

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

團隊合作獎

030413

足球有多圓—多面體的表面積與體積探究

學校名稱：臺中市立清水國民中學

作者： 國三 陳 熹 國二 洪偉晉 國三 蕭羽希	指導老師： 洪嘉祥 王永賢
---------------------------------------	-------------------------

關鍵詞：足球、多面體、巴克球

摘要

在理化課老師介紹過巴克球，體育課踢過足球，兩者外型相同，但足球好圓，我們好奇這個多面體是否接近球體。

研究方法為選定正多面體及截角多面體，從十種多面體分別計算表面積、體積與其外接球表面積、體積的比值。

研究過程中，首先我們計算組成面正多邊形面積，其中以正五邊形及正十邊形，運用黃金比及複雜的根式計算，再計算多面體表面積。接著逐一推論多面體的外接球半徑、面心距，來計算多面體體積。最後數值分析這些多面體的覆蓋率與填充率，以數據為證，來說明巴克球確實相當接近球體。

本研究附加價值在於我們完全「沒有」使用三角函數，純粹以國中階段數學基礎進行研究。

壹、研究動機

足球一直是我們最喜歡的運動，在上理化課時，老師談到由碳原子所組成的一種特殊結構巴克球，即為富勒烯分子碳 60 (C_{60})，巴克球具有一種結構上的美，原因是甚麼呢？巴克球由正五邊形和正六邊形所構成與傳統足球的外型極為相似，巴克球看似球體，但從結構上分析似乎有些差異。

從數學的角度來說，巴克球屬於截角二十面體，什麼是截角二十面體呢？我們搜集一些資料後，發現截角二十面體，研究起來可不簡單，截角二十面體是將正二十面體的 12 個角截角，使其表面成為 12 個正五邊形及 20 個正六邊形，正二十面體那又是什麼呢？

原來在幾何學中有所謂的正多面體，又稱為柏拉圖立體，其中包括了正四面體、正六面體（立方體）、正八面體、正十二面體和正二十面體，這些正多面體具有等邊、等角和等面積特徵的多面體。

我們感到好奇為什麼只有這五種呢？有沒有其他的正多面體？不然就有機會找到非常接近足球表面積的正多面體了，那麼正多面體都有截角嗎？再進一步研究發現正多面體可經過截角、截半、截邊等操作構造成阿基米德立體，哇不得了！阿基米德立體有十三種，我們選定五種截角多面體一起研究比較，分別為截角四面體、截角立方體、截角八面體、截角十二面體、和截角二十面體（巴克球）。

從足球到巴克球，再到正多面體、截角多面體，這些多面體高度相關，因此我們決定往這方向來研究。

貳、研究目的

- 一、平面上基本幾何圖形面積公式推導，含有六個：正三邊形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形和正十邊形。
- 二、正多面體與截角多面體，設定多面體的邊長 a ，求出對應的外接球半徑 R_n 。
- 三、推導多面體組成面的正多邊形之面心距，面心距是指多面體組成面之正多邊形外心到多面體外接球之球心的距離，正多面體只有一個面心距 h_n ，截角多面體除短面心距 h_n ，還有另一個長面心距 H_n 。
- 四、透過正多邊形面積公式計算，來計算多面體的表面積 A_n 與其外接球表面積 $4\pi R_n^2$ 的比值 c_n ，這裡定義 c_n 為覆蓋率(Coverage)。
- 五、利用角錐面積公式和面心距，來計算多面體的體積 V_n 與其外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ 的比值 f_n ，這裡定義 f_n 為填充率(Fill rate)。
- 六、數值分析正多面體與截角多面體的表面積、體積及其外接球表面積、體積的比值 c_n 與 f_n 的關係，探討彼此間的誤差及可能的原因。
- 七、分析討論巴克球在半世紀前被選為足球結構的原因為何？

參、研究設備及器材

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 一、桌上型電腦數台 | 七、西卡紙 |
| (一) Intel Core i3-8100 CPU 3.6GHz | 八、剪刀 |
| (二) 8.0 GB RAM | 九、膠水 |
| 二、平板電腦 | 十、直尺 |
| (一) Samsung Tab A(2107) | 十一、電腦軟體： |
| (二) Ipad mini 4 | (一) photoimpact X3 |
| 三、手機 | (二) excel 2016 |
| 四、計算機 | (三) dev c++ ver 5.11 |
| 五、印表機 | (四) origin 6.0 professional |
| 六、影印機 | (五) GeoGebra |

肆、研究過程或方法

- 一、文獻探討
 - (一) 在幾何學中，(凸)正多面體，又稱為柏拉圖立體，是指各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體，是一種三維的正幾何形狀，符合這種特性的立體總共只有5種。
正多面體可經過「幾何證明」來證明正多面體只有五個：**【1】**

1. 多面體的每個頂點至少在三個面以上。
2. 多面體展開圖共頂點的角度和小於 360° 。
3. 正多面體的頂點發出的角是相等的，所以這個角必須小於 $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ 。
4. 正六邊形及邊數更多的正多邊形的內角大於等於 120° ，所以正多面體上的組成面只能是正三角形，正方形或正五邊形。
於是：

- (1) 正三角形：每個角是 60° ，所以正多面體每個頂點發出的角數目小於 $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ ，也就是每個頂點只能被三、四、五個面共構，這分別對應於正四面體、正八面體、正二十面體。
- (2) 正方形：每個角是 90° ，所以正多面體每個頂點發出的角數目小於 $\frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$ ，也就是每個頂點只能被三個面共構，這對應於正方體。
- (3) 正五邊形：每個角是 108° ，所以正多面體每個頂點發出的角數目小於 $\frac{360^\circ}{108^\circ} = \frac{10}{3}$ ，也就是每個頂點只能被三個面共構，這對應於正十二面體。

(二) 判斷正多面體的依據有三條：

1. 正多面體的面由相同之正多邊形構成
2. 正多面體各個頂角相等
3. 正多面體各條棱邊都等長

(三) 正多面體又稱柏拉圖立體是因柏拉圖而命名的。柏拉圖將這些立體寫在《蒂邁歐篇》(Timaeus)內。而正多面體的作法卻早收錄於西元前 300 年歐幾里得所著的《幾何原本》的第 13 卷內。存在的(凸)正多面體共有五個，均由古希臘人發現。【2】

(四) 巴克球屬於截角二十面體，截角二十面體是截角多面體的一種，截角多面體分成 11 種，將截半多面體 2 種合起來一起算稱為阿基米德立體(Archimedean Solid)。

(五) 阿基米德立體是一種高度對稱的半正多面體，使用兩種以上的「正多邊形」為面的凸多面體，並且都是可以從「正多面體」經過截角、截半、截邊或形變等操作構成。

(六) 阿基米德立體的每個頂點的情況相同，共有 13 種。【3】

(七) 截角二十面體背景探索：

1. 在幾何學中，截角二十面體是一種由 12 個正五邊形和 20 個正六邊形所組成的(凸)半正多面體，同時具有每個三面角等角和每條邊等長的性質，因此屬於阿基米德立體，但由於其並非所有面全等因此不能算是正多面體。

- 由於其表面包含了正五邊形和正六邊形，這種結構最早由達文西給予描述，後來出現於許多藝術創作和學術研究中。
- 自 1970 年墨西哥足球世界盃之後，這種形狀成為了足球的代表性形狀，並且會在六邊形塗上白色、五邊形塗上黑色，如圖 1 及圖 2 所示。



圖 1



圖 2

- 在科學領域中，這種形狀亦有許多用途，例如建築學家巴克明斯特·富勒提出的網格球頂（Geodesic dome）結構，如圖 3；巴克明斯特富勒烯分子（ C_{60} ）也是這種形狀，如圖 4。



圖 3

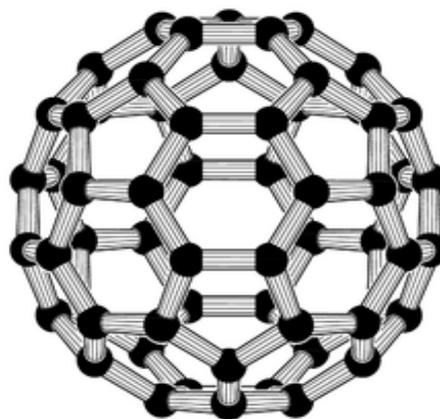
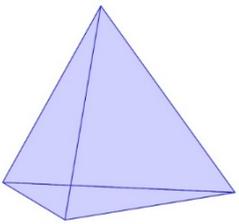
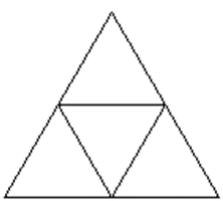
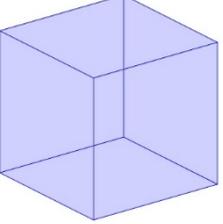
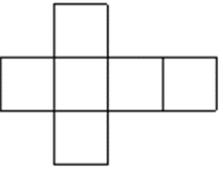
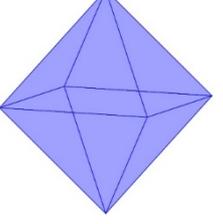
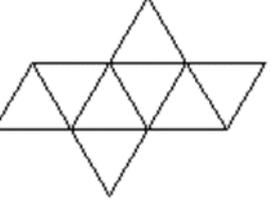
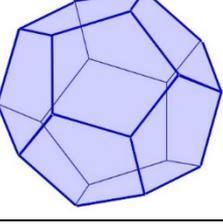
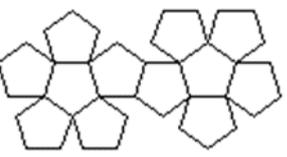
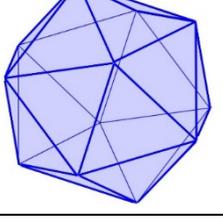
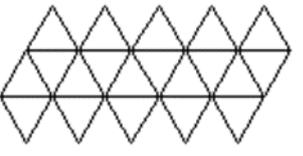


圖 4

- 截角二十面體共有 90 條棱和 60 個頂點，正二十面體是由 20 個正三角形組成。把正二十面體的棱做三等分，然後把正二十面體的所有 12 個頂點削去，則 20 個正三角形的面就得到了 20 個正六邊形，而每個頂點由上述三等分點形成的正五邊形代替，這就形成了截角二十面體。由於正二十面體有 20 個正三角形的面，30 條棱。每條棱做三等分則有 2 個分割點，由此削去正二十面體所有 12 個頂點後得到的截角二十面體有 60 個頂點。【4】

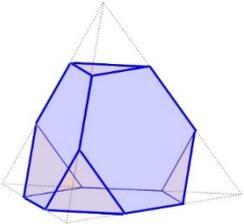
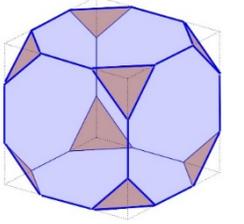
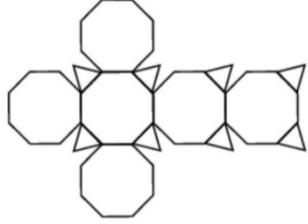
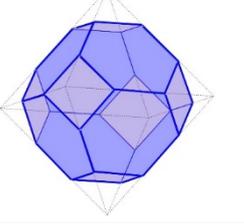
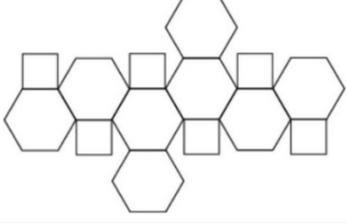
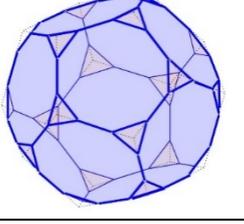
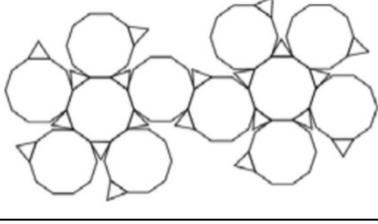
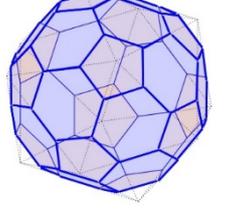
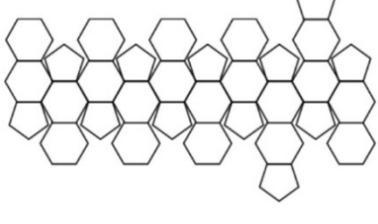
二、結構分析

(一) 正多面體的外形分析

名稱	透視圖	展開圖	構成面	面數	邊數	頂點數
正四面體			正三角形	4	6	4
正六面體 (正立方體)			正方形	6	12	8
正八面體			正三角形	8	12	6
正十二面體			正五邊形	12	30	20
正二十面體			正三角形	20	30	12

