中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030412

Geogebra 的兩平面鏡成像數

學校名稱：嘉義縣私立協同高級中學

作者：	指導老師：
國二 林冠妤 國二 陳子彙 國二 蔡宇晴	郭建載 黃明真

關鍵詞：GeoGebra、平面鏡成像、成像數

摘要

如圖(0)，當兩平面鏡 M_1、M_2，鏡面夾角為 θ(單位:度)，物體與兩鏡交點所形成的線段分別與 M_1、 M_2 的角度為 θ_1、θ_2 (單位:度)。利用 GeoGebra 推導兩鏡中成像數的公式。可以寫成以下 5 點，其中 [ ]：高斯符號：

1. 當 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta = 0°$，成像數= $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1$，
2. 當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，

   成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$，
3. 當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$且$\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，

   成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，
4. 當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，

   成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，
5. 當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，

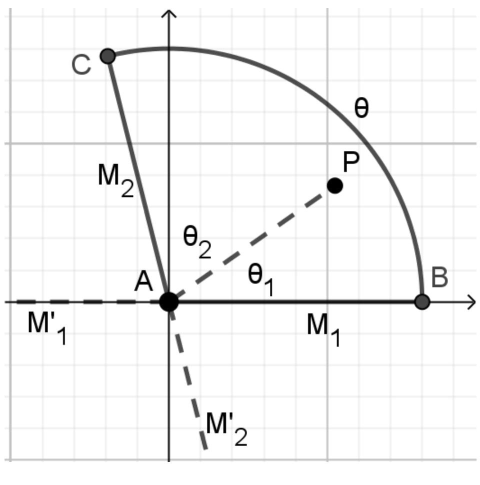
   成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 2$。

我們歸納出這個公式，已修正蒐集到的文獻所描述公式不足之處。

簡單說文獻上的公式：

若 $\frac{360°}{\theta} \notin N \Rightarrow$ 成像數為 $[\frac{360°}{\theta}]$ ，其中 [ ]：高斯符號 。

這句話只陳述了部分事實，沒有說出全部事實，所以不能當公式使用。



圖(0)

壹、研究動機

在電梯裡， 時常看到自己呈現在鏡子裡，而且如果不只單面的鏡子，成像數往往不只一個。上網搜尋後，發現原來高中物理課程內有提到兩平面鏡的多次成像，但也只提到夾角為 90^{o}、60^{o} 等可整除 360^{o} 的成像數。剛好學到數學 2 下 2-2 垂直、平分與線對稱，回想理化 2 上 4-2 光的反射與面鏡，可以解決這個問題，於是搜尋相關科展作品，那些作品大都是以實驗出發驗證現有兩平面鏡成像數公式。但這些成像公式的意義是什麼？公式是否正確？ 想用很簡單的 GeoGebra 去探討並歸納正確公式。

貳、研究目的

利用動態數學軟體 GeoGebra 驗證現有的成像公式，若檢驗出公式有錯誤，歸納出正確公式。 53屆全國科展國中物理兩平面鏡任意夾角成像公式推導，以數值方法逐漸增加角度的方式，發現成像數存在變化的現象，於是將成像數稍作修正。

以下為現有公式： (吳易修[1])

一、若$m=\frac{360^{\circ}}{\theta}$為偶數 $\Rightarrow$ 成像數為 $m-1$

二、 若$m=\frac{360^{\circ}}{\theta}$為奇數

1. 若物體在兩平面鏡的角平分線上 $\Rightarrow$ 成像數為 $m-1$
2. 若物體不在兩平面鏡的角平分線上 $\Rightarrow$ 成像數為 m

三、若$\frac{360^{\circ}}{\theta}\notin N$ $\Rightarrow$ 成像數為$[\frac{360^{\circ}}{\theta}]$ 或$[\frac{360^{\circ}}{\theta}]\pm1$，其中 [ ]：高斯符號 。

在$\frac{360^{\circ}}{\theta}\notin N$情況，前人研究結果解釋需要做$\pm1$修正的原因，以成像點分裂或重疊帶過，讓我們想要探究成像數改變的真正原因。

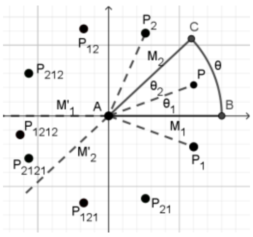
參、研究設備器材

電腦、動態幾何與代數軟體 GeoGebra、試算表軟體 Excel、計算紙、筆

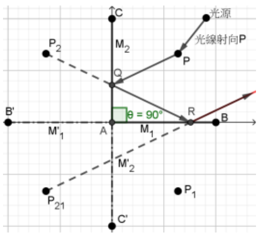
肆、研究過程或方法

一、以兩面鏡子做實驗時，若夾角太小，就很難量測出總共產生幾個像，所以使用 GeoGebra 模擬兩面鏡子的多次成像，省時且易歸納。

在進入討論之前必需將以下的所有圖形所使用的符號詳細說明，如圖(1)：
平面鏡 M_1 擺放在座標平面上方向角$0°$，即$\overline{AB}$。
平面鏡 M_2 擺放在座標平面上方向角θ(單位:度)，即$\overline{AC}$。得兩平面鏡夾角θ。
分別延伸 M_1 和 M_2 面鏡，做出M_1'和M_2'，作為兩個面鏡的延伸虛鏡面。
物體 P 擺放在座標平面上方向角θ_1(單位:度)，$\angle BAP=\theta_1$。
再令$\theta_2=\angle CAP$ (單位: 度)，即 $\theta=\theta_1+\theta_2$，
圖形中點 P_1 表示物體 P 對 M_1 第 1 次鏡射的成像。
點 P_{12} 表示點 P_1 繼續對 M_2 第 2 次鏡射的成像。
同理點 P_{121} 表示點 P_{12} 對 M_1 第 3 次鏡射的成像，…….依此類推。
另一邊，物體 P 先對 M_2 第 1 次鏡射的成像的是點 P_2，其後續系列的成像為點 P_{21}、點 P_{212}、點 P_{2121}，…….依此類推。



圖(1)



圖(2)

二、GeoGebra 的成像作圖：模擬光的反射，如圖(2)，以θ =90º 為例

(一). 當照射到物體 P 的光線反射到 Q，經由 M_2 反射到 R，繼續由 M_1 再反射。

(二). 對觀測者的視覺感受就以為有物體 P_2 與 P_{21}，讓觀測者看見。

(三). 成像若在面鏡M_1'上方和面鏡M_2'右側，仍可繼續做成像，直到成像落在∠B'AC'之內部。因為已經無光可繼續反射，所以成像到此為止。如圖(2)點 P_2 是物體 P 先對M_2第 1 次鏡射的成像，點 P_2 繼續對延伸虛鏡面M_1'成像得點 P_{21}，再來就無法繼續成像。同理在圖(1)中，P_{2121} 與 P_{1212} 都無法繼續成像。

三、利用現有公式先將角度分為以下各種情況觀察：

(一). 當$\frac{360°}{\theta}$為偶數的角：15º、20º、30º、45º、60º、90º

(二). 當$\frac{360°}{\theta}$為奇數的角度：40º、72º、120º

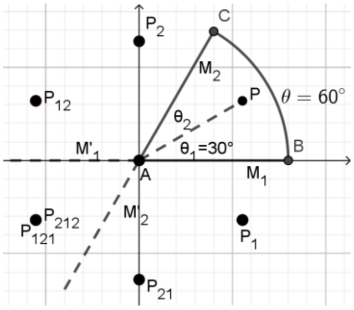
(三). 當$\frac{360°}{\theta}\notin$ N 的角度：50º、70º、75º、80º、100º、105º、110º、130º、135º、140º、150º、160º、165º、170º。

四、畫出$\frac{360^\circ}{\theta}$為偶數的成像位置與數量：

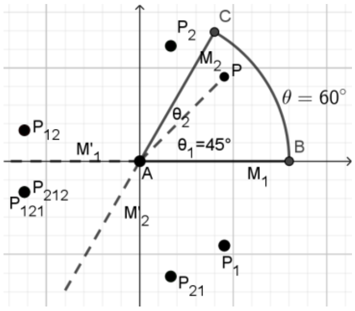
(一). 以$\theta = 60^\circ$、$\theta_1 = 30^\circ$為例

物體 P 在平分線上，經兩平面鏡的第三次成像重疊，故成像數為 3×2 – 1 = 5

如圖(3)成像點為 點 P_1、點 P_{12}、點 P_2、點 P_{21}、點 P_{212}=P_{121}。



圖(3)



圖(4)

(二). 以$\theta = 60^\circ$、$\theta_1 = 45^\circ$為例

物體 P 不在平分線上，經兩平面鏡的第三次成像重疊，故成像數為 3×2 – 1 = 5

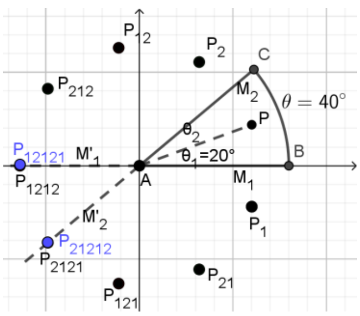
如圖(4)成像點為點 P_1、點 P_{12}、點 P_2、點 P_{21}、點 P_{212}=P_{121}。

