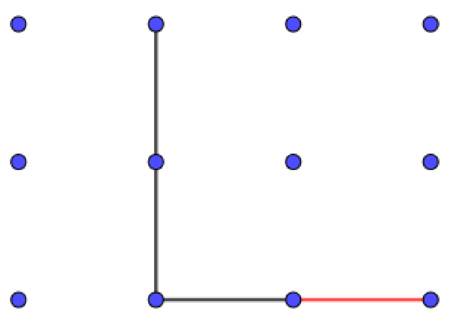


圖十二

若圖形形成上述的四個狀況，將發現必定會形成長迴廊，因為對手僅剩下下列兩個選擇：



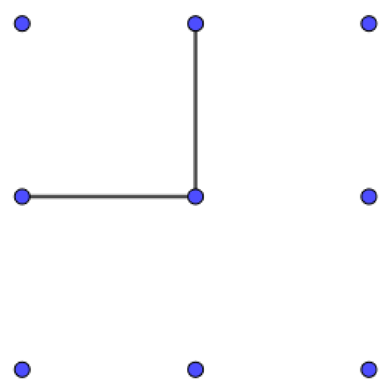
圖十三



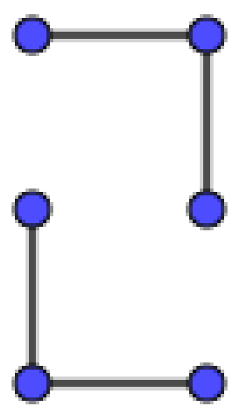
圖十四

若是左邊的狀況，則會丟失一格，一般人並不會採用這樣的方式，所以大多都採用右邊的方式，故可以製造出長迴廊。

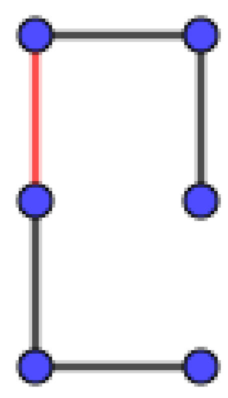
（二）短迴廊的功能與強迫取分



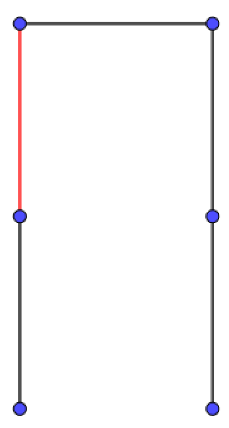
圖十五



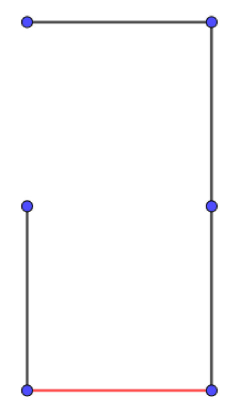
圖十六



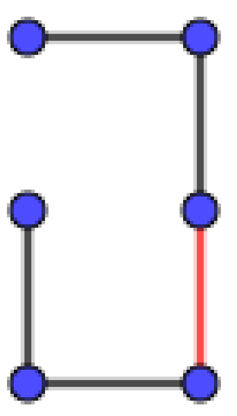
圖十七



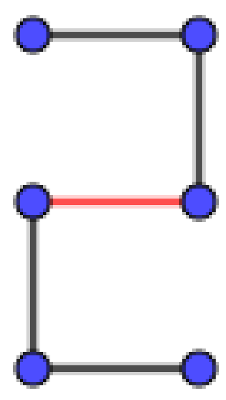
圖十八



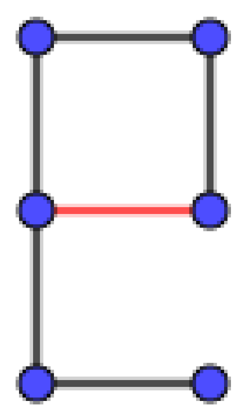
圖十九



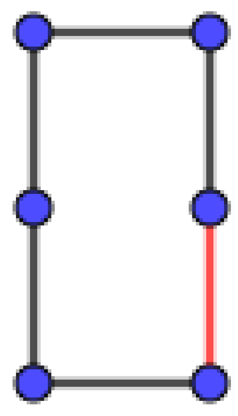
圖二十



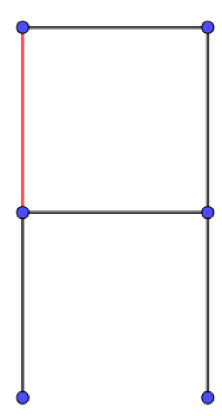
圖二十一



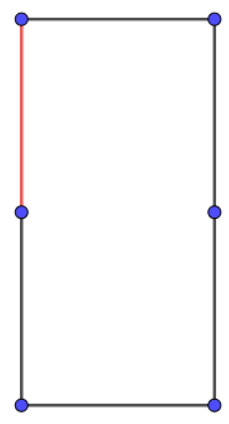
圖二十二



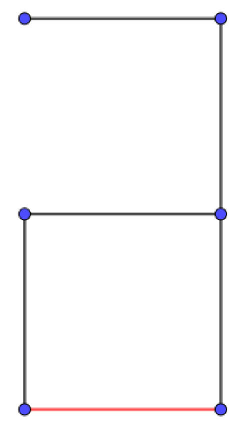
圖二十三



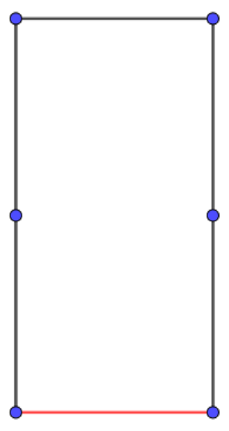
圖二十四



圖二十五



圖二十六



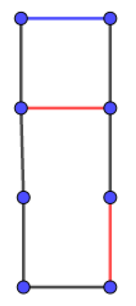
圖二十七

格數為一格的短迴廊僅有更改一次先後順序的功能，兩格的短迴廊則可以選擇不吃完讓對手必須吃完而產生先後順序的交換。