(二) 截角多面體的外形分析

1. 將正多面體的每個角截角，則每條邊會產生 2 個分割點，所以截角多面體邊數 = 正多面體的邊數 \times 3。
2. 截角多面體總面數 = 正多面體面數 + 正多面體頂點數。

名稱	透視圖	展開圖	構成面	面數	總面數	邊數	頂點數
截角四面體			正三角形	4	8	18	12
			正六邊形	4			
截角立方體			正三角形	6	14	36	24
			正八邊形	6			
截角八面體			正方形	6	14	36	24
			正六邊形	8			
截角十二面體			正三角形	20	32	90	60
			正十邊形	12			
截角二十面體 (巴克球)			正五邊形	12	32	90	60
			正六邊形	20			

(三) 我們透過立體圖展開後的平面圖研究，實作多面體，以利對結構的了解。

(四) 由上十種多面體歸納出，包覆多面體的正多邊形有下列六種：

(假設正多面體邊長皆為 a)

1. 正三角形面積 = $(a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a) \div 2 = (\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)$ ，如圖 6
2. 正方形面積 = a^2 ，如圖 7
3. 正五邊形面積計算：

如圖 8 所示 $\overline{AC} = a$ ，正五邊形內角 = $\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$ ，

$$\text{則 } \angle ABC = \angle CAB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \angle ACE$$



圖 5

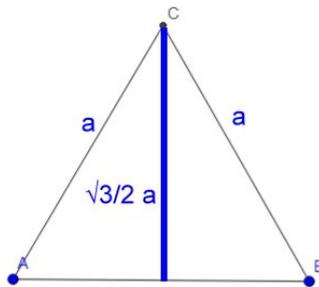


圖 6

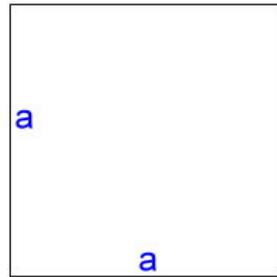


圖 7

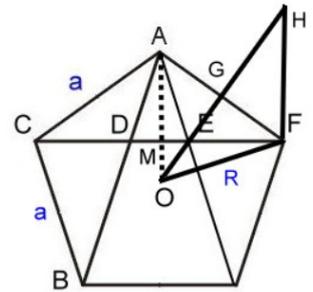


圖 8

因為 $\angle ACE = 36^\circ$ ，且 $\angle DAE = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$
 $\angle ADE = \angle AED = 72^\circ$ ，且 $\angle CAE = \angle CEA = 72^\circ$
 故 $\triangle ACE \sim \triangle EAD$ (AAA 相似)

所以 $\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{DE}$ ， $AE = AD = CD$ (等腰三角形性質)

得 $\frac{a}{AE} = \frac{AE}{a - CD} = \frac{AE}{a - AE}$ ，利用配方法得 $AE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a$

$$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2} a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a$$

$$\overline{AB} = \overline{CF} = \overline{CE} + \overline{DF} - \overline{DE} = a + a - \frac{3-\sqrt{5}}{2} a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a = \varphi a$$

其中 $\varphi = \frac{\overline{AB}}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 為 $36^\circ-36^\circ-108^\circ$ 等腰三角形的邊長比例關係 (黃金比例)

作 \overline{OH} 為 \overline{AF} 的中垂線，則 $\angle AOG = \angle FOG = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ$

$$\text{且 } \overline{OF} = \overline{HF}$$

得 $\triangle OFG \cong \triangle HFG$ (AAS 性質)

又 $\triangle OFH \sim \triangle CAF$ 具有 $36^\circ-36^\circ-108^\circ$ 等腰三角形：

$$\text{所以 } \overline{OG} = \frac{\overline{OH}}{2} = \frac{1}{2}R\varphi$$

且在 $\triangle OFG$ 中 $\overline{FG} = \frac{1}{2}a$ ，令 $\overline{OF} = R$

直角三角形 $\triangle OFG$ 中 $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R\varphi\right)^2 = R^2$ (商高定理)

$$\text{得 } \frac{a}{R} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}，\text{ 則五邊形外接圓半徑 } R = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \times a = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}a$$

$$\text{故正五邊形面積} = \left(\frac{1}{2} \times \overline{MF} \times R\right) \times 5 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\varphi a \times R\right) \times 5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{5}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}a^2 \\ &= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 \end{aligned}$$

4. 正六邊形面積計算：

∵ 正六邊形為六個正三角形組成

∴ 正六邊形面積 = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ，如圖 9

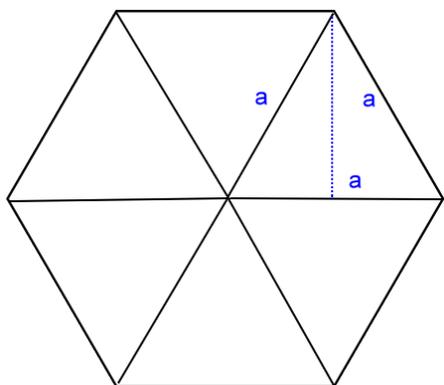


圖 9

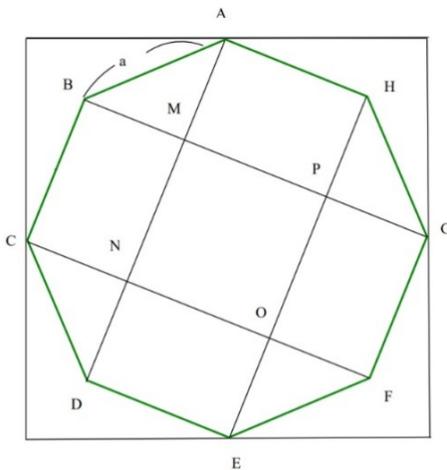


圖 10

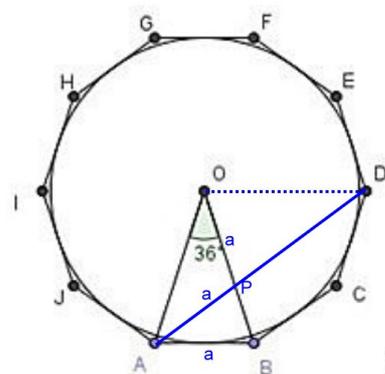


圖 11

5. 正八邊形 ABCDEFGH 面積計算：

$\angle ABM = \angle BAM = 45^\circ$ ，且 $\overline{AM} \perp \overline{BM}$ ，故 $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

八邊形面積 = $4 \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\right) + 4 \times \left(a \times \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + a \times a = (2 + 2\sqrt{2})a^2$ ，如圖 10

6. 正十邊形 ABCDEFGHIJ 面積計算：

$\angle AOD = 36^\circ \times 3 = 108^\circ$ ，故 $\angle AOP = 36^\circ$ ，則 $\angle PAB = 36^\circ$ ， $\triangle APB$ 與 $\triangle APO$ 為

等腰三角形，且 ΔAPO 為 $36^\circ-36^\circ-108^\circ$ 等腰三角形， $\overline{OA} = \varphi \times a$ ，

所以正十邊形外接圓半徑 = $\frac{\sqrt{5+1}}{2} a$

$$\Delta OAB \text{ 以 } \overline{AB} \text{ 為底的高} = \sqrt{(\varphi a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \times \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} a$$

正十邊形面積 = $10 \times a \times \left(a \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times a^2$ ，如圖 11

三、多面體邊長為 a 時的表面積為 A_n

(一) 正四面體表面積 $A_1 = 4$ 個正三角形面積和 = $4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

(二) 正六面體 (立方體) 表面積 $A_2 = 6$ 個正方形面積和 = $6 \times a^2$

(三) 正八面體表面積 $A_3 = 8$ 個正三角形面積和 = $8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

(四) 正十二面體表面積 $A_4 = 12$ 個正五邊形面積和 = $12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right)$

(五) 正二十面體表面積 $A_5 = 20$ 個正三角形面積和 = $20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

(六) 截角四面體表面積 $A_6 = 4$ 個正三角形面積與 4 個正六邊形面積和
 = $4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 4 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

(七) 截角立方體表面積 $A_7 = 8$ 個正三角形面積與 6 個正八邊形面積和
 = $8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 6 \times (2 + 2\sqrt{2}) a^2$

(八) 截角八面體表面積 $A_8 = 6$ 個正方形面積與 8 個正六邊形面積和
 = $6 \times a^2 + 8 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

(九) 截角十二面體表面積 $A_9 = 20$ 個正三角形面積與 12 個正十邊形面積和
 = $20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 12 \times \left(\frac{5}{2} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times a^2\right)$

(十) 截角二十面體表面積 $A_{10} = 12$ 個正五邊形面積與 20 個正六邊形面積和
 = $12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right) + 20 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$

四、截角多面體面心距：

(一) 截角多面體有外接球半徑，有內切球半徑嗎？

如圖 12 所示，以巴克球為例，假設內切球存在， O 為內切球圓心， P 、 Q 分別是五邊形與六邊形切點，依商高定理得到： $d^2 = r_1^2 + R^2 = r_2^2 + a^2$

其中 $R = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}a < a$ ，所以 $r_1 \neq r_2$ ，

且 $R < a$ ，故 $r_1 > r_2$

因此截角二十面體無內切球。

五種正多面體的表面由相同的正多邊形組成，五種截角多面體表面卻由兩種不同的正多邊形組成，從上面截角二十面體的內切球半徑研究，發現截角二十面體找不到內切球半徑，因此其它截角多面體一樣沒有內切球。

我們定義截角多面體組成面之正多邊形到中心點的距離為面心距，較長的為 H_n 和較短的為 h_n ，如果算出面心距，只要從球心向各組成面切割成角錐，利用角錐體積公式，就能計算多面體體積。

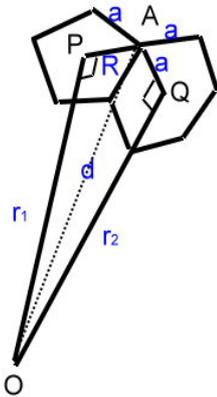


圖 12

(二)截角多面體組成面之正多邊形面積越大，面心距就越小

如圖 13， \overline{AB} 為正多邊形的一邊，已知 $\angle ACB = 120^\circ$ ， $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle AEB = 72^\circ$ ， $\angle AFB = 60^\circ$ ， $\angle AGB = 45^\circ$ ， $\angle AHB = 36^\circ$ ，此時，C、D、E、F、G、H 各為正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形、正八邊形及正十邊形的外心。

也就是說，平面上，邊長相等的正多邊形，當邊數越大，外接圓半徑就越大。

截角多面體或是正多面體，其組成面之面心距計算都可以由以下方式計算：

依商高定理，(外接球半徑平方－正多邊形外接圓半徑平方)再開方可得。所以截角多面體的組成面正多邊形邊數越多，則外接圓半徑越大，會使面心距越小。

也可以這樣說，當截角多面體的兩種組成面的面積差越大，則面心距差異性就越大；當截角多面體的兩種組成面的面積差越小，則面心距差異性就越小。

足球比賽在發定點球，常有球員在發定點球所處位置，用腳將草地鏟土堆高地表，然後擺球於其上頭，目的是把球的質心提高，易於踢好球。假若用巴克球當足球那麼將五邊形擺放在接觸的地表，將有助球員踢球的表現。且雖然正五邊形的面心距 H_n 大於六邊形的面心距 h_n ，但兩者差異若不大，便不會過於影響足球運動。

五、多面體邊長 a 與外接球半徑 R_n 的關係

(一)正四面體邊長 a 與外接球半徑 R_1 的關係：

1. 如圖 14，正四面體 ABCD，邊長 a ，外接球半徑 R_1 ，球心 O

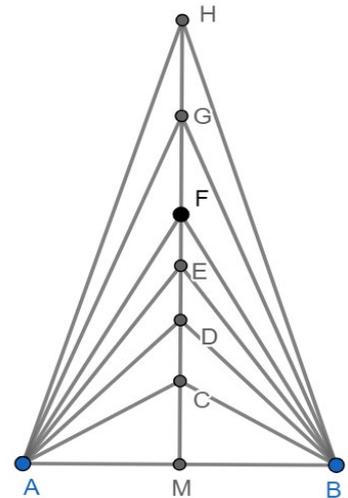


圖 13

2. F 為 \overline{CD} 上之中點
3. \overline{AE} 與 \overline{BF} 垂直於 E
4. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R_1$ 且 $\overline{OE} = \overline{AE} - R_1$
5. $\overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{BE}^2$
6. $\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BF}$ (正三角形重心性質)

$$7. R_1^2 = (\overline{AE} - R_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3}\right)^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$8. \overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$$

$$9. a^2 = \overline{AE}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3}\right)^2$$

$$10. \overline{AE}^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2$$

$$11. \overline{AE} = \sqrt{\frac{2}{3}}a \dots\dots\dots \text{代入(1)式}$$

$$12. R_1^2 = \frac{2}{3}a^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}aR_1 + R_1^2 + \frac{1}{3}a^2$$

$$13. 2\sqrt{\frac{2}{3}}aR_1 = a^2$$

$$14. \text{所以 } R_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

$$15. \Delta ABCD \text{ 的面心距 } h_1 = \overline{OE} = \overline{AE} - R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