結果：物體的位置並不會影響成像數。

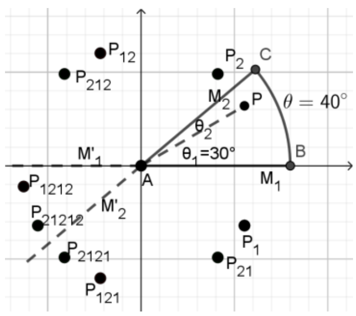
當$\theta = 60^o$時，物體 P 在平分線上或不在角平分線上，成像數皆為 $\frac{360^\circ}{\theta} - 1 = 5$。

五、畫出$\frac{360^\circ}{\theta}$為奇數的成像位置與數量：

(一).θ= 40°，如圖(5) 物體 P 在平分線上，經平面鏡的第五次成像與經平面鏡的第四次成像重疊即 P_{12121}=P_{1212}、P_{21212}=P_{2121}，故成像數為 5 + 5 – 2 = 8 。



圖(5)



圖(6)

(二). θ= 40º，如圖(6)中物體 P 不 在平分線上，先經 M_2 有五次成像與先經 M_1 有四次成像，故成像數為 5 + 4 = 9

以θ = 40º 為例，當物體(P)在平分線上時，成像數為$\frac{360°}{\theta}-1=8$個

當物體(P)不在角平分線上，成像數為 $\frac{360}{40}=9$ 個。

結果：若物體在角平分線上，成像數為$\frac{360°}{\theta}-1$個。

若物體不在角平分線上，成像數則為$\frac{360°}{\theta}$個。

六、當$\frac{360°}{\theta}\notin$ N 時，發現成像數公式需要做更深入討論與修正。

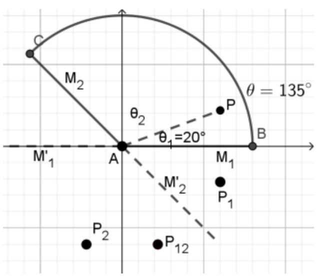
(一) 首先假設它的狀況跟奇數類似，因此做了是否位於角平分線上的模擬。結果卻無法發現任何的規律。以有限多個θ_1實驗觀察結果如下表所示：

兩平面鏡夾角θ　(單位:度)	50	70	75	80	100	105	110	130	135	140	150	160	165	170
物體位於角平分線上時成像數	8	6	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2
物體不位於角平分線上時成像數	7	5	5	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2

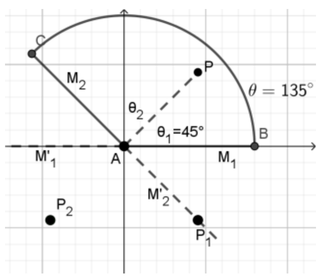
發現唯一的規律是：135°以後的角度成像數都是 2，因此針對這方面去觀察。

(二) 利用讓物體 P 來回在兩鏡夾角 135º 的內部移動。我們發現分別以 45º 和 90º 為分界線。當物體方向角位於 45º 以下或 90º 以上，成像有 3 個。當物體方向角介於 45º 與 90º 之間，成像則剩下 2 個。如圖(7)到圖(11)。

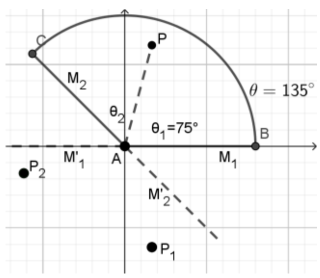
1. $\theta=135°$，當 $\theta_1<45°$ 成像數 = 3，如圖(7)中 P_1、P_{12}、P_2。
2. $\theta=135°$，當 $\theta_1=45°$ 成像數 = 2，如圖(8)中 P_1、P_2。



圖(7)

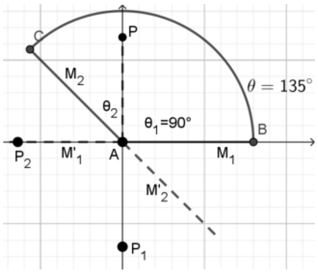


圖(8)

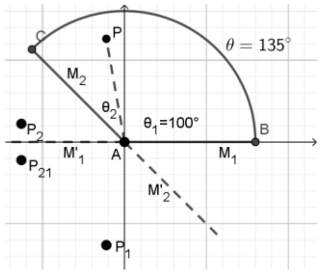


圖(9)

3. $\theta=135°$，當 $45°<\theta_1<90°$ 成像數 = 2，如圖(9) 中 P_1、P_2。
4. $\theta=135°$，當 $\theta_1=90°$ 成像數 = 2，如圖(10) 中 P_1、P_2。
5. $\theta=135°$，當 $\theta_1>90°$ 成像數 = 3，如圖(11) 中 P_1、P_2、P_{21}。



圖(10)

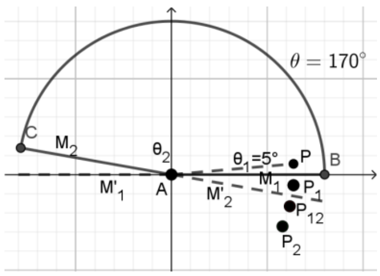


圖(11)

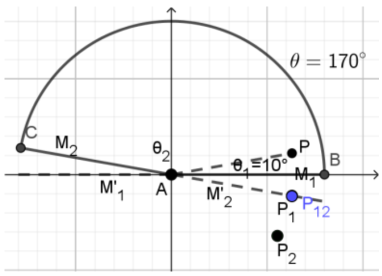
(三) 猜想 45^{o} 和 90^{o} 是 $\theta = 135°$ 成像數改變的分界角度，以 $\theta = 170^{o}$ 進行第二次的觀察。當物體在兩鏡夾角 170^{o} 的內部來回移動，發現這次成像數變化的分界線為 10^{o} 和 160^{o}。

1. $\theta = 170°$， 當 $\theta_1 < 10^{o}$，有 3 個成像，如圖(12)點中 P_1、P_{12}、P_2。

2. $\theta = 170°$， 當 $\theta_1 = 10^{o}$，其中一個第一次和第二次成像交疊，共有 2 個成像，如圖(13)中 P_1=P_{12}、P_2。



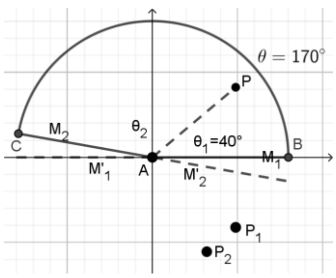
圖(12)



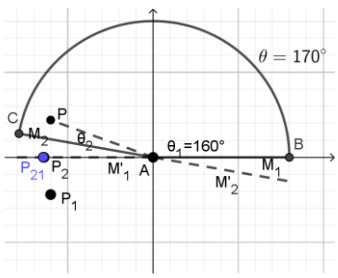
圖(13)

3. $\theta = 170°$，當 $10^{o} < \theta_1 < 169^{o}$，有 2 個成像，如圖(14) 中 P_1、P_2。

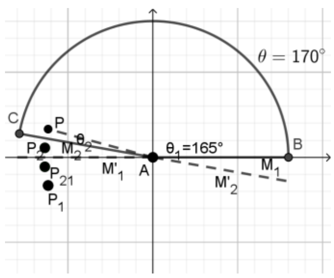
4. $\theta = 170°$，當 $\theta_1 = 160^{o}$，其中一個第一次和第二次成像交疊，共有 2 個成像，如圖(15)中 P_1、P_2= P_{21}。



圖(14)



圖(15)



圖(16)

5. $\theta = 170°$，當 $\theta_1 > 160^{o}$，成像數 = 3，如圖(16) 中 P_1、P_2、 P_{21}。

(四) 初步的觀察推論：

$\theta = 135^{\circ}$ 的分界線是 45° 和 90° 滿足 $90 = |180-2\times135|$ 和 $45 = 135 - 90$

$\theta = 170^{\circ}$ 的分界線是 10° 和 160° 滿足 $160 = |180 - 2\times 170|$ 和 $10 = 170 - 160$

成像數變化是 $[\frac{360^\circ}{\theta}+1] \to [\frac{360^\circ}{\theta}] \to [\frac{360^\circ}{\theta}+1]$。

當 模擬 80° 角時，也符合此公式。所以我們猜想分界線求法是：

令兩鏡夾角為 θ 的分界線角度為 b_1, b_2，

滿足 $b_1 + b_2 = \theta$，而 b_1 與 b_2 中恰有一個為 $|180^\circ - 2\theta|$，

換句話說，令 $b_1 = |180^\circ - 2\theta|$，則 $b_2 = \theta - b_1$。

當物體 P 方向角 θ_1 改變，成像數有如下的關係：

$0^\circ < \theta_1 < \min(b_1, b_2)$ 成像數為 $[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$，

$\min(b_1, b_2) \le \theta_1 \le \max(b_1, b_2)$ 成像數為 $[\frac{360^\circ}{\theta}]$，

$\max(b_1, b_2) < \theta_1 < \theta$ 成像數為 $[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$。