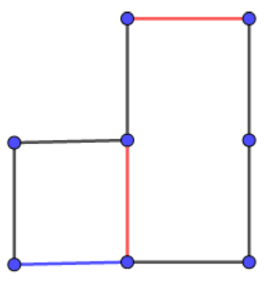
若將長短迴廊的個數與格數由小到大排列，觀察其與臨界筆畫的奇偶性則可以得到下列的表格：

	迴廊總數為奇數	迴廊總數為偶數
臨界筆畫為奇數	先手取得長迴廊	後手取得長迴廊
臨界筆畫為偶數	後手取得長迴廊	先手取得長迴廊

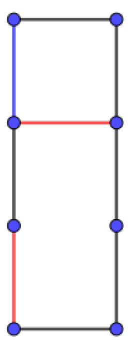
（三）長迴廊的特性



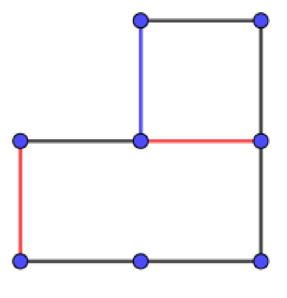
圖二十八



圖二十九



圖三十



圖三十一

長迴廊可以選擇不吃完，改以讓對手強迫取分的方式交換順序，若得到第一個長迴廊的控制權，則可以獲得最後一個長迴廊的控制權，所以如果將達到臨界狀態的長短迴廊數量由小到大排列，我們將可以知道是誰可以取得最後一個最長的迴廊。

參、研究結果

一、3x3的必勝方法：

後手將遊戲結束時的長迴廊(格數為3格以上)維持在奇數個或沒有，就能夠獲勝，採取風車式的方法可以有效阻絕先手的長迴廊發展。

二、長迴廊的製造方式

在圖形出現固定的狀態時，必定可以製造出一個以上的長迴廊。

三、臨界狀態筆畫以及短迴廊個數關係表：

加上考慮格數為二的短迴廊數量，可以更精準掌控遊戲發展。

	短迴廊總數為奇數	短迴廊總數為偶數
臨界筆畫為奇數	後手取得第一個長迴廊	先手取得第一個長迴廊
臨界筆畫為偶數	先手取得第一個長迴廊	後手取得第一個長迴廊

肆、討論

一、迴廊數量：

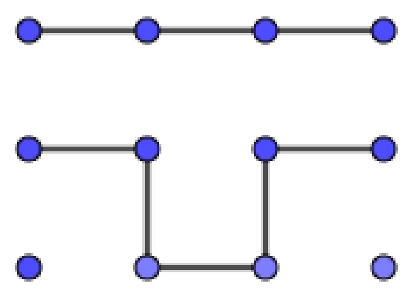
在3×3的狀況下，勝負的判定可以透過長迴廊的數個數來判斷，因此當我們在做$2 \times n$的時候，也就直覺的用長迴廊數量來判斷，而大致上也都正確，直到我們認真去計算臨界畫數以及總迴廊個數，才發現原來長迴廊數量並不是絕對準確的判斷標準，而真正重要的是其中短迴廊的數量及臨界筆畫，也難怪我們一直嘗試用長迴廊個數去說明$2 \times n$的狀況時往往都碰壁，但在3×3的狀況下，也許臨界畫數跟迴廊總數也有其中的關聯性，是可以去尋找的。