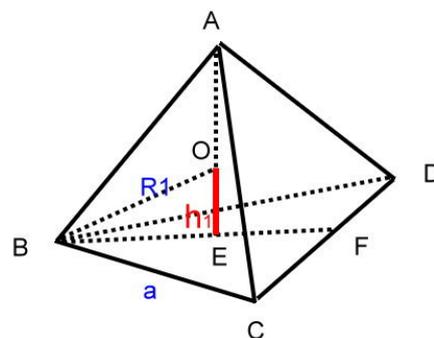


圖 14

(二) 正六面體邊長 a 與外接球半徑 R_2 的關係：

1. 如圖 15，正六面體邊長 a ，其外接球球心 O
2. 外接球半徑 R_2

$$3. \overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

$$4. R_2^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$5. R_2 = \sqrt{\frac{2}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2}$$

$$6. R_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}a \text{ 故 } R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

7. 正立方體之正方形面的面心距

$$h_2 = \overline{OC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a}{2}$$

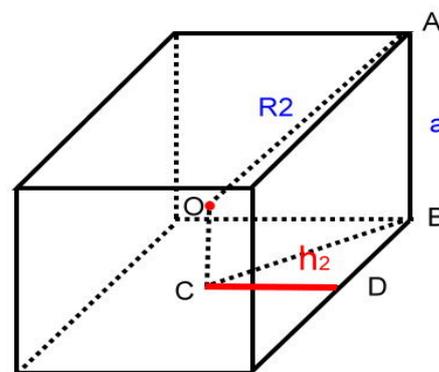


圖 15

(三) 正八面體邊長 a 與外接球半徑 R_3 的關係：

1. 如圖 16，正八面體邊長 a ，其外接球半徑 R_3

$$2. a^2 = R_3^2 + R_3^2$$

$$3. R_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

4. $\triangle ABC$ 的面心距 $h_3 = \overline{OD}$

$$5. \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2 = R_3^2 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{1}{6}a^2$$

$$6. \text{故 } h_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

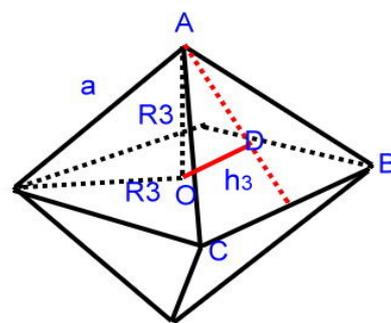


圖 16

(四) 正十二面體邊長 a 與外接球半徑 R_4 的關係：

1. 如圖 17，正十二面體內鑲有正六面體，若十二面體邊長為 a ，外接球半徑為 R_4 ，其內鑲有一正方體邊長為 \overline{AB} 。

2. \overline{AB} 為正五邊形的對角線，如下圖所示，於前面正五邊形面積分析中知道

$$\overline{AB} = \overline{CF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a, \text{ 其中 } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (黃金比例)}$$

3. 再利用正六面體邊長 \overline{AB} 與外接球半徑 R_4 的關係

$$\text{得 } R_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$$

4. 圖 17 中，P 為組成面正五邊形的外接圓圓心，面心距 $h_4 = \overline{OP}$

5. $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2$ ， \overline{AP} 為正五邊形外接圓半徑 $R = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}a$ ，前面已證明。

$$6. \overline{OP}^2 = R_4^2 - \left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} \times a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a\right)^2 - \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{20}\right)a^2 = \frac{25+11\sqrt{5}}{40}a^2$$

$$7. \text{故 } h_4 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}a$$

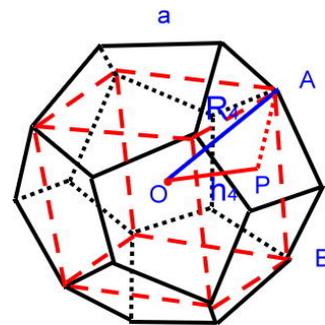


圖 17

(五) 正二十面體邊長 a 與外接球半徑 R_5 的關係：

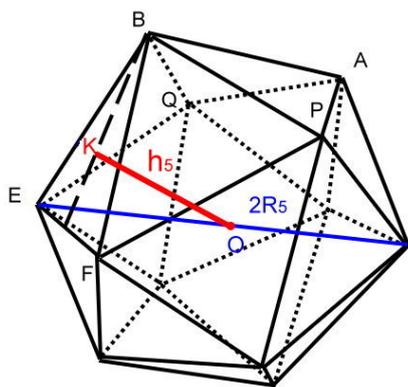


圖 18

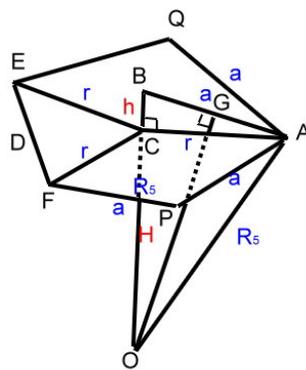


圖 19

1. 依圖 18，正二十面體的兩個最遠頂點間的距離為外接球之直徑長 $2R_5$ 。
2. 正二十面體對稱的性質，取立體圖中上層結構五角錐AQEFPB，如圖 19：
 - (1) 如上右圖，O 為正二十面體外接球的球心，則 $h = \overline{BC}$ ， $H = \overline{CO}$ ， $\overline{OA} = R_5$

因為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AOC$ 為直角三角形，所以有下列關係式：

$$\begin{cases} h^2 = a^2 - r^2 \\ H^2 = R_5^2 - r^2 \\ R_5 = h + H \end{cases}$$

解上面的方程式，將 $H = R_5 - h$ 代入 $H^2 = R_5^2 - r^2$ 得

$$(R_5 - h)^2 = R_5^2 - r^2$$

則 $h^2 = 2R_5h - r^2$ ，將 $h = \sqrt{a^2 - r^2}$ 代入

$$a^2 = 2R_5 \times \sqrt{a^2 - r^2}$$

故 $R_5 = \frac{a^2}{2 \times \sqrt{a^2 - r^2}}$ ，將正五邊形外接圓半徑與邊長關係 $r = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} a$ 代入

$$R_5 = \frac{a}{2 \times \sqrt{1 - \frac{10+2\sqrt{5}}{20}}} = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
，左式上下同乘 $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$$\text{獲得 } R_5 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a$$

3. 以圖 18 為例， $\triangle BEF$ 的外心 K，則面心距 $h_5 = \overline{OK}$
4. $\overline{OK}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{KE}^2 = R_5^2 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2 = \frac{14+6\sqrt{5}}{48} a^2$
5. $\overline{OK}^2 = \frac{14+2\sqrt{45}}{48} a^2 = \frac{(\sqrt{9}+\sqrt{5})^2}{48} a^2$
6. 故 $h_5 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}}{12} (3 + \sqrt{5}) a$

(六) 截角四面體邊長 a 與外接球體半徑 R_6 的關係：

1. 如圖 20，截角四面體外接球半徑 $R_6 = \overline{OA}$ ，O 為外接球的球心， $\overline{AB} \perp \overline{OB}$ ，正四面體外接球半徑 $R_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(3a)$ ，

$$\text{則 } \overline{OB}^2 = R_6^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R_1^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2,$$

2. $R_6^2 = \frac{54}{16}a^2 - \frac{8}{4}a^2$ ，故 $R_6 = \frac{\sqrt{22}}{4}a$
3. 圖中 H_6 與 h_6 分別為正三角形與正六邊形的面心距，

$$\text{則 } H_6^2 = R_6^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{22}{16}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{25}{24}a^2,$$

$$\text{故 } H_6 = \frac{5\sqrt{6}}{12}a$$

4. 而 h_6 為原邊長 $3a$ 的正四面體之組成面正三角形的面心距，則 $h_6 = \frac{\sqrt{6}}{12} \times (3a)$

5. 故 $h_6 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

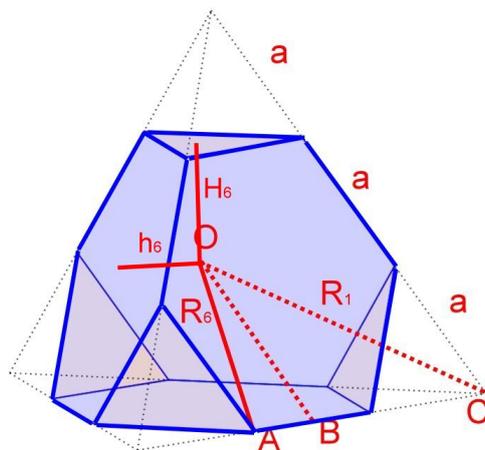


圖 20

(七) 截角六面體(截角立方體)邊長 a 與外接球半徑 R_7 的關係：

1. 如圖 21，外接球體半徑 $R_7 = \overline{OC}$ ，O 為截角六面體外接球的球心， $\overline{CB} \perp \overline{OB}$ ，且正立方體邊長 $\overline{DE} = (1 + \sqrt{2})a$ ，則正立方體外接球半徑 $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (1 + \sqrt{2})a$

2. 其中 $\overline{OB}^2 = R_7^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R_2^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$
3. $R_7^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \times (1 + \sqrt{2})a\right]^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ，

$$\text{故 } R_7 = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}a$$

4. 圖 21 中， H_7 與 h_7 分別為正三角形與正八邊形的面心距，

$$\text{則 } H_7^2 = R_7^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{7+4\sqrt{2}}{4}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{17+12\sqrt{2}}{12}a^2,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } H_7 &= \sqrt{\frac{17+12\sqrt{2}}{12}}a = \frac{\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{9})^2}}{2\sqrt{3}}a \\ &= \frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{6}a \end{aligned}$$

5. 而 h_7 為原邊長 $(1 + \sqrt{2})a$ 的正立方體之正方形的面心距，則 $h_7 = \overline{OA} = \frac{1}{2} \times (1 + \sqrt{2})a$
6. 故 $h_7 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}a$

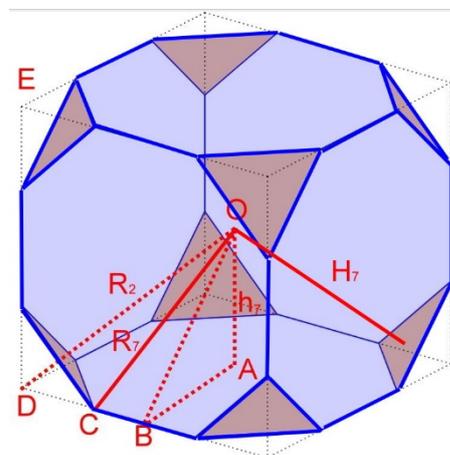


圖 21

(八) 截角八面體邊長 a 與外接球半徑 R_8 的關係：

1. 如圖 22 示外接球半徑 $R_8 = \overline{OC}$ ， O 為截角八面體外接球的球心， B 為正六邊形的外心， $\overline{CB} \perp \overline{OB}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{OB}$ ，因為原正八面體邊長 $\overline{AD} = 3a$ ，則正八面體外接球半徑 $R_3 = \overline{OA} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times (3a)，其中 \overline{BC} = a，\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3a = \sqrt{3}a$$

2. 則 $\overline{OB}^2 = R_8^2 - \overline{BC}^2 = R_3^2 - \overline{AB}^2$ ，

$$R_8^2 - a^2 = R_3^2 - (\sqrt{3}a)^2$$

3. $R_8^2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times (3a) \right]^2 - 3a^2 + a^2$ ，故 $R_8 = \frac{\sqrt{10}}{2} a$

4. 圖 22 中， \overline{OE} 為正四邊形的面心距 H_8 ， \overline{OB} 為正六邊形的面心距 h_8

5. $H_8^2 = R_8^2 - \overline{CE}^2 = \frac{10}{4} a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2$

6. 故 $H_8 = \sqrt{2}a$

7. 而 h_8 為原邊長 $3a$ 的正八面體之組成面正三角形的面心距，

8. 則 $h_8 = \overline{OB} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times 3a = \frac{\sqrt{6}}{2} a$