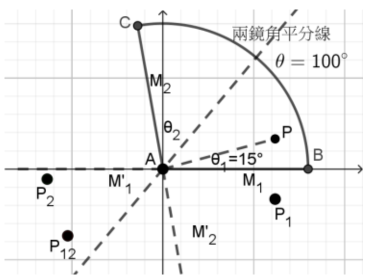
然而後來發現這個猜想只猜對了某些情況，最後被我們的研究推翻了。

(五) 在製作 $\theta = 100^{\circ}$ 的模擬圖時，成像數變化卻是 $3 \to 4 \to 3$ 分界線角度是 20° 和 80°，也就是 $[\frac{360^\circ}{\theta}] \to [\frac{360^\circ}{\theta}+1] \to [\frac{360^\circ}{\theta}]$，與 $\theta = 135^{\circ}$ 和 $\theta = 170^{\circ}$ 所得關係 $[\frac{360^\circ}{\theta}+1] \to [\frac{360^\circ}{\theta}] \to [\frac{360^\circ}{\theta}+1]$ 不一致，如圖(17)到圖(19)說明。

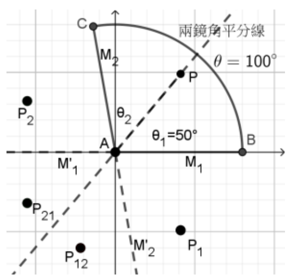
1. $\theta = 100^{\circ}$，當 $\theta_1 \le 20^{\circ}$，成像有 3 個，如圖(17) 中 P_1、P_2、P_{12}。

2. $\theta = 100^{\circ}$，當 $20^{\circ} < \theta_1 < 80^{\circ}$，成像 4 個，如圖(18) 中 P_1、P_2、P_{12}、P_{21}。

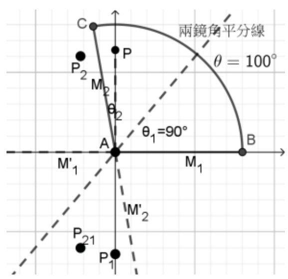
3. $\theta = 100^{\circ}$，當 $\theta_1 \ge 80^{\circ}$，成像又回到 3 個，如圖(19) 中 P_1、P_2、P_{21}。



圖(17)



圖(18)



圖(19)

(六) 經圖(17)到圖(19)討論，顯示初步的推論不正確，於是再次去觀察物體 P 是否位於角平分線上的會影響成像數。又有新發現，θ = 100º、105º、110º 時，在角平分線上時成像反而是比不在角平分線上多，與初步推論 $[\frac{360°}{\theta}+1] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}+1]$結果不一致，於是修正推論。

修正推論：

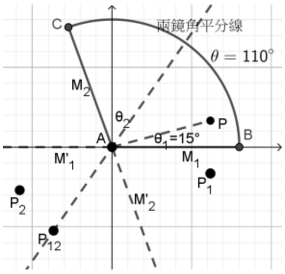
$90° \leq \theta \leq 120°$時，成像變化可能會是$[\frac{360°}{\theta}] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}+1] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}]$。

繼續觀察修正推論是否正確？

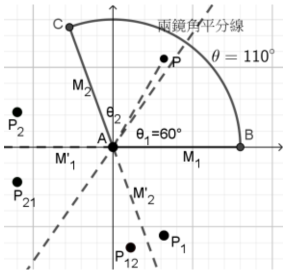
1. θ = 110º，當$\theta_1 \leq 40°$，成像有 3 個，如圖(20) 中 P_1、P_2、P_{12}。

2. θ = 110º，當$40° < \theta_1 < 70°$，成像有 4 個，如圖(21) 中 P_1、P_2、 P_{12}、P_{21}。

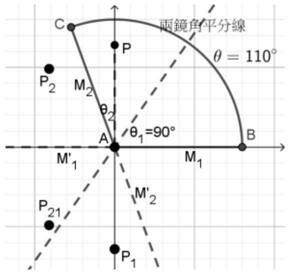
3. θ = 110º，當$\theta_1 \geq 70°$，成像有 3 個，如圖(22)點中 P_1、P_2、P_{21}。



圖(20)



圖(21)

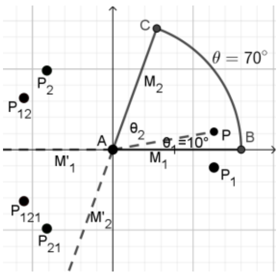


圖(22)

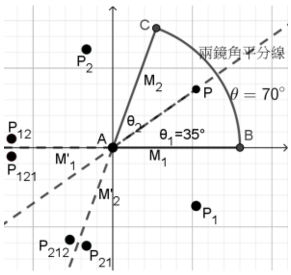
(七) 本來以為修正推論就是正確的。但當 繼續實驗時， 卻又發現鏡面夾角為 θ =70º時分界線角度為 30º 與 40º不符修正推論。雖然θ =70º不在 90º 與 120º之間，但變化跟 90º 與 120º之間同樣是$[\frac{360°}{\theta}] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}+1] \rightarrow [\frac{360°}{\theta}]$。

1.θ = 70º，當$\theta_1 \leq 30°$，成像有 5 個，如圖(23) P_1、P_2、 P_{12}、P_{121}、P_{21}。

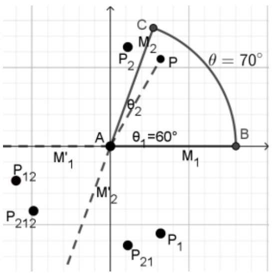
2. θ = 70º，當$30° < \theta_1 < 40°$，成像 6 個，如圖(24) 中 P_1、P_2、 P_{12}、P_{21}、P_{121}、P_{212}。



圖(23)



圖(24)



圖(25)

3. θ = 70°，當$\theta_1 \geq 40°$，成像有 5 個，如圖(25) 中 P_1、P_2、 P_{12}、P_{21}、P_{212}。

(八) 想了很久，卻一直無法理解為什麼又遇到不符合的角度。 針對這些角度去尋找他們的差別。而當想到現有公式中的 $[\frac{360°}{\theta}]$時， 觀察到，如果成像數變化為$[\frac{360°}{\theta}] \to [\frac{360°}{\theta}+1] \to [\frac{360°}{\theta}]$ ，$\frac{180°}{\theta}$的小數部分都大於 0.5。這個發現與前人作品有類似結論。(吳易修[1])

我們還發現$\theta = 50°$時，前面猜想的分界線角度計算式又無法使用，依照前面猜想，

分界線角度=$|180° - 2 \times 50°| = 80° > \theta = 50°$，

這個結果顯然不合理。

(九) 因此猜測，$\frac{180°}{\theta}$的小數點後的小數部分是影響成像數的原因，由於$\frac{180°}{\theta}$的小數點後的小數部分是 $\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]$。所以做了如下的猜想：

猜想 1.

$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0$，就是$\frac{360°}{\theta} =$ 偶數，使用偶數公式，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$；

猜想 2.

$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0.5$，就是$\frac{360°}{\theta} =$ 奇數，使用奇數公式，

當物體 P 在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$，

當物體 P 不在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta}$ ；

猜想 3.

$0 < \frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] < 0.5$，成像數變化是$[\frac{360°}{\theta}+1] \to [\frac{360°}{\theta}] \to [\frac{360°}{\theta}+1]$；

猜想 4.

$0.5 < \frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] < 1$，成像數變化是$[\frac{360°}{\theta}] \to [\frac{360°}{\theta}+1] \to [\frac{360°}{\theta}]$。

分界線角度應該有其他的求法有待解決。

七、數學性質與公式推導

(一) 以上幾點皆以理化的概念利用觀察確認成像數，但為了增加公式的可信度，決定以數學角度去重新推算公式。利用一個簡單的數學方法推算出所有的成像數以及成像位置，當鏡子 M_2 方向角 θ，物體位在方向角θ_1，可以求出成像的方向角為 $2\theta-\theta_1$，如圖(26)說明驗證此公式。這時，可以將物體和成像之間的角度想像成一個旋轉角，將這個度數簡稱為旋轉角度。

假設物體 P，對平面鏡$\overline{AC}$成像於 P_2，$\angle BAC = \theta$，$\angle BAP = \theta_1$，

因為物體與鏡面的距離等於成像與鏡面的距離，所以 $\overline{AC}$垂直平分$\overline{PP_2}$，

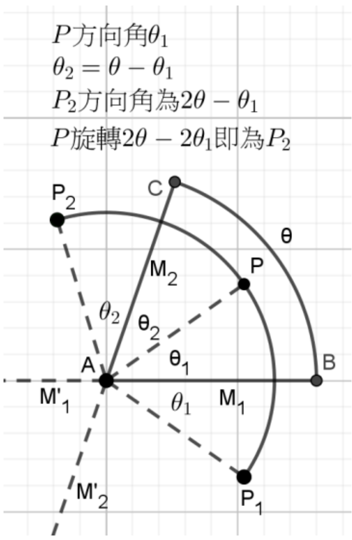
因此 $\angle PAC=\angle CAP_2$， 又$\angle PAC = \theta_2= \theta-\theta_1$，

得到 $\angle CAP_2 =\theta_2 = \theta-\theta_1$。進而推導出 $\angle BAP_2 =\theta_1 + 2\theta_2 = 2\theta-\theta_1$，