二、遊戲小技巧：

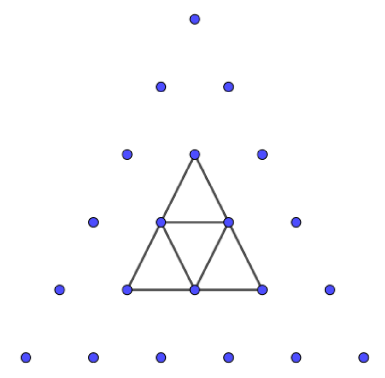
遊戲過程中，我們發現了一些小技巧，像是兩格的短迴廊強迫取分，以及長迴廊的未盡以取得最後一個長迴廊的得分權，還有長迴廊的製作方式，這些是在真正認真遊玩之前無法想到的，還有許多看似合理的遊玩方式所創造出來的圖形，在加入了人為求勝的成分後，都顯得相當不合理，而這些都必須在無數次嘗試之後才會浮現出來，而在這麼多次嘗試後，我們發現，在$2 \times n$的狀況下，也許可以在最旁邊先切割出一個兩格的短迴廊，情況也許可以與$2 \times (n-1)$做一定程度的結合，也許會有些新發現。

三、後續發展方向：這次處理了$2 \times n$的勝負判斷方式，但還不夠完備，因為當n越來越大時，最後一個長迴廊若還是三格，也許在其中的效益就根本不值得爭取，所以我們認為最後一個長迴廊應該會隨著n的變大，而有所修正，才會符合其意義，而這次我們在臨界狀態下還排除了一個狀況 ，那個狀況如果加進來會更加的完備，卻也會讓討論的難度提升不少。如(圖三十二)

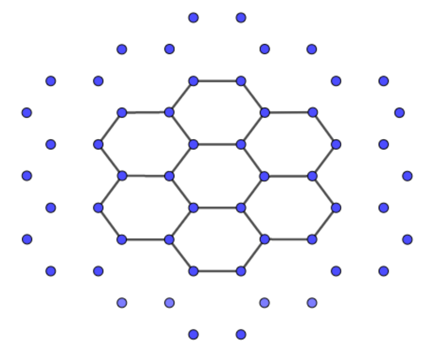
而將矩形的形式改為三角形或六角形(蜂巢狀)等等，去發現其中的規律，這是後續的挑戰之一，相對的也許難度會提升，也許會更容易完成。如(圖三十三)、 (圖三十四)



圖三十二



圖三十三



圖三十四

伍、結論

這個遊戲看起來簡單，其中需要注意的點卻很多，狀況也很複雜，在這個狀況下不僅要顧及迴廊總數、臨界狀態的筆劃數、長短迴廊個數以及強迫取分狀態，在3×3的狀況下，剛好在長迴廊奇數個跟偶數個可以判斷勝負，但在研究中我們發現，真正重要的並不是長迴廊個數，而是短迴廊個數與臨界筆畫，藉此來取得長迴廊的得分權，在這樣的狀況下，要有一個系統性的概念真的很困難，這次以筆畫的觀點去看，應該是算相當全面的，只是討論還不夠完備，比較可惜一點。

　　這次在格數小的時候有找到沒找到必勝的方式，卻沒有辦法推廣上去更多格數的狀況，僅能找到一些判斷方式，在遊玩的感覺倒有點像是在下圍棋，需要去思考對手以及每一筆畫的佈局，讓整體的情勢往有利的方向前進。

陸、參考資料及其他

一、 朱昭維(2003)˙Dots-and-Boxes遊戲的研究(未出版的碩士論文)，臺北：國立政治大學應用數學系。

二、魏恩立(2015年5月21日)˙響尾蛇的數學天地數學課程設計(dots&boxes)˙取自

https://sites.google.com/site/20931genetic/te-se-ke-cheng-she-ji/dotsandboxes