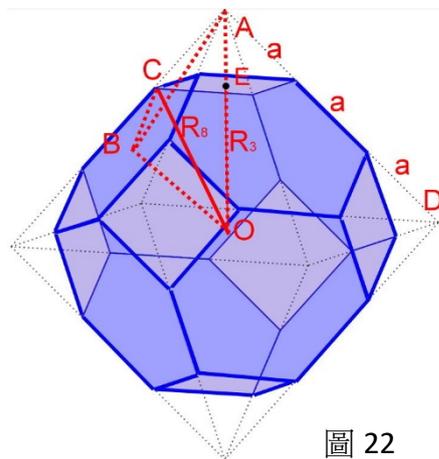


圖 22

(九) 截角十二面體邊長 a 與外接球半徑 R_9 的關係：

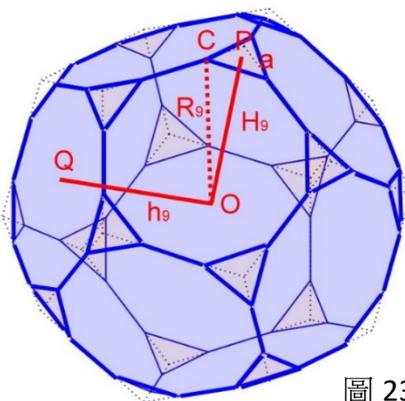


圖 23

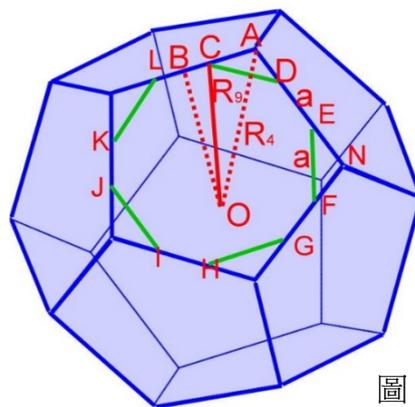


圖 24

1. 如圖 23 及圖 24 所示，外接球體半徑 $R_9 = \overline{OC}$ ， O 為截角十二面體外接球的球心， $\overline{CB} \perp \overline{OB}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{OB}$ ，

2. 因為 CDEFGHIJKL 為正十邊形，內角為 144° ，故 $\angle ACD = 36^\circ$ ， $\triangle ACD$ 為 36° - 36° - 108° 等腰三角形。

3. 邊長 $\overline{AD} = \frac{a}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a$ ，則原正十二面體邊長 $\overline{AN} = \left(1 + 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) a = \sqrt{5}a$ ，故

$$正十二面體外外接球半徑 R_4 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4} \times (\sqrt{5}a) = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{4} a$$

4. 圖 24 中 $\overline{OB}^2 = R_9^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = R_4^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2$

5. $R_9^2 = \left[\frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{4}a\right]^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$,

6. 故 $R_9 = \frac{\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{4}a$

7. 左圖中 \overline{OP} 為正三角形的面心距 H_9 ， \overline{OQ} 為正十邊形的面心距 h_9

8. $H_9^2 = R_9^2 - \overline{CP}^2 = \left(\frac{\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{4}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}a\right)^2 = \left(\frac{37+15\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3}\right)a^2$

9. 故 $H_9 = \sqrt{\frac{103+45\sqrt{5}}{24}}a$

10. 而 h_9 為原邊長 $\sqrt{5}a$ 的正十二面體之組成面正五邊形的面心距，則

$$h_9 = \overline{OQ} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \times (\sqrt{5}a) = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{8}}a$$

(十) 截角二十面體邊長 a 與外接球半徑 R_{10} 的關係

1. 把正二十面體的邊做三等分，則 20 個正三角形的面就得到了 20 個正六邊形，同時把正二十面體的所有 12 個頂點削去，則每個頂點由上述三等分點形成的正五邊形代替，這就形成了截角二十面體，如圖 25 及圖 26 所示。

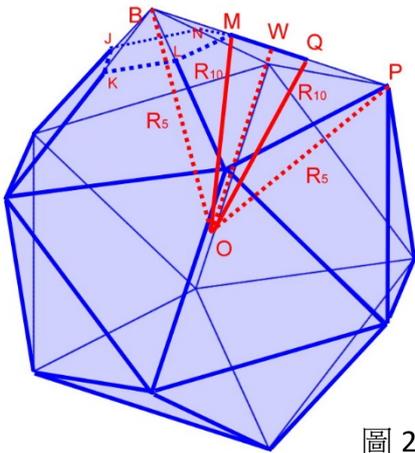


圖 25

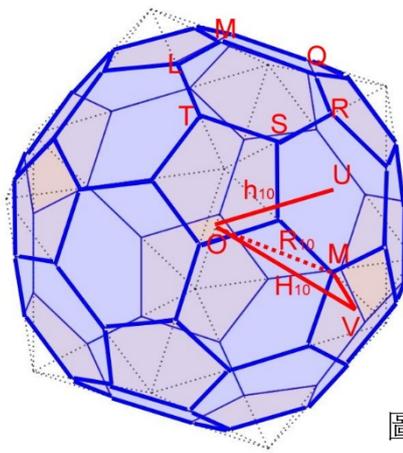


圖 26

2. 已知邊長 $3a$ 的正二十面體， B 為正二十面體 12 個頂點中一點，邊長為 \overline{BP} ， $\overline{BP} = 3a$ ，截去頂點 B ，使得正五邊形 $JKLMN$ 邊長為 a ，正六邊形 $LMQRST$ 邊長也是 a ，也就是正二十面體的邊做了三等分， $\overline{BM} = \overline{MQ} = \overline{QP}$ ，如圖 25。

3. $\overline{OW} \perp \overline{BP}$ ， $\overline{BW} = \frac{3}{2}a$ 、 $\overline{MW} = \frac{1}{2}a$ ，依商高定理，

得 $\overline{OW}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BW}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{MW}^2$ ， $\overline{OB} = R_5$ 且 $\overline{OM} = R_{10}$

$$R_5^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = R_{10}^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

則 $R_{10}^2 = R_5^2 - 2 \times a^2$ ，將 $R_5 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times 3a$ 代入

$$R_{10}^2 = \left(\frac{90 + 18\sqrt{5}}{16}\right) \times a^2 - 2 \times a^2 = \frac{29 + 9\sqrt{5}}{8} \times a^2$$

$$\text{故 } R_{10} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} a$$

4. 圖 26 中， \overline{OV} 為正五邊形的面心距 H_{10} ， \overline{OU} 為正六邊形的面心距 h_{10}

$$5. H_{10}^2 = R_{10}^2 - \overline{MV}^2 = \left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} a\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} \times a\right)^2 = \left(\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{10+2\sqrt{5}}{20}\right) a^2$$

上式中運用正五邊形外接圓半徑 \overline{MV} 與邊長 a 關係： $\overline{MV} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} a$

$$6. \text{故 } H_{10} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} a$$

7. h_{10} 為原邊長 $3a$ 的正二十面體組成之正三角形的面心距，

$$h_{10} = \overline{OU} = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12} \times 3a = \frac{\sqrt{3}}{4} (3 + \sqrt{5}) a$$

伍、結果彙整

一、各種多面體的 R_n 、 H_n 、 h_n 、 A_n 與 V_n 彙整：

(一) 多面體邊長為 a 與外接球半徑 R_n 關係：

多面體名稱	半徑 R_n	多面體名稱	半徑 R_n
正四面體	$R_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$	截角四面體	$R_6 = \frac{\sqrt{22}}{4} a$
正六面體	$R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	截角立方體	$R_7 = \frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}}{2} a$
正八面體	$R_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$	截角八面體	$R_8 = \frac{\sqrt{10}}{2} a$
正十二面體	$R_4 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} a$	截角十二面體	$R_9 = \frac{\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}}{4} a$
正二十面體	$R_5 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a$	截角二十面體 (巴克球)	$R_{10} = \sqrt{\frac{29 + 9\sqrt{5}}{8}} a$

(二) 多面體邊長為 a 與面心距 h_n 和 H_n 的關係

多面體名稱	面心距 h_n	多面體名稱	短面心距 h_n	長面心距 H_n
正四面體	$h_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}a$	截角四面體	$h_6 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$	$H_6 = \frac{5\sqrt{6}}{12}a$
正立方體	$h_2 = \frac{1}{2}a$	截角立方體	$h_7 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}a$	$H_7 = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{6}a$
正八面體	$h_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}a$	截角八面體	$h_8 = \frac{\sqrt{6}}{2}a$	$H_8 = \sqrt{2}a$
正十二面體	$h_4 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}a$	截角十二面體	$h_9 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}a$	$H_9 = \sqrt{\frac{103+45\sqrt{5}}{24}}a$
正二十面體	$h_5 = \frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})a$	截角二十面體(巴克球)	$h_{10} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{5})a$	$H_{10} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}}a$

(三) 多面體邊長為 a 與其表面積 A_n 關係

多面體名稱	多面體表面積 A_n	化簡後 A_n 公式
正四面體	$4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$\sqrt{3}a^2$
正六面體	$6 \times a^2$	$6a^2$
正八面體	$8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$2\sqrt{3}a^2$
正十二面體	$12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2\right)$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$
正二十面體	$20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$5\sqrt{3}a^2$
截角四面體	$4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + 4 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$7\sqrt{3}a^2$
截角立方體	$8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + 6 \times (2 + 2\sqrt{2})a^2$	$(2\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{2})a^2$
截角八面體	$6 \times a^2 + 8 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$(6 + 12\sqrt{3})a^2$
截角十二面體	$20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + 12 \times \left(\frac{5}{2} \times \sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right) \times a^2$	$\left(5\sqrt{3} + 30\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right)a^2$
截角二十面體(巴克球)	$12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2\right) + 20 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$	$\left(30\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)a^2$

(四) 多面體邊長為 a 與其體積 V_n 的關係

多面體名稱	多面體體積 V_n	化簡後 V_n 公式
正四面體	$4 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_1$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
正六面體	$6 \times \frac{1}{3} a^2 \times h_2$	a^3
正八面體	$8 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_3$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
正十二面體	$12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2 \right) \times h_4$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$
正二十面體	$20 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_5$	$\frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3$
截角四面體	$4 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times H_6 + 4 \times \frac{1}{3} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_6$	$\frac{23\sqrt{2}}{12} a^3$
截角立方體	$8 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times H_7 + 6 \times \frac{1}{3} (2 + 2\sqrt{2}) a^2 \times h_7$	$\left(7 + \frac{14}{3} \sqrt{2} \right) a^3$
截角八面體	$6 \times \frac{1}{3} a^2 \times H_8 + 8 \times \frac{1}{3} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_8$	$8\sqrt{2} a^3$
截角十二面體	$20 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times H_9 + 12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times a^2 \right) \times h_9$	$\frac{495+235\sqrt{5}}{12} a^3$
截角二十面體 (巴克球)	$12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2 \right) \times H_{10} + 20 \times \frac{1}{3} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \times h_{10}$	$\left(\frac{125+43\sqrt{5}}{4} \right) a^3$

二、 數值分析

(一) 多面體外接球半徑 R_n 與多面體邊長的比值

(二) 多面體長面心距 H_n 與多面體邊長的比值

(三) 多面體短面心距 h_n 與多面體邊長的比值

(四) 多面體表面積 A_n 與多面體邊長平方的比值

(五) 多面體體積 V_n 與多面體邊長三次方的比值

(六) 多面體表面積 A_n 與外接球表面積 $4\pi R_n^2$ 的比值 $c_n = \frac{A_n}{4\pi R_n^2}$ (覆蓋率)

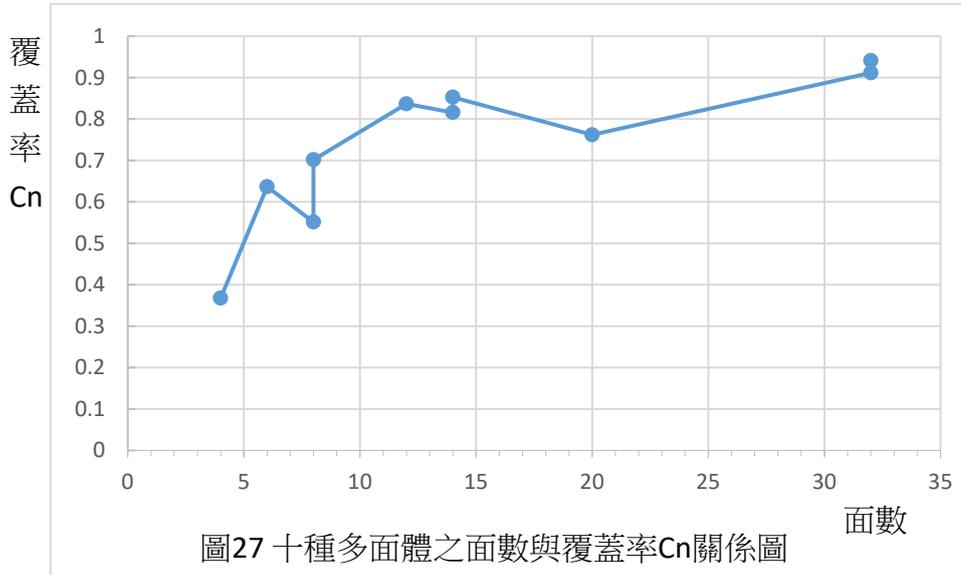
(七) 多面體體積 V_n 與外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ 的比值 $f_n = \frac{V_n}{\frac{4}{3}\pi R_n^3}$ (填充率)