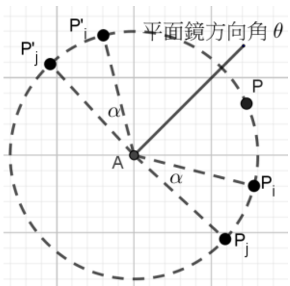
而物體的旋轉角度 $\angle PAP_2= 2(\theta-\theta_1)$，也得到點 P_2的方向角為 $2\theta-\theta_1$。

以旋轉角的觀點物體 P 對平面鏡$\overline{AC}$成像相當於逆時鐘方向旋轉 $2\theta_2$，同理物體 P 對平面鏡$\overline{AB}$成像相當於順時鐘方向旋轉 $2\theta_1$到達 P_1。

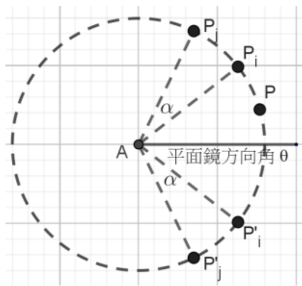
因此物體 P 同時對平面鏡$\overline{AB}$與$\overline{AC}$各成像一次，相當於 P 在以 A 為圓心$\overline{AP}$為半徑的圓弧上使用了 $2(\theta_1+\theta_2)= 2\theta$ 的圓心角度數。



圖(26)



圖(27)



圖(28)

再來觀察以 A 為圓心$\overline{AP}$為半徑的圓弧上圓心角度數α的兩點 P_i、P_j 同時對位在方向角θ的平面鏡做映射，成像後的角度關係。如圖(27)、圖(28)可知無論兩點 P_i、P_j 同時對位在方向角θ逆時鐘或順時鐘方向往平面鏡成像，成像後兩點P_i'、P_j'一樣保持圓弧上圓心角度數α不變。因此將圖(26)、圖(27)、圖(28)觀察結果整理成下列三個性質。

（**性質 1**）

平面鏡過 A(0, 0)方向角為θ，點 P 不在原點上且方向角為θ_1，則 P 對鏡子一次成像點之方向角為 $2\theta - \theta_1$

〔**證明**〕令平面鏡 M_2 之方向角為θ，P 對 $\overline{AC}$成像得 P_2。

當$0° < \theta_1 < \theta$，如圖(26)、圖(31)，因為$\overline{AC}$平分$\angle PAP_2$，

故 P_2 之方向角為　$\theta + \theta - \theta_1 = 2\theta - \theta_1$。。

當$\theta < \theta_1$，如圖(32)，因為$\overline{AC}$平分$\angle PAP_2$，

故 P_2 之方向角為　$\theta - (\theta_1 - \theta) = 2\theta - \theta_1$。　　得證 ■

（**性質 2**）

兩個平面鏡夾角為θ交點為 A、一個點 P 分別對兩個鏡子同時成像一次，兩個成像點P_1、P_2，則P_1、P_2對 A 的圓心角為 2θ。

〔**證明**〕令 A(0, 0) 不失一般性，

令其中一個平面鏡為 M_1 方向角$0°$，另一鏡子為 M_2 方向角為$\theta < 360°$，

再令 P 方向角為θ_1、分別對 M_1、M_2 之成像為P_1、P_2。

共有以下四種情況，各成像的方向角都標記在圖形中：

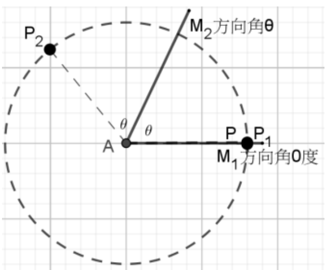
(1) $\theta_1 = 0°$時，則 P=P_1、P_2方向角為 2θ，得$\angle P_1AP_2 = 2\theta$，如圖(29)。

(2) $\theta_1 = \theta$時，則 P=P_2、P_1方向角為 2θ，得$\angle P_1AP_2 = 2\theta$，如圖(30)。

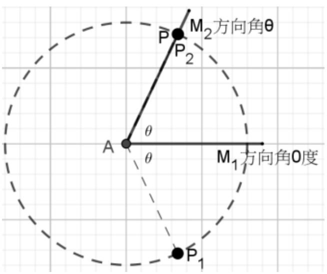
(3) $0° < \theta_1 < \theta$，則P_1方向角為$-\theta$、P_2方向角為 $2\theta - \theta_1$，如圖(31)。

(4) $\theta < \theta_1 < 360°$，則P_1方向角為$-\theta$、P_2方向角為 $2\theta - \theta_1$，如圖(32)。

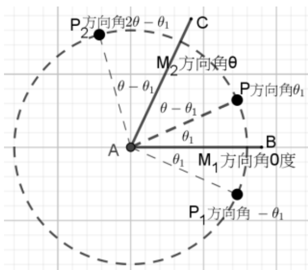
在情況(3)與(4)中$\angle P_1AP_2 = 2\theta - \theta_1 - (-\theta_1) = 2\theta$，故得證 ■



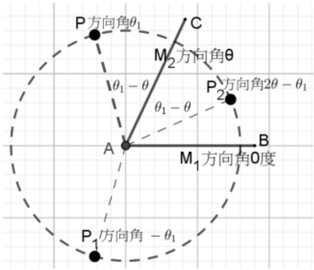
圖(29)



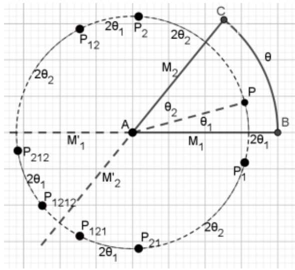
圖(30)



圖(31)



圖(32)



圖(33)

（**性質 3**）

以 A 為圓心$\overline{AP}$為半徑的圓弧上圓心角度數α的兩點 P_i、P_j 同時對位在過 A 的平面鏡做映射，成像後圓心角度數仍為α，但是方向角大小互換。

〔**證明**〕如圖(27)、圖(28)，令 P_i、P_j 對平面鏡做映射之成像分別為P_i'、P_j'

無論同時對鏡子逆時針方向鏡射圖(27)或對鏡子順時針方向鏡射圖(28)，鏡子所在直線必為$\angle P_i AP_i'$之角平分線，也是$\angle P_j AP_j'$之角平分線。

因此$\angle P_i AP_j = \angle P_i' AP_j' = \alpha$，故成像後圓心角度數仍為α。

再來，令P_i的方向角為i、P_i'的方向角為i'、

P_j的方向角為j、P_j'的方向角為j'。

因為鏡子所在直線方向角θ，為$\angle P_i AP_i'$與$\angle P_j AP_j'$之共同角平分線。

所以 $\frac{i+i'}{2} = \theta = \frac{j+j'}{2}$，得到 $i + i' = j + j'$，

可推出 若 $i > j$，則 $i' < j'$ ；反之，若 $i < j$，則 $i' > j'$。 故得證 ■

由以上三個性質可以將物體 P 在兩個平面鏡之間陸續交錯成像的序列歸納為幾個重點，如圖(33) 。

由 P 開始依逆時針順序得到點序列 S_2={P, P_2, P_{12}, P_{212}, P_{1212},…..} ，依順時針次序得到點序列 S_1={P, P_1, P_{21}, P_{121}, P_{2121},…..} ，兩個 序列中第 1 點為物體 P 之外，其他各點都是成像點，這些成像點的足碼位數代表第幾次成像。

（**重點 1**）序列 S_2 除了第 1 項之外，足碼末位數都是 2，表示最後由 M_2 成像。反之，序列 S_1 除了第 1 項之外，足碼末位數都是 1，表示最後由 M_1 成像。足碼末位數相同代表由 P 旋轉相同方向的成像點。

又每一個序列中相鄰兩項之間的足碼差異，後項足碼比前項足碼多 1 個領導碼。以 P_{12}, P_{212} 來解釋，兩者來源為 P 與 P_2 依序同做 M_1 再做 M_2 成像而得；也可以說兩者來源為 P_1 與 P_{21} 同做 M_2 成像而得。由性質 2 與性質 3 以旋轉角度觀點描述就是：

P 以逆時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_2，P 與 P_2 同做 M_1 鏡射得 P_1 與 P_{21}

因為旋轉角度不變但是方向角大小互換，所以 P_1 以順時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_{21}，同理可以得到 P_{12} 以逆時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_{212}。

（**重點 2**）當(i, j)=(1, 2)或(2, 1)其中一個，同一個序列中相鄰兩項足碼，後項比前項多一個領導碼。如圖(33)，其意義描述如下：

(1) 前項足碼 ijiji⋯ji 變成後項後項足碼 jijiji⋯ji表示由點 P 與點 P_j 經過奇數次鏡射，所以 $P_{ijij...ji}$ 到 $P_{jijij...ji}$ 方向與 P 到 P_j 角度大小不變，都是 $2\theta_j$，旋轉方向相反。

(2) 前項足碼 ijiji⋯jij 變成後項後項足碼 jijiji⋯jij表示由點 P 與點 P_j 經過偶數次鏡射，所以 $P_{ijij...jij}$ 到 $P_{jijij...jij}$ 方向與 P 到 P_j 角度大小不變，都是 $2\theta_j$，旋轉方向相同。

(二)利用以上三個性質與二個重點描述成像數

1 由圖(33)知道 P 同時對 M_1 與 M_2 做一 次成像使用圓弧角度

$$2\theta_1 + 2\theta_2 = 2\theta$$

每使用一次2θ得到 2 個成像點。

因為 P 同時對 M_1 與 M_2 做$\left[\frac{360°}{2\theta}\right]$ 次成像，

至此已得$\left[\frac{360°}{2\theta}\right] \times 2 = \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$個成像點。

(1). 如果沒有剩餘的圓弧角度時，表示最後一次成像由順時針而來的成像恰與逆時針而來的成像重合，所以成像數 $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1$。

(2). 如果還有剩餘的圓弧角度時，剩餘角為 $360° - \left[\frac{360°}{2\theta}\right] \times 2\theta$。

雖然剩餘的圓弧角度小於2θ，不足以同時再對 M_1 與 M_2 做一次成像，只要剩餘的圓弧角度大於$2\theta_1$或 $2\theta_2$就足夠再做成像。

即 $2\theta_1 < 360° - \left[\frac{360°}{2\theta}\right] \times 2\theta$ 或 $2\theta_2 < 360° - \left[\frac{360°}{2\theta}\right] \times 2\theta$足夠再做成像，

化簡成 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 或 $\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$足夠再做成像。

(3). 如果 $\theta_1 = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 或 $\theta_2 = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 時，雖然可再做成像，但是只是與前面已成像點重合，我們將此情形列入不增加成像點處理。

2 所以成像數公式可以寫成：

(1)當 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta = 0°$，成像數= $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1$，

(2)當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$，

(3)當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$且$\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

(4)當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

(5)當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 2$。

特別說明上面公式中第 1.種情形之條件 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta = 0°$，相當於

$\frac{180°}{\theta} - \left[\frac{180°}{\theta}\right] = 0$， 也相當於 $\frac{180°}{\theta} \in N$。

當我們歸納出這個公式時發現跟蒐集到的文獻描述不同時，更進一步發現文獻所描述的公式不對。簡單說文獻上的公式：

若$\frac{360°}{\theta} \notin \mathrm{N} \Rightarrow$ 成像數為$[\frac{360°}{\theta}]$ ，其中 [ ]：高斯符號 。

這句話只陳述了部分事實，沒有說出全部事實，所以不能當公式使用。

(三)成像數不增、增 1、增 2 的分界線方向角度

1 由以上成像數公式的討論中發現，成像數增 1 或增 2 在於θ_1 或θ_2足夠小有關係。又因為物體 P 的方向角θ_1，$\theta_2 = \theta - \theta_1$，因此可以定義臨界角度 t，使

(1). $\theta_1 < t$可以增 1 個成像點，

(2). $\theta_2 < t$可以增 1 個成像點，

(3). $\theta_1 < t$且$\theta_2 < \mathrm{t}$可以增 2 個成像點。

在成像點公式討論中知道，$\mathrm{t} = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$。

物體 P 成像點數不增、增 1、增 2 分界線方向角就可表示成，

$b_1 = t$，$b_2 = \theta - \mathrm{t}$，成像數不增、增 1、增 2 情形討論如下。

2 因為$\theta_1 < t$ 表示 $\theta_1 < b_1$ ，

又$\theta_2 < t$ 就是 $\theta - \theta_1 < \theta - b_2$，也就是$\theta_1 > b_2$，

物體 P 方向角θ_1可分成以下 4 種情形：

(1)當物體 P 方向角$\theta_1 < b_1$且$\theta_1 > b_2$，可以增 2 個成像點，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 2$。

(2)當物體 P 方向角$\theta_1 < b_1$且$\theta_1 < b_2$，可以增 1 個成像點，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$。

(3)當物體 P 方向角$\theta_1 > b_1$且$\theta_1 > b_2$，可以增 1 個成像點，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$。

(4)當物體 P 方向角$\theta_1 > b_1$且$\theta_1 < b_2$，不增加成像點，

成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$。

(四) 分界線方向角b_1、b_2 的求法

因為求得 b_1 即可求出 b_2 兩者互相對稱，

$b_1 < \mathrm{t} = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，

需要先將 $\left[\frac{180°}{\theta}\right]$ 對應各種正整數值的 θ 範圍找出來，再找出滿足$b_1 \geq b_2$的 θ 範圍，就可以得到滿足$b_1 < b_2$的θ 範圍，與滿足$b_1 = b_2$的θ 範圍。

因為b_1 的臨界角就是 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ ，又$b_2 = \theta - b_1$。

$b_1 \geq b_2$ 就是 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta \geq \theta - (180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta)$

化簡得到 $\theta \leq \frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$ ……………………………………………….…………(1)

算式(1)就是滿足$b_1 \geq b_2$的θ 範圍，再與$\left[\frac{180°}{\theta}\right]$ 對應的 θ 範圍取出共同角度。

舉二個例子說明：(只討論正整數角度)

〔例 1〕取$\left[\frac{180°}{\theta}\right]=3$，得到 $46° \le \theta \le 60°$，…………………………………….………(2)

將 $\left[\frac{180°}{\theta}\right]=3$帶入算式(1)，$\theta \le \frac{360°}{1+2\times3}=\frac{360°}{7}=51\frac{3°}{7}$，……….………(3)

取出(2)、(3)共同角度，就是 $46° \le \theta \le 51°$滿足$b_1 > b_2$。■

〔例 2〕取$\left[\frac{180°}{\theta}\right]=4$，得到 $37° \le \theta \le 45°$，…………………..…….………(4)

將 $\left[\frac{180°}{\theta}\right]=4$帶入算式(1)，$\theta \le \frac{360°}{1+2\times4}=\frac{360°}{9}=40°$，……….………(5)

取出(4)、(5)共同角度，就是 $37° \le \theta \le 40°$滿足$b_1 \ge b_2$，

又由 (5)可知 $\theta = 40°$ 滿足 $b_1 = b_2$。■

將兩鏡的夾角θ介於$1°$到$179°$所有可能正整數角度帶入討論，如表(1)。

$\left[\frac{180°}{\theta}\right]$	θ下限(含)	θ上限(含)	$\frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$	b1>b2 θ範圍	b1=b2 θ範圍	b1<b2 θ範圍
1	91	180	120	[91,119]	120	[121, 180]
2	61	90	72	[61,71]	72	[73, 90]
3	46	60	51.42857143	[46,51]	無	[52, 60]
4	37	45	40	[37,39]	40	[41, 45]
5	31	36	32.72727273	[31,32]	無	[33, 36]
6	26	30	27.69230769	[26,27]	無	[28, 30]
7	23	25	24	23	24	25
8	21	22	21.17647059	21	無	22
9	19	20	18.94736842	無	無	[19, 20]
10	17	18	17.14285714	17	無	18
11	16	16	15.65217391	無	無	16
12	14	15	14.4	14	無	15
13	13	13	13.33333333	13	無	無
15	12	12	11.61290323	無	無	12
16	11	11	10.90909091	無	無	11
18	10	10	9.72972973	無	無	10
20	9	9	8.780487805	無	無	9
22	8	8	8	無	8	無
25	7	7	7.058823529	7	無	無
30	6	6	5.901639344	無	無	6
36	5	5	4.931506849	無	無	5
45	4	4	3.956043956	無	無	4
60	3	3	2.975206612	無	無	3
90	2	2	1.988950276	無	無	2
180	1	1	0.997229917	無	無	1

表(1)

如果θ 在實數中討論。當 $\left[\frac{180°}{\theta}\right] = k$時，

求出 $\frac{180°}{k+1}$ 、 $\frac{360°}{1+2k}$ 、 $\frac{180°}{k}$ 三個數值，代入表(2)，就可求出θ範圍。

	取角範圍	b1=b2 取角範圍	b1>=b2 取角範圍	b1>b2 取角範圍	b1<b2 取角範圍
$\left[\frac{180°}{\theta}\right]$	(下限, 上限]	$\theta = \frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$	$\theta \le \frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$	$\theta < \frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$	$\theta > \frac{360°}{1+2\left[\frac{180°}{\theta}\right]}$
k	$(\frac{180°}{k+1}, \frac{180°}{k}]$	$\frac{360°}{1+2k}$	$(\frac{180°}{k+1}, \frac{360°}{1+2k}]$	$(\frac{180°}{k+1}, \frac{360°}{1+2k})$	$(\frac{360°}{1+2k}, \frac{180°}{k}]$

表(2)

表(3)是討論實數角度θ時，列舉一部分 $\frac{180°}{k+1}$ 、 $\frac{360°}{1+2k}$ 、 $\frac{180°}{k}$的數值表。