表：多面體外接球邊長 a 與外接球半徑 R_n ，長面心距 H_n 、短面心距 h_n 、表面積 A_n 、體積 V_n 、覆蓋率 c_n 、填充率 f_n 之數值計算結果

n	多面體名稱	面數	邊	頂點數	外接球半徑 R_n	長面心距 H_n	短面心距 h_n	表面積 A_n	體積 V_n	外接球表面積 $4\pi R_n^2$	覆蓋率 c_n	外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$	填充率 f_n
					a	a	a	a^2	a^3	a^2		a^3	
1	正四面體	4	6	4	0.6124	-	0.2041	1.7321	0.1179	4.7124	0.3676	0.9619	0.1225
2	正立方體	6	12	8	0.8660	-	0.5000	6.0000	1.0000	9.4248	0.6366	2.7207	0.3676
3	正八面體	8	12	6	0.7071	-	0.4082	3.4641	0.4714	6.2832	0.5513	1.4810	0.3183
4	正十二面體	12	30	20	1.4013	-	1.1135	20.6457	7.6631	24.6744	0.8367	11.5251	0.6649
5	正二十面體	20	30	12	0.9511	-	0.7558	8.6603	2.1817	11.3664	0.7619	3.6034	0.6055
6	截角四面體	8	18	12	1.1726	1.0206	0.6124	12.1244	2.7106	17.2788	0.7017	6.7537	0.4013
7	截角立方體	14	36	24	1.7788	1.6825	1.2071	32.4347	13.5997	39.7627	0.8157	23.5769	0.5768
8	截角八面體	14	36	24	1.5811	1.4142	1.2247	26.7846	11.3137	31.4159	0.8526	16.5576	0.6833
9	截角十二面體	32	90	60	2.9694	2.9128	2.4899	100.9908	85.0397	110.8056	0.9114	109.6772	0.7754
10	截角二十面體 (巴克球)	32	90	60	2.4780	2.3274	2.2673	72.6073	55.2877	77.1648	0.9409	63.7386	0.8674

陸、問題討論

一、組成多面體表面的多邊形面數越多越接近外接球表面積嗎？

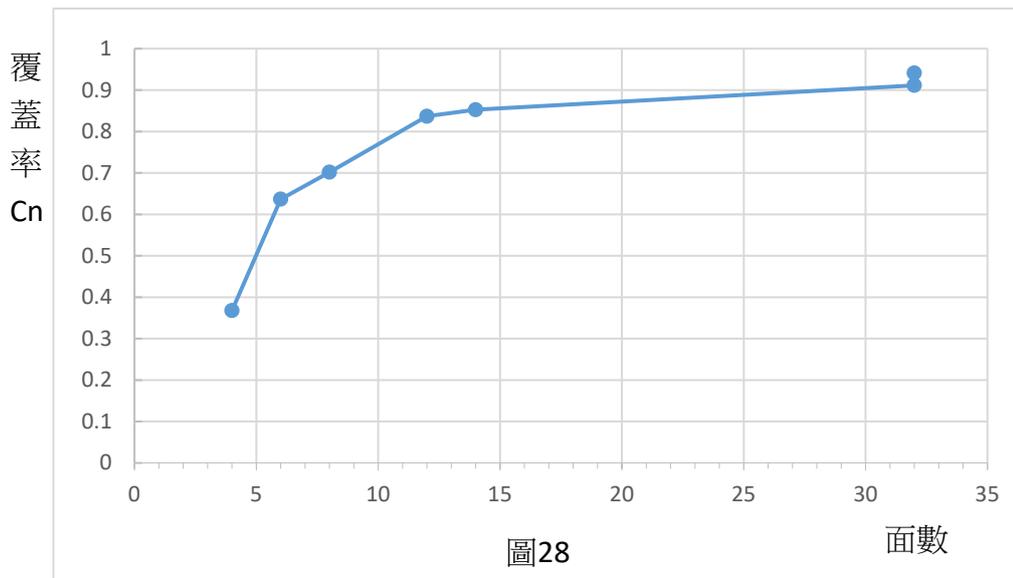


(一) 如圖 27 所示，多面體表面積覆蓋率 $c_n = \frac{A_n}{4\pi R_n^2}$ 與面數關係圖，發現面數越多覆蓋

率似乎越大，但有例外，如下表所示：正八面體、截角立方體、正二十面體三者之面數分別比正六面體、正十二面體、截角八面體還多，卻有較低的覆蓋率，尤其是正二十面體覆蓋率比正十二面體還低。

n	多面體名稱	面數	c_n
1	正四面體	4	0.3676
2	正六面體	6	0.6366
3	正八面體	8	0.5513
6	截角四面體	8	0.7017
4	正十二面體	12	0.8367
7	截角立方體	14	0.8157
8	截角八面體	14	0.8526
5	正二十面體	20	0.7619
9	截角十二面體	32	0.9114
10	截角二十面體（巴克球）	32	0.9409

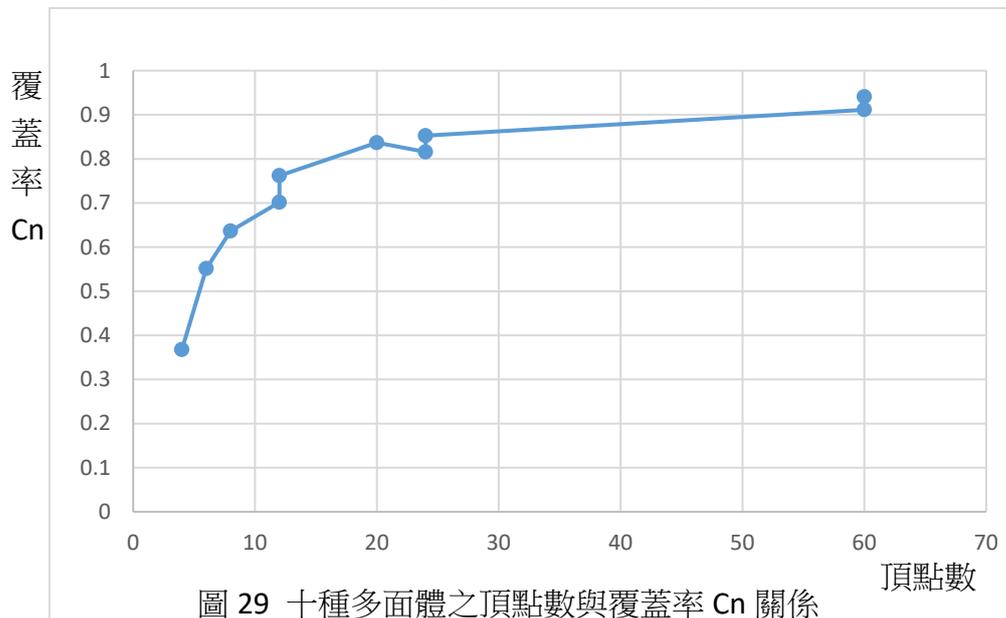
(二) 若不考慮正八面體、截角立方體、正二十面體，則得到圖 28：



(三) 這十種多面體的面數越多，其表面積不見得會越接近外接球面積，另外從數據中還發現相同面數的多面體，因為幾何結構的不同有不同的覆蓋率，例如：

1. 相同具有 8 個面：正八面體與截角四面體。
2. 相同具有 14 個面：截角立方體與截角八面體。
3. 相同具有 32 個面：截角十二面體與截角二十面體。

二、 組成多面體的頂點數越多，其表面積越接近外接球表面積嗎？

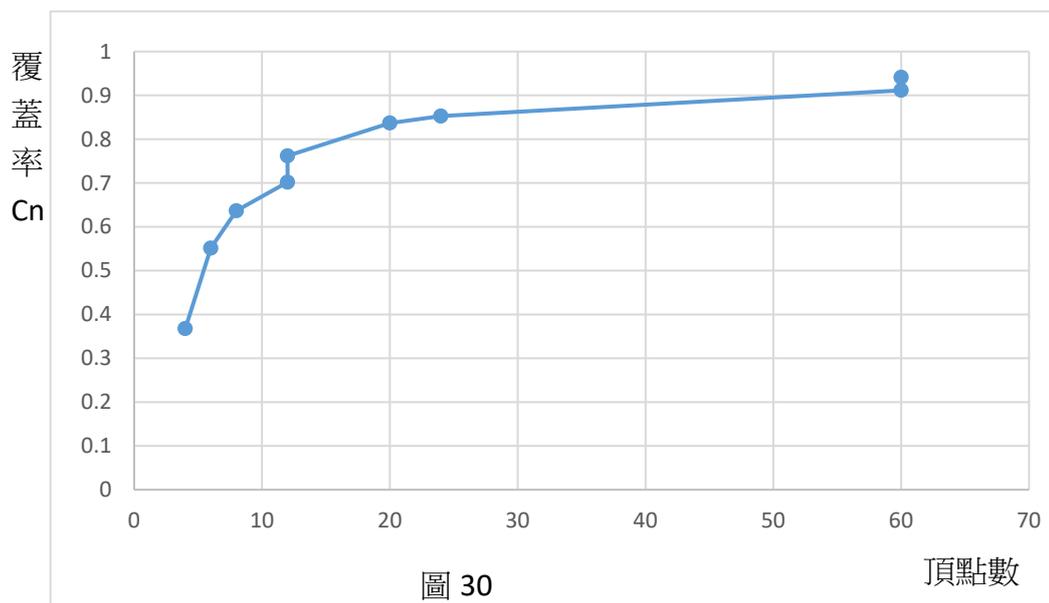


(一) 如圖 29 所示，從多面體表面積覆蓋率 $c_n = \frac{A_n}{4\pi R_n^2}$ 與頂點數關係，發現頂點數越

多覆蓋率越大，有一個例外，如下表所示：截角立方體有 24 個頂點比正十二面體 20 個頂點還多，前者的覆蓋率卻比後者還低。

n	多面體名稱	頂點數	c_n
1	正四面體	4	0.3676
3	正八面體	6	0.5513
2	正六面體	8	0.6366
6	截角四面體	12	0.7017
5	正二十面體	12	0.7619
4	正十二面體	20	0.8367
7	截角立方體	24	0.8157
8	截角八面體	24	0.8526
9	截角十二面體	60	0.9114
10	截角二十面體（巴克球）	60	0.9409

(二) 若先忽略截角立方體，則得到圖 30：

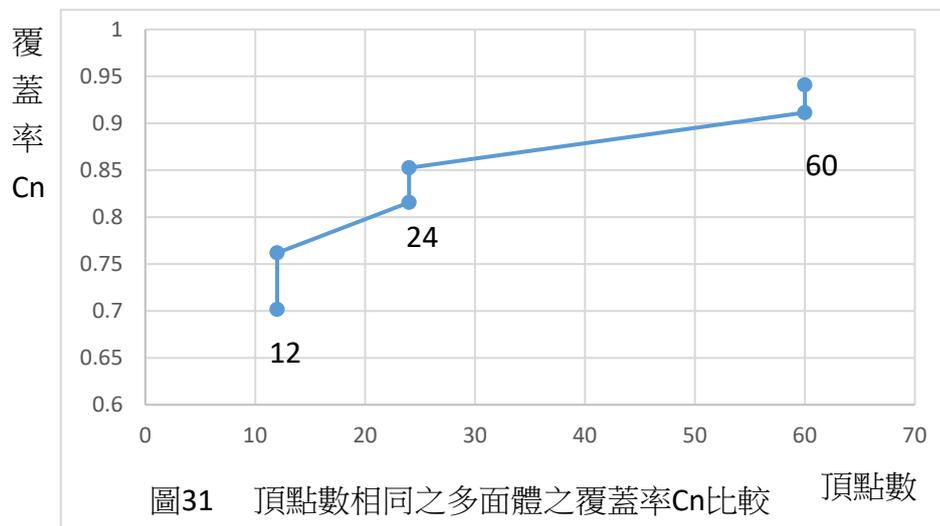


(三) 除截角立方體外，多面體的頂點數越多，其表面積越接近外接球面積，然而，具有相同頂點數的多面體卻有不同覆蓋率，例如：

1. 具有 12 個頂點數：截角四面體、正二十面體。
2. 具有 24 個頂點數：截角立方體、截角八面體。
3. 具有 60 個頂點數：截角十二面體、截角二十面體。

那為什麼截角立方體的頂點數比正十二面體多，覆蓋率卻反而低？我們容許我們之後討論。

三、 多面體有相同的頂點數，覆蓋率卻不同的原因是甚麼？



(一) 截角四面體與正二十面體都有 12 個頂點，截角立方體與截角八面體都有 24 個頂點，截角十二面體與截角二十面體都有 60 個頂點，就以上面三種組合而言，頂點數多寡不能完全解釋覆蓋率與頂點數有相關。

n	多面體名稱	頂	H_n	h_n	$\frac{(H_n - h_n)}{h_n}$	c_n
6	截角四面體	12	1.0206	0.6124	0.6667	0.7017
5	正二十面體	12		0.7558	0.0000	0.7619
7	截角立方體	24	1.6825	1.2071	0.3938	0.8157
8	截角八面體	24	1.4142	1.2247	0.1547	0.8526
9	截角十二面體	60	2.9128	2.4899	0.1698	0.9114
10	截角二十面體 (巴克球)	60	2.3274	2.2673	0.0265	0.9409

(二) 從上表有一個重要發現：在截角多面體中，兩個不同平面之面心距的差距會決定覆蓋率大小，在相同頂點數的多面體，長面心距 H_n 與短面心距 h_n 差距越小，覆蓋率 c_n 會越大，多面體會越接近外接球面積，上表中正二十面體因為只有一種面心距，將長面心距視為與短面心距相等，將此面心距差視為零。

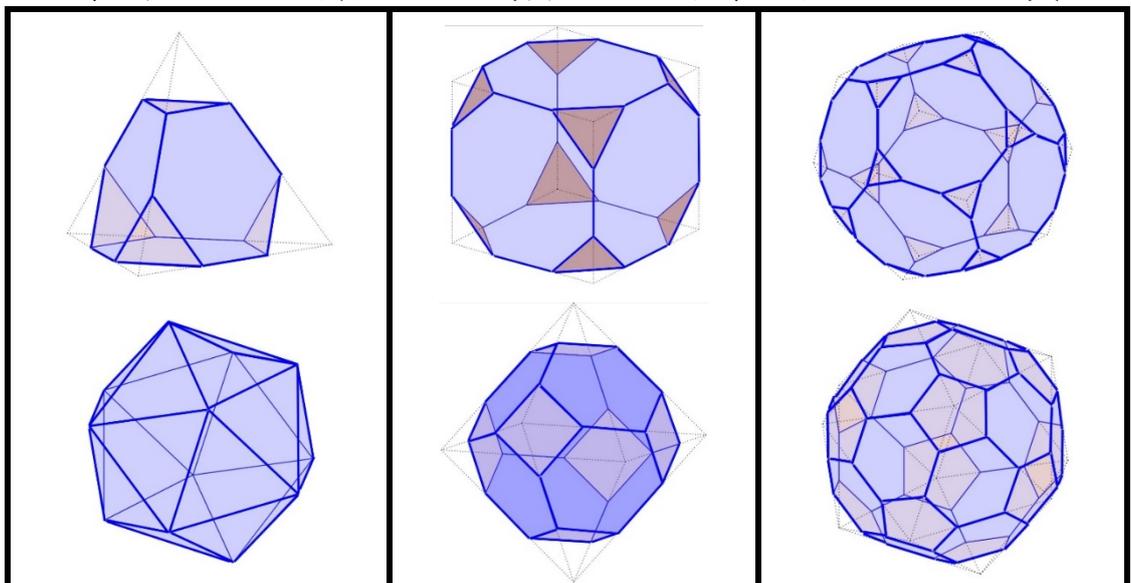


圖 32

(三) 圖 32 所示，下排的立體圖頂點的分布較上排均勻，我們可確定在相同的頂點數狀況下，「頂點分布越分散」的多面體的覆蓋率會越高。

(四) 從上面三組我們也發現：相同的頂點數的截角多面體，組成面之兩種正多邊形，面積大差距越小，則面心距差距也越小，覆蓋率也會越高。

四、截角多面體與正多面體的關係：

(一) 借用正多面體外接球半徑 $R_{正}$ 求得截角多面體

外接球半徑 $R_{截}$ ：

推導截角多面體的外接球半徑過程，發覺兩者間有一個簡單關係，我們歸納出一個方法適用在正多面體外接球半徑 $R_{正}$ 可轉換成截角

多面體外接球半徑 $R_{截}$ 的方法，以圖 33 為

例，在截角多面體必可找出被截角的正多面

體中有類似關係，其中 $\overline{OB} \perp \overline{CB}$ ，則 $\overline{OB}^2 = R_{截}^2 - \overline{AB}^2 = R_{正}^2 - \overline{CB}^2$

$$\text{故 } R_{截} = \sqrt{R_{正}^2 - \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2}$$

(二) 截角多面體短面心距 $h_{截}$ 與正多面體面心距 $h_{正}$ 有簡單比值：

1. 組成面是由三角形與三角形截角之多面體： $\frac{h_6}{h_1} = \frac{h_8}{h_3} = \frac{h_{10}}{h_5} = 3$

2. 組成面是由正方形與正方形截角之多面體： $\frac{h_7}{h_2} = 1 + \sqrt{2}$

3. 組成面是由五邊形與五邊形截角之多面體： $\frac{h_9}{h_4} = \sqrt{5}$

五、以體積填充率 f_n ，佐證覆蓋率的可信度：

(一) 計算多面體體積的想法：

如圖 34 所示，正多面體與截角多面體如同水果「釋迦」，切割成多個角錐，配合面心

距 h_n 和 H_n ，再利用角錐體積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積}$

\times 高，求得任一片撥下來的「釋迦片」體積，總和起來即為多面體體積 V_n ， V_n 除以外

接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ 即為填充率 f_n 。

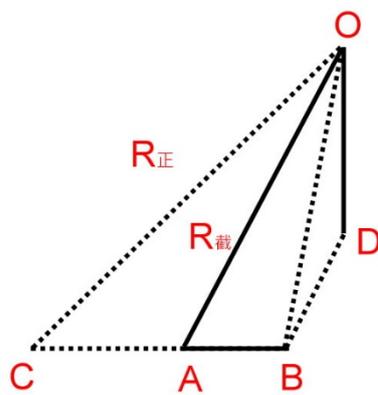


圖 33



圖 34

(二) 填充率 f_n 與覆蓋率 c_n 的關係：

由下面頂點數對 f_n 、 c_n 的關係圖，可以看出來 f_n 的大小與 c_n 有正相關性，從 f_n 明顯的大小起伏，更能確認我們前面的討論，多面體頂點越多雖能使多面體越接近外接球體，但仍不足以完全解釋為甚麼相同頂點數的多面體填充率 f_n 不同，甚至比頂點數少的多面體有較少的填充率 f_n ，例如截角立方體頂點數 24 比正二十面體、正十二面體還多。

n	多面體名稱	頂點數	c_n	f_n
1	正四面體	4	0.3676	0.1225
3	正八面體	6	0.5513	0.3183
2	正六面體	8	0.6366	0.3676
6	截角四面體	12	0.7017	0.4013
5	正二十面體	12	0.7619	0.6055
4	正十二面體	20	0.8367	0.6649
7	截角立方體	24	0.8157	0.5768
8	截角八面體	24	0.8526	0.6833
9	截角十二面體	60	0.9114	0.7754
10	截角二十面體（巴克球）	60	0.9409	0.8674



圖 35 填充率與覆蓋率比較

(三) 從正多面體到截角多面體：

從下表 f_n 、 c_n 與頂點數的關係，及圖 36、圖 37 可以看出：

1. 正多面體的頂點數決定正多面體是否趨近於外接球，而不是組成正多面體的平面數量。
2. 截角多面體在相同的頂點數下有不同的 f_n 、 c_n 數值，而透過前面的討論我們得到下面圖表的結果。
3. 正多面體經過截角後頂點數變多，填充率 f_n 、覆蓋率 c_n 跟著變大。

n	多面體名稱	頂	c_n	f_n
1	正四面體	4	0.3676	0.1225
3	正八面體	6	0.5513	0.3183
2	正六面體	8	0.6366	0.3676
5	正二十面體	12	0.7619	0.6055
4	正十二面體	20	0.8367	0.6649

n	多面體名稱	頂	c_n	f_n
6	截角四面體	12	0.7017	0.4013
7	截角立方體	24	0.8157	0.5768
8	截角八面體	24	0.8526	0.6833
9	截角十二面體	60	0.9114	0.7754
10	截角二十面體	60	0.9409	0.8674

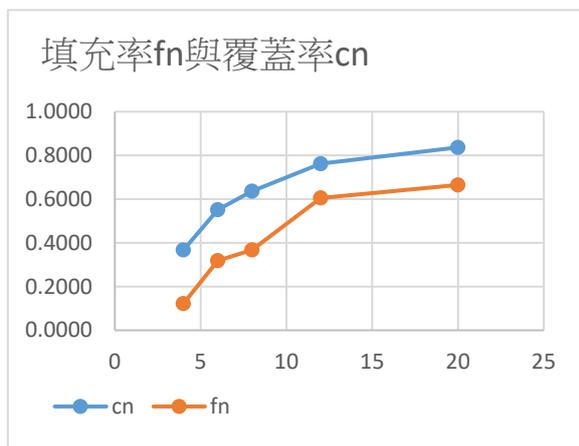


圖 36 正多面體填充率與覆蓋率比較

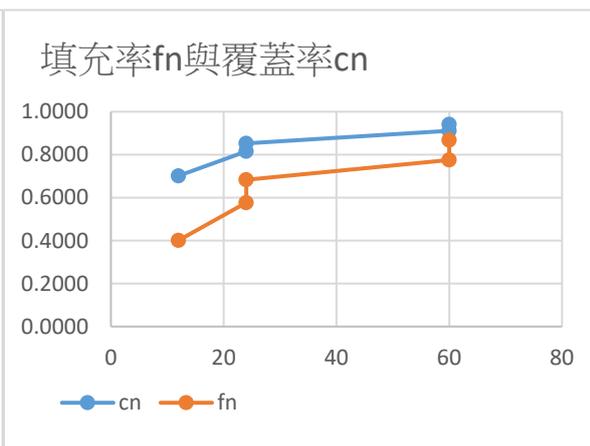


圖 37 截角多面體填充率與覆蓋率比較

柒、結論

- 一、我們未用三角函數，僅運用國中所學數學技巧，對於多面體進行研究，推導計算過程雖然複雜困難，卻發現其中隱含了很簡單的規律。
- 二、從本研究討論的十種多面體，分析數據發現多面體的外表，經過更多的切割，增加頂點數，可讓多面體的表面積越接近球的表面積。
- 三、截角二十面體（巴克球）在半世紀前被選為足球的製作原型，是因為模型簡單，填充後的體積與「圓球」十分相近，在本研究的十種多面體中，截角二十面體表面積最接近其外接球表面積，對球的覆蓋率高達 0.9409，僅相差 0.059 倍的球面積，差僅為 5.9%。
- 四、以截角二十面體作為足球的表面，足球使用材料為橡膠或皮革，具有彈性，可經過空氣填充膨脹增加表面積，同時兩平面間連接的縫隙，經過車縫或膠合，填補了 5.9% 的球體表面積，故以截角二十面體製作成球是極佳的選擇。
- 五、從正十二面體、正二十面體、截角十二面體與截角二十面體的數學推演過程中發現，傳統足球結構的藝術美感，竟然內含了數學上美麗的黃金比例。
- 六、截角二十面體組成面為正五邊形與正六邊形，相較於其他種多面體有下面發現：
 - (一) 面心距差距最小。
 - (二) 面積差距最小。

(三) 頂點分布最均勻。

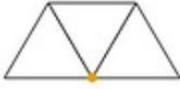
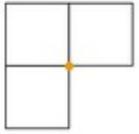
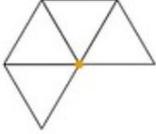
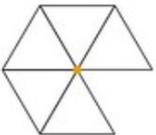
(四) 外接球半徑，長面心距，短面心距，三者差距最小。這樣子當球滾動時，球心才能保持一致的高度。