$\left[\frac{180°}{\theta}\right]$	$\frac{180}{1+k}$	$\frac{360}{1+2k}$	$\frac{180}{k}$	$\frac{180}{1+k}$ 帶分數			$\frac{360}{1+2k}$ 帶分數			$\frac{180}{k}$ 帶分數		
k	小數 6 位	小數 6 位	小數 6 位	整數	分子	分母	整數	分子	分母	整數	分子	分母
1	90.000000	120.000000	180.000000	90	0	2	120	0	3	180	0	1
2	60.000000	72.000000	90.000000	60	0	3	72	0	5	90	0	2
3	45.000000	51.428571	60.000000	45	0	4	51	3	7	60	0	3
4	36.000000	40.000000	45.000000	36	0	5	40	0	9	45	0	4
5	30.000000	32.727273	36.000000	30	0	6	32	8	11	36	0	5
6	25.714286	27.692308	30.000000	25	5	7	27	9	13	30	0	6
7	22.500000	24.000000	25.714286	22	4	8	24	0	15	25	5	7
8	20.000000	21.176471	22.500000	20	0	9	21	3	17	22	4	8
9	18.000000	18.947368	20.000000	18	0	10	18	18	19	20	0	9
10	16.363636	17.142857	18.000000	16	4	11	17	3	21	18	0	10
11	15.000000	15.652174	16.363636	15	0	12	15	15	23	16	4	11
12	13.846154	14.400000	15.000000	13	11	13	14	10	25	15	0	12
13	12.857143	13.333333	13.846154	12	12	14	13	9	27	13	11	13
15	11.250000	11.612903	12.000000	11	4	16	11	19	31	12	0	15
16	10.588235	10.909091	11.250000	10	10	17	10	30	33	11	4	16
18	9.473684	9.729730	10.000000	9	9	19	9	27	37	10	0	18
20	8.571429	8.780488	9.000000	8	12	21	8	32	41	9	0	20
22	7.826087	8.000000	8.181818	7	19	23	8	0	45	8	4	22
25	6.923077	7.058824	7.200000	6	24	26	7	3	51	7	5	25
30	5.806452	5.901639	6.000000	5	25	31	5	55	61	6	0	30
36	4.864865	4.931507	5.000000	4	32	37	4	68	73	5	0	36
45	3.913043	3.956044	4.000000	3	42	46	3	87	91	4	0	45
60	2.950820	2.975207	3.000000	2	58	61	2	118	121	3	0	60
90	1.978022	1.988950	2.000000	1	89	91	1	179	181	2	0	90
180	0.994475	0.997230	1.000000	0	180	181	0	360	361	1	0	180

表(3)

以例 3、例 4 說明如何使用表(2) 、表(3) ：

〔例 3〕取$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] = 7$，查表(3)，得$\frac{180^\circ}{7+1} = 22\frac{1}{2}^\circ$ 、$\frac{180^\circ}{7} = 25\frac{5}{7}^\circ$ 、$\frac{360^\circ}{1+2\times7} = 24^\circ$ ，

代入表(2)

當 $22\frac{1}{2}^\circ < \theta \leq 25\frac{5}{7}^\circ$ 時

$\theta = \frac{360^\circ}{1+2\times7} = 24^\circ$時，$b_1 = b_2$；

$22\frac{1}{2}^\circ < \theta \leq 24^\circ$時，$b_1 \geq b_2$ ；

$24^\circ < \theta \leq 25\frac{5}{7}^\circ$時，$b_1 < b_2$。■

〔例 4〕用手算，當$\theta = 23.5^\circ$時，求出b_1、b_2與例 3 的結果比較是否相符？

當物體 P 方向角θ_1分別為5°、10°、20°，成像數？

$\left[\frac{180^\circ}{23.5^\circ}\right] = 7$， $b_1 = 180^\circ - \left[\frac{180^\circ}{23.5^\circ}\right] \times 23.5^\circ = 180^\circ - 164.5^\circ = 15.5^\circ$，

$b_2 = 23.5^\circ - 15.5^\circ = 8^\circ$，結果$b_1 \geq b_2$與例 3 查表結果相同。

$\theta_1 = 5^\circ$時，$\theta_1 < b_2 < b_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1 = 15$；

$\theta_1 = 10^\circ$時，$b_2 < \theta_1 < b_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 2 = 16$；

$\theta_1 = 20^\circ$時，$b_2 < b_1 < \theta_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1 = 15$。■

伍、研究結果

成像數整理列表，如表(4)

當 $\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] = 0$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 - 1$，

當 $\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \neq 0$ 時，$b_1 = 180^\circ - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times \theta$， $b_2 = \theta - b_1$

θ滿足$b_1 > b_2$	$\theta_1 \leq b_2$	$b_2 < \theta_1 < b_1$	$b_1 \leq \theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 2$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$
θ滿足$b_1 = b_2$	$\theta_1 < b_1$	$b_1 = \theta_1 = b_2$	$b_2 < \theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$
θ滿足$b_1 < b_2$	$\theta_1 < b_1$	$b_1 \leq \theta_1 \leq b_2$	$b_2 < \theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$

表(4)

陸、討論

一、$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=0$，即 $\frac{180^\circ}{\theta}=$ 偶數或奇數 情形，

成像數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2-1$=11，成像數與$\theta_1$無關。

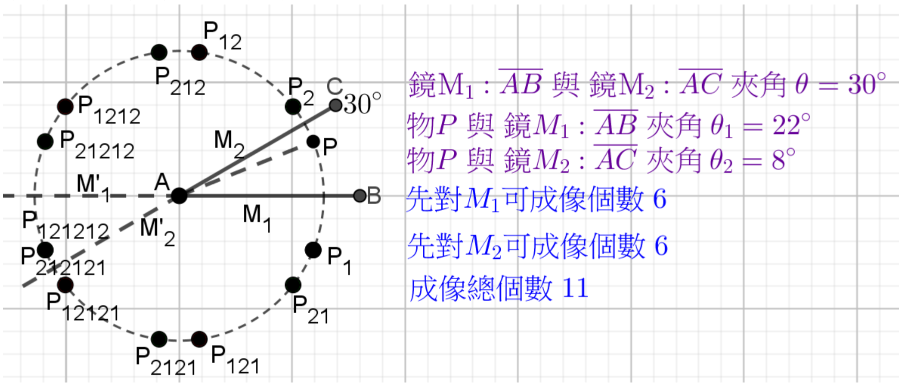
先向 M_1 成像的序列點最後一個與先向 M_2 的最後一個重合。

這個結果與現有公式，〔若m $=\frac{360^\circ}{\theta}$為偶數 ⇒ 成像數為 m–1〕，結果相同，

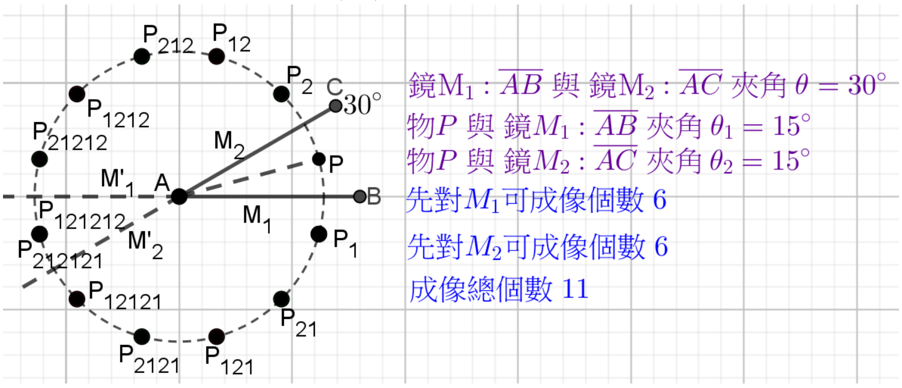
也跟我們的猜想一致。

(一). 以 $\theta=30^\circ$為例，$\frac{180^\circ}{\theta}=6$，成像數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2-1$=11，

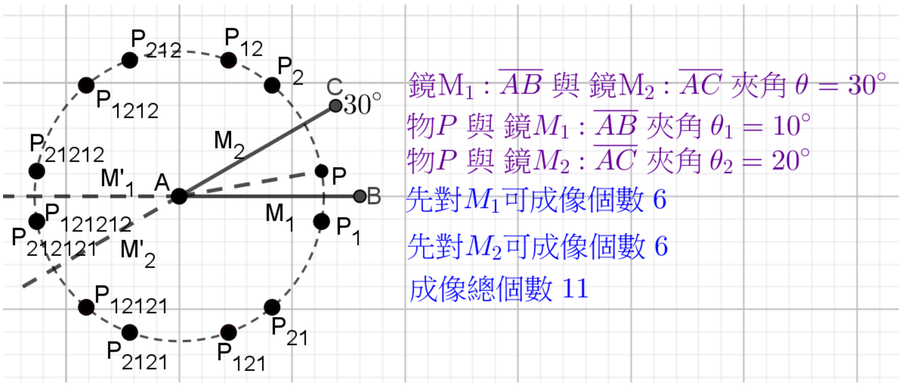
如圖(34)、圖(35)、圖(36)，P_{121212}=P_{212121}。



圖(34)