七、經過我們研究十個種多面體，發現傳統足球就是巴克球構造，與真圓球之間的差距極小，充氣後巴克球可成真球，所以以巴克球為足球可以很「圓」呀！

八、未來繼續研究方向：將本研究反過程思考，「如果在一個球面座標上放置六十個頂點，在甚麼條件下可以有最大的多面體覆蓋率與填充率？」

捌、參考資料及其他

【1】多面體頂點處所相交的平面的角（也就是頂點發出的角）的和，前五個是正多面體，後五個是截角多面體：我們發現：只從平面角的和，無法完全解釋覆蓋率高低。

多面體名稱	頂點周圍的平面幾何	平面角的和
正四面體		$60^{\circ} \times 3 = 180^{\circ}$
正六面體		$90^{\circ} \times 3 = 270^{\circ}$
正八面體		$60^{\circ} \times 4 = 240^{\circ}$
正十二面體		$108^{\circ} \times 3 = 324^{\circ}$
正二十面體		$60^{\circ} \times 5 = 300^{\circ}$
截角四面體		$120^{\circ} \times 2 + 60^{\circ} = 300^{\circ}$
截角立方體		$135^{\circ} \times 2 + 60^{\circ} = 330^{\circ}$

截角八面體		$120^{\circ} \times 2 + 90^{\circ} = 330^{\circ}$
截角十二面體		$144^{\circ} \times 2 + 60^{\circ} = 348^{\circ}$
截角二十面體		$120^{\circ} \times 2 + 108^{\circ} = 348^{\circ}$

【2】維基百科—柏拉圖立體：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9F%8F%E6%8B%89%E5%9C%96%E7%AB%8B%E9%AB%94>

【3】維基百科—阿基米德立體

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%B7%E7%AB%8B%E9%AB%94>

【4】維基百科—截角二十面體：

<https://zh.m.wikipedia.org/wiki/%E6%88%AA%E8%A7%92%E4%BA%8C%E5%8D%81%E9%9D%A2%E9%AB%94>

【5】數學傳播 25 卷 3 期民 90 年 9 月，3D 立體變變變(The Variety of Polyhedra)

【6】切割柏拉圖多面體 <https://www.geogebra.org/m/xrnKXnaS#material/hGxp9qqQ>

【評語】 030413

此主題屬幾何問題探討，研究三維多面體之表面積及體積，運用中學所學技巧計算，可視為與中學所學代數幾何關係的延伸，有趣的科展題目。作者針對正多面體與截角正多面體的表面積與體積的值做了計算，給出了這些多面體的表面積與體積的值的確切計算公式，並討論了這幾種立體結構與對應的外接球貼近的程度。能夠用一般國中生都能理解的處理方式來分析這樣一個有一定複雜度的問題，並給出結果，值得稱許。這個問題其實是很古老的問題，結論應該也早已廣為人知。若能推導出一些廣義結論或一些未知多面體的公式，成果表現會更好。

足球一直是我們最喜歡的運動，在生理課時，老師談到由碳原子所組成的一種特殊結構巴克球，即為富勒烯分子 C_{60} ，巴克球具有一種結構上的美，很想知道原因是甚麼呢！巴克球看似球體，但從結構上分析似乎有些差異。

因此我們選定五種截角多面體一起研究比較，分別為截角四面體、截角立方體、截角八面體、截角十二面體、和截角二十面體（巴克球），探究此十種多面體與球形關係。

貳、研究設計與目的

- 一、透過正多邊形面積公式計算，來計算多面體的表面積 A_n 與其外接球表面積 $4\pi R_n^2$ 的比值 c_n ，定義 c_n 為覆蓋率(Coverage)。
- 二、利用角錐面積公式和面心距，來計算多面體的體積 V_n 與其外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ 的比值 f_n ，定義 f_n 為填充率(Fill rate)。
- 三、數值分析十種正多面體與截角多面體(如圖1)的表面積、體積及其外接球表面積、體積的比值 c_n 與 f_n 的關係，探討彼此間的誤差及可能的原因。
- 四、分析討論巴克球在半世紀前被選為足球結構的原因為何？

參、研究設備及器材

- 一、桌上型電腦數台、平板電腦、手機、計算機、印表機、影印機、西卡紙、剪刀、膠水、直尺
- 二、電腦軟體EXCEL試算表

肆、研究過程或方法

- 一、結構分析(以下多面體依序編號n為1~10)

1. 正多面體

名稱	透視圖	展開圖	構成面	面數	邊數	頂點數
正四面體			正三角形	4	6	4
正六面體 (正立方體)			正方形	6	12	8
正八面體			正三角形	8	12	6
正十二面體			正五邊形	12	30	20
正二十面體			正三角形	20	30	12

2. 截角多面體

名稱	透視圖	展開圖	構成面	面數	總面數	邊數	頂點數
截角四面體			正三角形	4	8	18	12
			正六邊形	4			
截角立方體			正三角形	8	14	36	24
			正八邊形	6			
截角八面體			正方形	6	14	36	24
			正六邊形	8			
截角十二面體			正三角形	20	32	90	60
			正十邊形	12			
截角二十面體 (巴克球)			正五邊形	12	32	90	60
			正六邊形	20			



圖1

3. 這十種多面體的組成面正多邊形有六種(圖2~圖7)，其中以正五邊形面積計算最為關鍵。計算過程簡化如下：

如圖7所示，邊長 $\overline{AC} = a$ ，因為正五邊形內角 $=108^\circ$ ，

$$\text{則 } \angle ABC = \angle CAB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \angle ACE$$

故 $\triangle ACE \sim \triangle EAD$ (AA相似)

$$\text{得 } \frac{a}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{a - \overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{a - \overline{AE}}, \text{ 得 } \overline{AE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

所以 $36^\circ-36^\circ-108^\circ$ 等腰三角形的邊長比例為 $1:1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (黃金比)

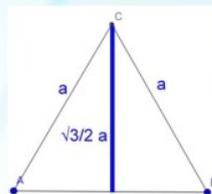


圖5

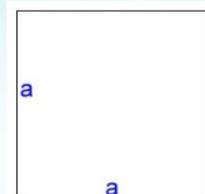


圖6

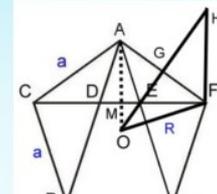


圖7

二、多面體邊長 a 與外接球半徑 R_n 的關係

(一)我們研究的十種多面體，其外接球半徑 R_n 與邊長 a 的位置關係圖，如圖8~圖17所示。

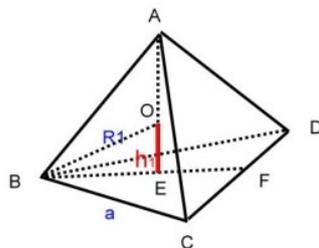


圖8 正四面體

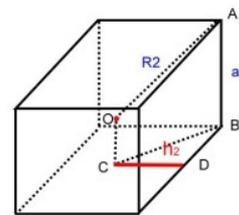


圖9 正立方體

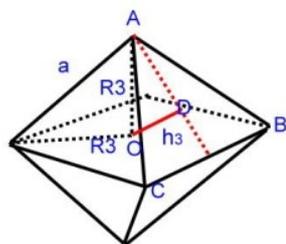


圖10 正八面體

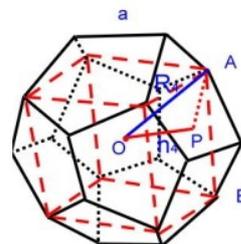


圖11 正十二面體

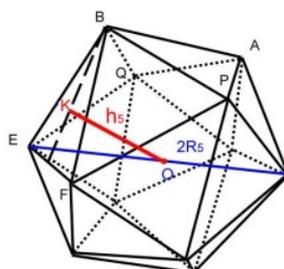


圖12 正二十面體

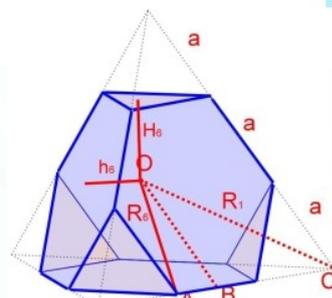


圖13 截角四面體

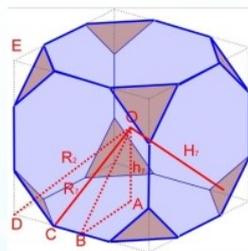


圖14 截角立方體

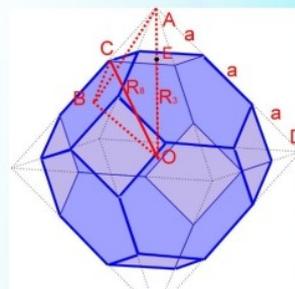


圖15 截角八面體

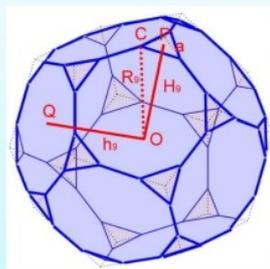
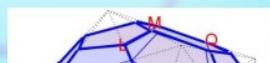
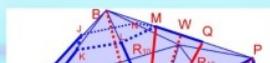
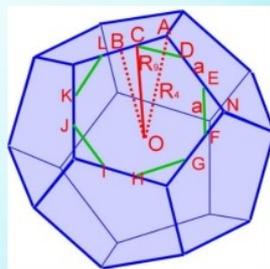


圖16 截角十二面體



(二)以截角二十面體為例來說明：邊長 a 與外接球半徑 R_{10} 的關係

1. 如圖 17 左圖，把正二十面體的邊做三等分，則 20 個正三角形的面就得到了 20 個正六邊形，同時把正二十面體的所有 12 個頂點削去，則每個頂點由上述三等分點形成的正五邊形代替，形成了截角二十面體。

2. 已知邊長 $3a$ 的正二十面體， B 為正二十面體 12 個頂點中一點，邊長為 \overline{BP} ， $\overline{BP} = 3a$ ，截去頂點 B ，使得正五邊形 $JKLMN$ 邊長為 a ，正六邊形 $LMQRST$ 邊長也是 a ，也就是正二十面體的邊做了三等分， $\overline{BM} = \overline{MQ} = \overline{QP}$ 。

3. $\overline{OW} \perp \overline{BP}$ ， $\overline{BW} = \frac{3}{2}a$ 、 $\overline{MW} = \frac{1}{2}a$ ，依商高定理，
得 $\overline{OW}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BW}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{MW}^2$ ， $\overline{OB} = R_5$ 且 $\overline{OM} = R_{10}$

$$R_5^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = R_{10}^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

則 $R_{10}^2 = R_5^2 - 2 \times a^2$ ，將 $R_5 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times 3a$ 代入

$$R_{10}^2 = \left(\frac{90+18\sqrt{5}}{16}\right) \times a^2 - 2 \times a^2 = \frac{29+9\sqrt{5}}{8} \times a^2$$

$$\text{故 } R_{10} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} a$$

4. 圖 17 右圖中， \overline{OV} 為正五邊形的面心距 H_{10} ， \overline{OU} 為正六邊形的面心距 h_{10}

$$5. H_{10}^2 = R_{10}^2 - \overline{MV}^2 = \left(\sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} a\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} \times a\right)^2 = \left(\frac{29+9\sqrt{5}}{8} - \frac{10+2\sqrt{5}}{20}\right) a^2$$

上式中運用正五邊形外接圓半徑 \overline{MV} 與邊長 a 關係： $\overline{MV} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}} a$

$$6. \text{故 } H_{10} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} a$$

7. h_{10} 為原邊長 $3a$ 的正二十面體組成之正三角形的面心距，

$$h_{10} = \overline{OU} = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} \times 3a = \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{5})a$$

伍、研究結果彙整

一、各種多面體的 R_n 、 H_n 、 h_n 、 A_n 與 V_n 彙整：

(一)多面體邊長為 a 與外接球半徑 R_n 關係：

多面體名稱	半徑 R_n	多面體名稱	半徑 R_n
正四面體	$R_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$	截角四面體	$R_6 = \frac{\sqrt{22}}{4} a$
正六面體	$R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	截角立方體	$R_7 = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2} a$
正八面體	$R_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$	截角八面體	$R_8 = \frac{\sqrt{10}}{2} a$
正十二面體	$R_4 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{15}}}{4} a$	截角十二面體	$R_9 = \frac{\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{4} a$
正二十面體	$R_5 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a$	截角二十面體 (巴克球)	$R_{10} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} a$

(二)多面體邊長為 a 與面心距 h_n 和 H_n 的關係

多面體名稱	面心距 h_n	多面體名稱	短面心距 h_n	長面心距 H_n
正四面體	$h_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} a$	截角四面體	$h_6 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$	$H_6 = \frac{5\sqrt{6}}{12} a$
正立方體	$h_2 = \frac{1}{2} a$	截角立方體	$h_7 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} a$	$H_7 = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{6} a$
正八面體	$h_3 = \frac{\sqrt{6}}{6} a$	截角八面體	$h_8 = \frac{\sqrt{6}}{2} a$	$H_8 = \sqrt{2} a$
正十二面體	$h_4 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} a$	截角十二面體	$h_9 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} a$	$H_9 = \sqrt{\frac{103+45\sqrt{5}}{24}} a$
正二十面體	$h_5 = \frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})a$	截角二十面體 (巴克球)	$h_{10} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{5})a$	$H_{10} = \sqrt{\frac{125+41\sqrt{5}}{40}} a$

表：多面體外接球邊長 a 與外接球半徑 R_n 、長面心距 H_n 、短面心距 h_n 、表面積 A_n 、體積 V_n 、覆蓋率 c_n 、填充率 f_n 之數值計算結果

n	多面體名稱	面數	邊數	頂點數	外接球半徑 R_n $\frac{R_n}{a}$	長面心距 H_n $\frac{H_n}{a}$	短面心距 h_n $\frac{h_n}{a}$	表面積 A_n $\frac{A_n}{a^2}$	體積 V_n $\frac{V_n}{a^3}$	外接球表面積 $4\pi R_n^2$ $\frac{4\pi R_n^2}{a^2}$	覆蓋率 c_n	外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ $\frac{4}{3}\pi R_n^3/a^3$	填充率 f_n
1	正四面體	4	6	4	0.6124	-	0.2041	1.7321	0.1179	4.7124	0.3676	0.9619	0.1225
2	正立方體	6	12	8	0.8660	-	0.5000	6.0000	1.0000	9.4248	0.6366	2.7207	0.3676
3	正八面體	8	12	6	0.7071	-	0.4082	3.4641	0.4714	6.2832	0.5513	1.4810	0.3183
4	正十二面體	12	30	20	1.4013	-	1.1135	20.6457	7.6631	24.6744	0.8367	11.5251	0.6649
5	正二十面體	20	30	12	0.9511	-	0.7558	8.6603	2.1817	11.3664	0.7619	3.6034	0.6055
6	截角四面體	8	18	12	1.1726	1.0206	0.6124	12.1244	2.7106	17.2788	0.7017	6.7537	0.4013
7	截角立方體	14	36	24	1.7788	1.6825	1.2071	32.4347	13.5997	39.7627	0.8157	23.5769	0.5768

(三) 多面體邊長為 a 與其表面積 A_n 關係

多面體名稱	多面體表面積 A_n	化簡後 A_n 公式
正四面體	$4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$\sqrt{3}a^2$
正六面體	$6 \times a^2$	$6a^2$
正八面體	$8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$2\sqrt{3}a^2$
正十二面體	$12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right)$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$
正二十面體	$20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$5\sqrt{3}a^2$
截角四面體	$4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 4 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$7\sqrt{3}a^2$
截角立方體	$8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 6 \times (2+2\sqrt{2})a^2$	$(2\sqrt{3}+12+12\sqrt{2})a^2$
截角八面體	$6 \times a^2 + 8 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$(6+12\sqrt{3})a^2$
截角十二面體	$20 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) + 12 \times \left(\frac{5}{2} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times a^2\right)$	$(5\sqrt{3}+30\sqrt{5+2\sqrt{5}})a^2$
截角二十面體 (巴克球)	$12 \times \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right) + 20 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$	$(30\sqrt{3}+3\sqrt{5}+2\sqrt{5})a^2$

(四) 多面體邊長為 a 與其體積 V_n 的關係

多面體名稱	多面體體積 V_n	化簡後 V_n 公式
正四面體	$4 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_1$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
正六面體	$6 \times \frac{1}{3} a^2 \times h_2$	a^3
正八面體	$8 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_3$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
正十二面體	$12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right) \times h_4$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$
正二十面體	$20 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_5$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$
截角四面體	$4 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times H_6 + 4 \times \frac{1}{3} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_6$	$\frac{23\sqrt{2}}{12} a^3$
截角立方體	$8 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times H_7 + 6 \times \frac{1}{3} (2+2\sqrt{2})a^2 \times h_7$	$\left(7 + \frac{14}{3}\sqrt{2}\right) a^3$
截角八面體	$6 \times \frac{1}{3} a^2 \times H_8 + 8 \times \frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_8$	$8\sqrt{2}a^3$
截角十二面體	$20 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times H_9 + 12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times a^2\right) \times h_9$	$\frac{495+235\sqrt{5}}{12} a^3$
截角二十面體 (巴克球)	$12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2\right) \times H_{10} + 20 \times \frac{1}{3} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \times h_{10}$	$\left(\frac{125+43\sqrt{5}}{4}\right) a^3$

二、數值分析

(一)定義：多面體表面積 A_n 與外接球表面積 $4\pi R_n^2$ 的比值 $c_n = \frac{A_n}{4\pi R_n^2}$ (覆蓋率)

多面體體積 V_n 與外接球體積 $\frac{4}{3}\pi R_n^3$ 的比值 $f_n = \frac{V_n}{\frac{4}{3}\pi R_n^3}$ (填充率)

(二)我們以電腦試算表計算得下表：

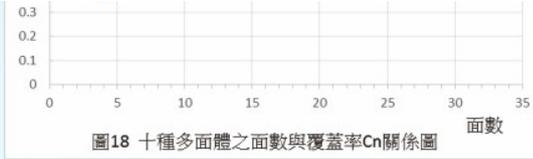


圖18 十種多面體之面數與覆蓋率Cn關係圖

二、組成多面體的頂點數越多，其表面積越接近外接球表面積嗎？

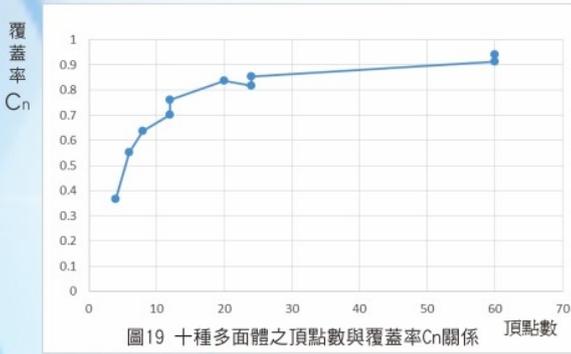


圖19 十種多面體之頂點數與覆蓋率Cn關係

三、多面體有相同的頂點數，覆蓋率卻不同的原因是甚麼？

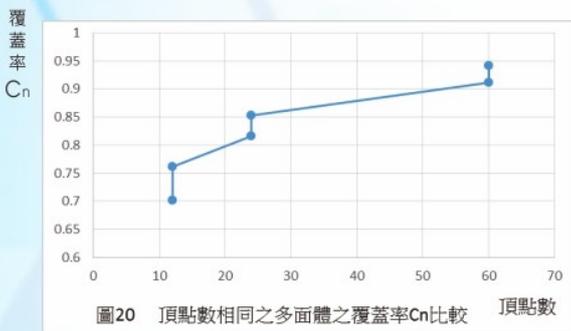
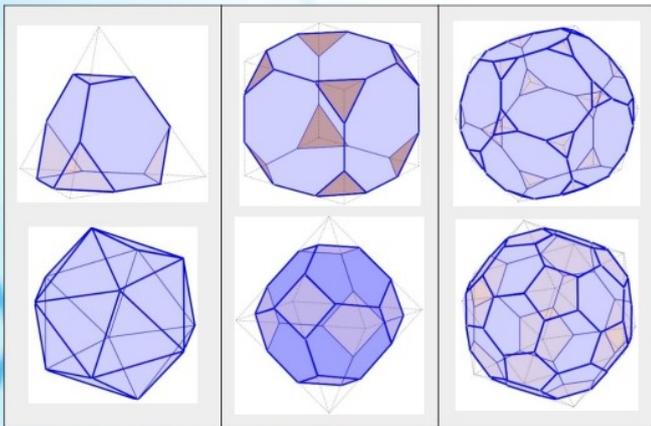


圖20 頂點數相同之多面體之覆蓋率Cn比較

(一) 面心距差距越小，覆蓋率 C_n 會越大。



(二) 「頂點分布越分散」的多面體的覆蓋率會越高。

(三) 組成面的面積差距越小，覆蓋率也會越高。

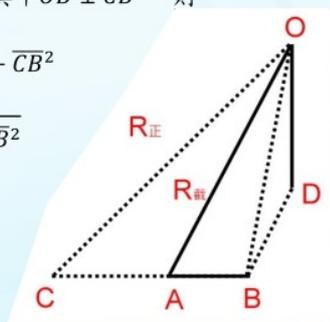
四、截角多面體與正多面體的關係：

(一) 如圖 21，由正多面體外接球半徑 $R_{正}$ 求得截角

多面體外接球半徑 $R_{截}$ ：其中 $\overline{OB} \perp \overline{CB}$ ，則

$$\overline{OB}^2 = R_{截}^2 - \overline{AB}^2 = R_{正}^2 - \overline{CB}^2$$

$$\text{故 } R_{截} = \sqrt{R_{正}^2 - \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2}$$



(二) 截角多面體短面心距 $h_{截}$ 與正多面體面心距 $h_{正}$ 有簡單比值：

(二) 填充率 f_n 與覆蓋率 C_n 的關係：

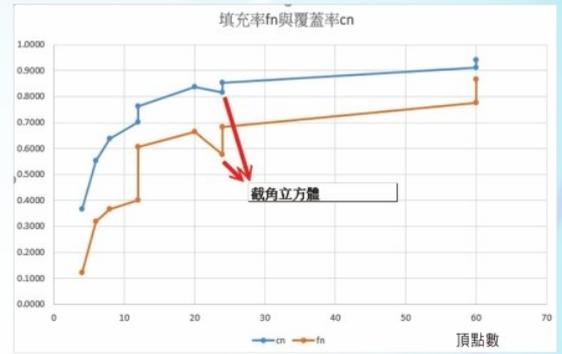


圖22 填充率與覆蓋率比較

(三) 從正多面體到截角多面體：

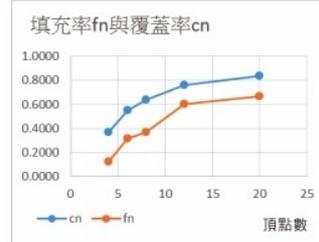


圖23 正多面體填充率與覆蓋率比較

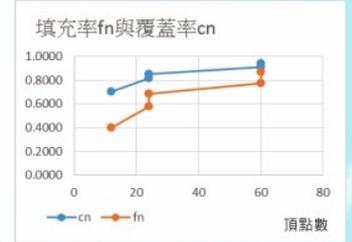


圖24 截角多面體填充率與覆蓋率比較

柒、結論

一、我們未用三角函數，僅運用國中所學數學技巧，對於多面體進行研究，推導計算過程雖然複雜困難，卻發現其中隱含了很簡單的規律。

二、從本研究討論的十種多面體，分析數據發現多面體的外表，經過更多的切割，增加頂點數，可讓多面體的表面積越接近球的表面積。

三、截角二十面體（巴克球）在半世紀前被選為足球的製作原型，是因為模型簡單，填充後的體積與「圓球」十分相近，在本研究的十種多面體中，截角二十面體表面積最接近其外接球表面積，對球的覆蓋率高達 0.9409，僅相差 0.059 倍的球面積，差僅為 5.9%。

四、以截角二十面體作為足球的表面，足球使用材料為橡膠或皮革，具有彈性，可經過空氣填充膨脹增加表面積，同時兩平面間連接的縫隙，經過車縫或膠合，填補了 5.9% 的球體表面積，故以截角二十面體製作成球是極佳的選擇。

五、從正十二面體、正二十面體、截角十二面體與截角二十面體的數學推演過程中發現，傳統足球結構的藝術美感，竟然內含了數學上美麗的黃金比例。

六、截角二十面體組成面為正五邊形與正六邊形，相較於其他種多面體有下面發現：

(一) 面心距差距最小。

(二) 面積差距最小。

(三) 頂點分布最均勻。

(四) 外接球半徑，長面心距，短面心距，三者差距最小。

這樣子當球滾動時，球心才能保持一致的高度。

七、經過我們研究十個種多面體，發現傳統足球就是巴克球構造，與真圓球之間的差距極小，充氣後巴克球可成真球，所以以巴克球為足球可以很「圓」呀！

八、未來繼續研究方向：將本研究反過程思考，「如果在一個球面座標上放置六十個頂點，在其應條件下可以有最大的多面