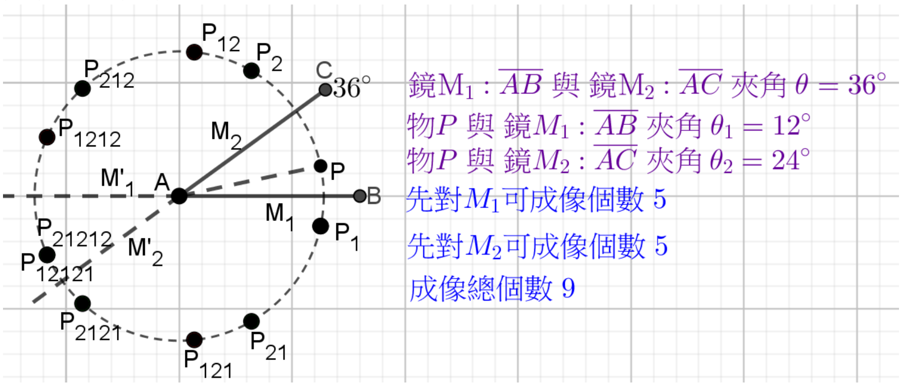
圖(35)



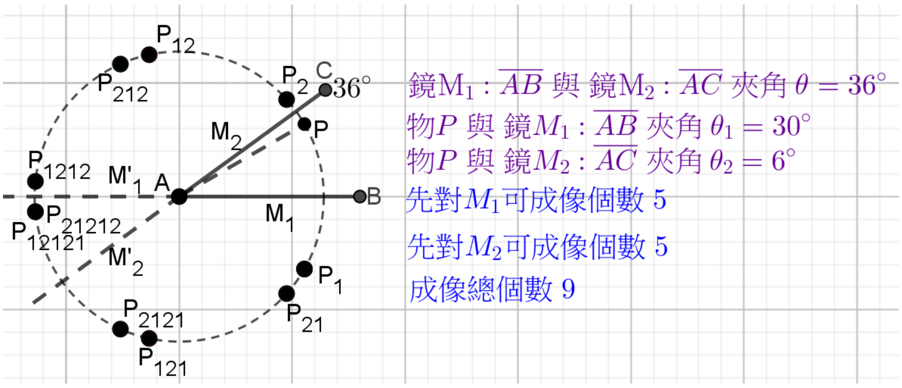
圖(36)

(二) 以 $\theta = 36^\circ$為例，$\frac{180^\circ}{\theta} = 5$，成像數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 - 1$=9，

如圖(37)、圖(38)，P_{12121}=P_{21212}。



圖(37)



圖(38)

二、$\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \neq 0$ ，先找$\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] = \frac{1}{2}$，

相當於現有公式〔若$m = \frac{360^\circ}{\theta}$為奇數〕的情形。

(一)現有公式陳述為：

若$m = \frac{360^\circ}{\theta}$為奇數

1. 若物體在兩平面鏡的角平分線上 ⇒ 成像數為 m−1

2. 若物體不在兩平面鏡的角平分線上 ⇒ 成像數為 m

以$\theta = 72^\circ$為例，現有公式求出成像數=5 或 4。

(二)利用我們的研究結果

1. 以$\theta = 72^\circ$為例，

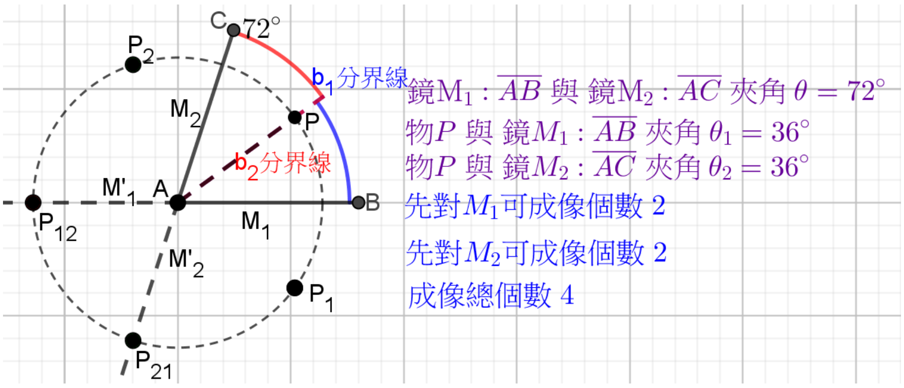
$b_1 = 180^\circ - \left[\frac{180^\circ}{72^\circ}\right] \times 72^\circ = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$，$b_2 = 36^\circ$，

由表(3)中 $b_1 = b_2$ 情況使用的公式，

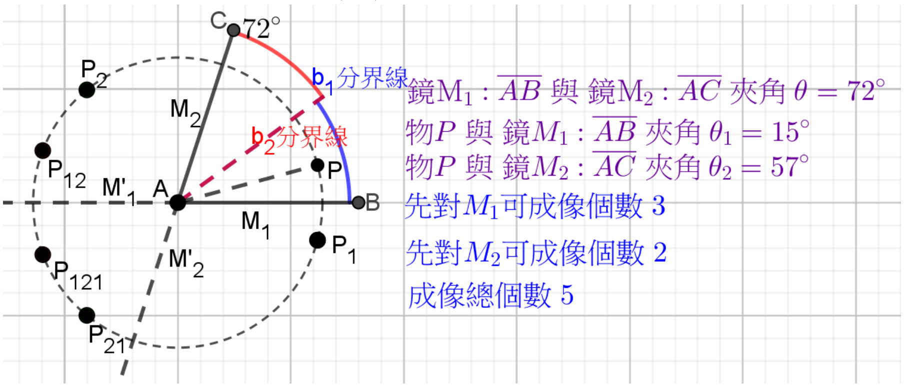
$b_1 = \theta_1 = b_2 = 36^\circ$，成像數 $= \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2$，

$\theta_1 < b_1 = 36^\circ$或$\theta_1 > b_2 = 36^\circ$，成像數 $= \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

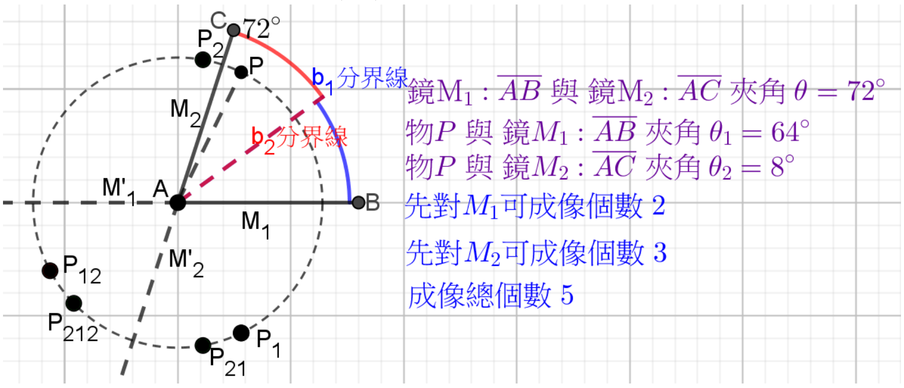
如圖(39)、圖(40)、圖(41)，這部分與現有公式結果相同。



圖(39)



圖(40)



圖(41)

三、$\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \neq 0$ 且 $\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \neq \frac{1}{2}$ 時，

相當於現有公式〔$\mathrm{m} = \frac{360^\circ}{\theta} \notin \mathrm{N}$〕的情形。

現有公式陳述如下：

若 $\mathrm{m} = \frac{360^\circ}{\theta} \notin \mathrm{N} \Rightarrow$ 成像數為$\mathrm{m} = [\frac{360^\circ}{\theta}]$ ，其中 [ ]：高斯符號 。

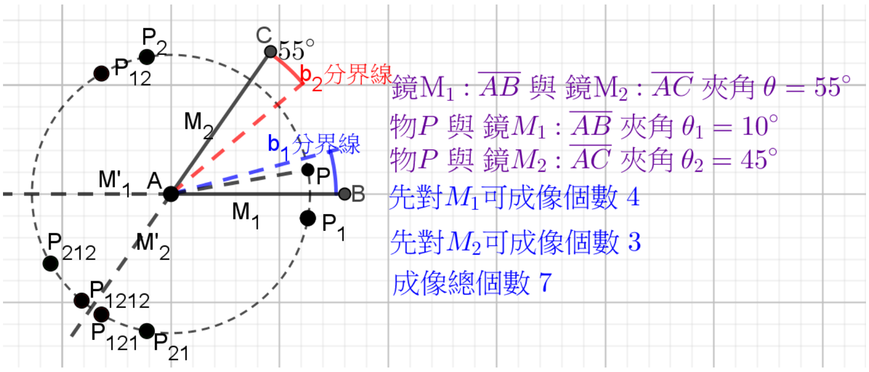
但是現有公式，忽視了分界線的重要性，以致於這個公式只考慮特殊情況，沒有考慮全面的情形。前人研究結果解釋需要做±1修正的原因，以成像點分裂或重疊帶過(吳易修[1]) 。我們找出真正的原因，說明如下：

由表(2)知道 $b_1 = b_2$的 θ有$120°$、$72°$、$40°$、$24°$、$8°$都滿足 $\frac{180^\circ}{\theta} - \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] = \frac{1}{2}$，所以從表(2)挑出$b_1 < b_2$與$b_1 > b_2$的$\theta$各一個詳細討論。

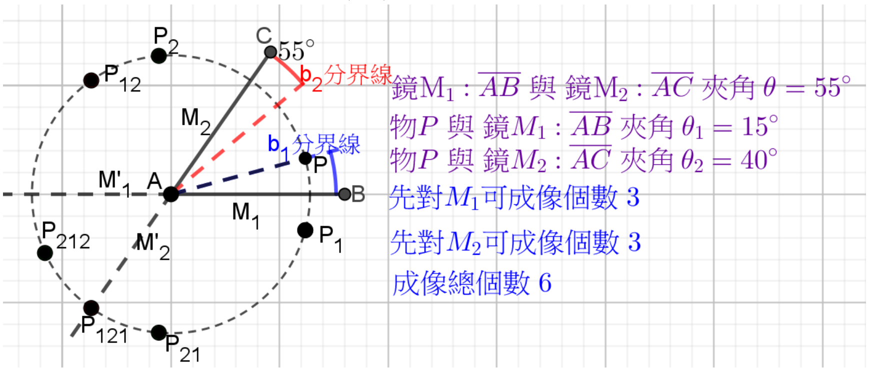
(一) 以 $\theta = 55°$為例，屬於$b_1 < b_2$情形，

$b_1 = 180° - \left[\frac{180°}{55°}\right] \times 55° = 15°$，$b_2 = 55° - 15° = 40°$，

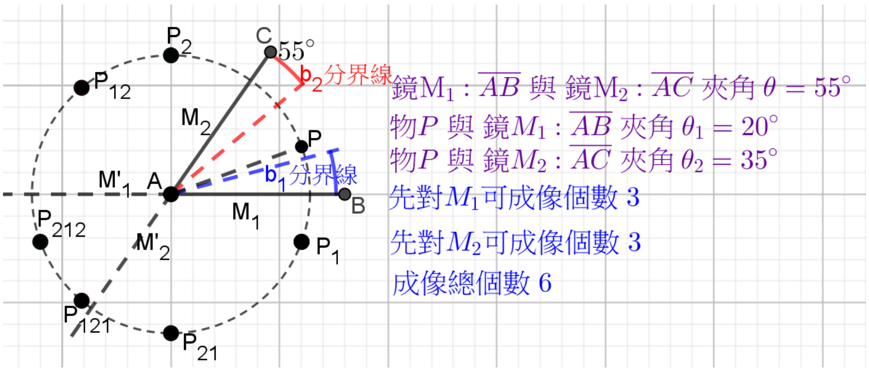
取 $\theta_1 < b_1$、$b_1 \le \theta_1 \le b_2$、$b_2 < \theta_1$，分別作圖。依照現有公式的描述，$\theta = 55°$的成像數都是 6 個，但是在$\theta_1 < b_1$與$b_2 < \theta_1$情況下現有公式不正確，如圖(42)到圖(45)說明。



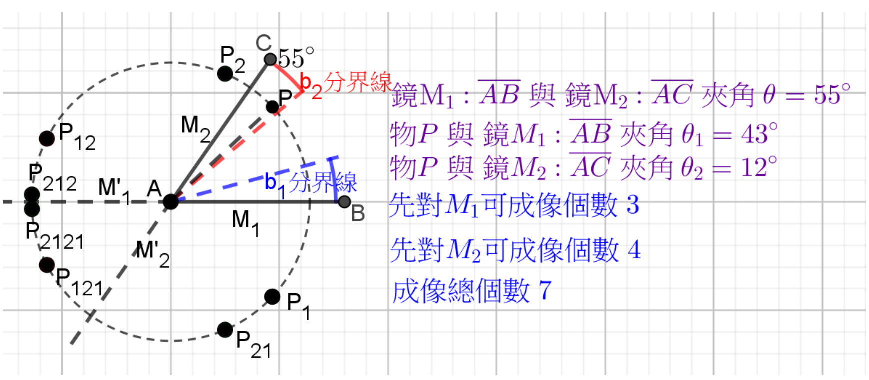
圖(42)



圖(43)



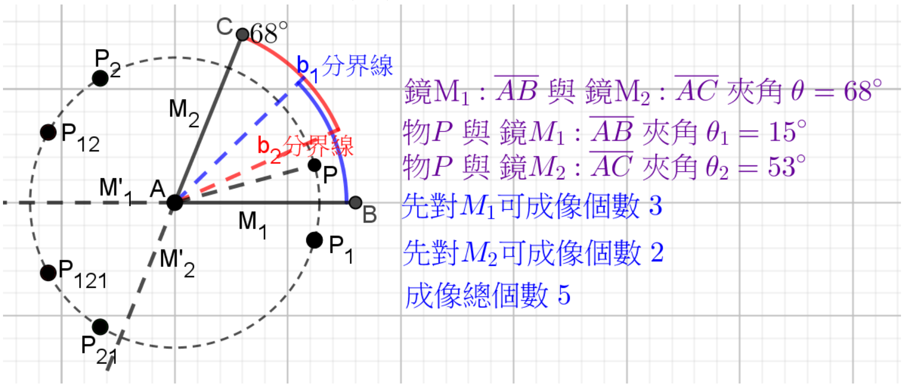
圖(44)



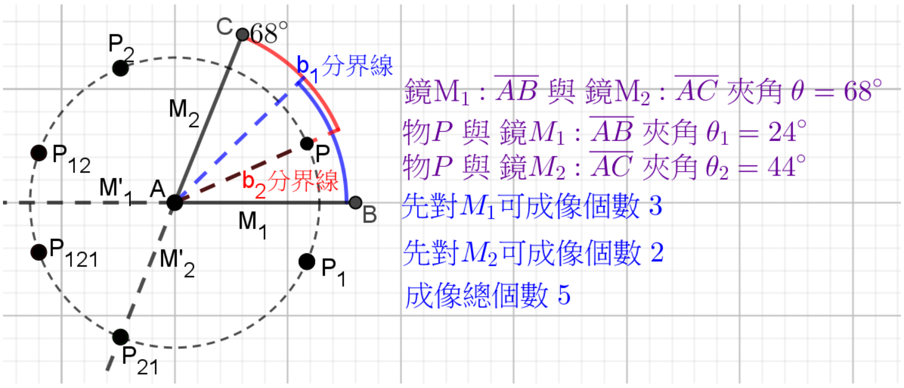
圖(45)

(二) 以 $\theta = 68°$為例，屬於$b_1 > b_2$情形，

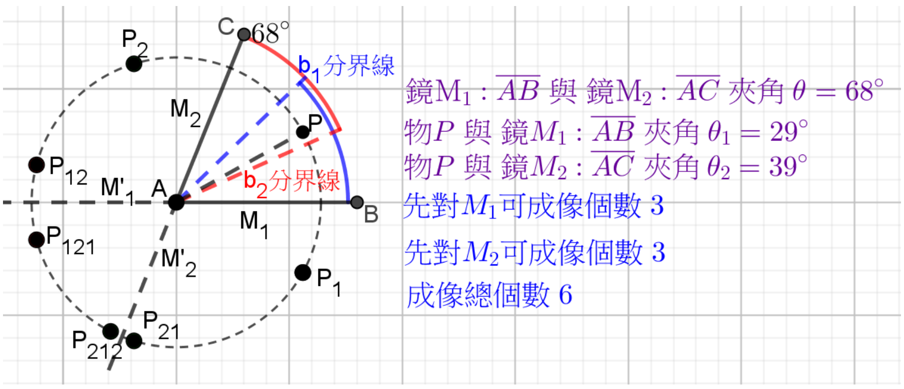
依照現有公式的描述，$\theta = 68°$的成像數，與θ_1無關都是 5 個。
當我們考慮b_1、b_2因素後，結果就不一樣了。
先求 $b_1 = 180° - \left[\frac{180°}{68°}\right] \times 68° = 44°$，$b_2 = 68° - 44° = 24°$，
取 $\theta_1 \leq b_2$、$b_2 < \theta_1 < b_1$、$b_1 \leq \theta_1$，分別作圖。
可觀察出在$b_2 < \theta_1 < b_1$，如圖(48)，現有公式不正確。



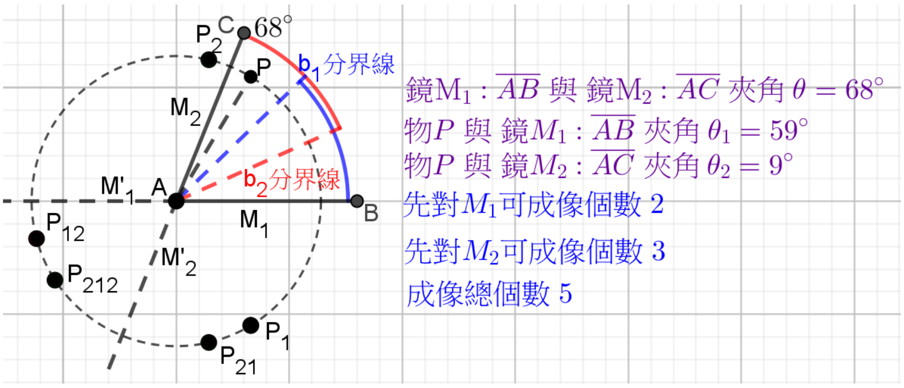
圖(46)



圖(47)



圖(48)



圖(49)

四、研究結果與原來猜想公式比較

在章節 肆、六、(九) 做了成像數猜想，與研究結果比較如下：

$b_1 = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$， $b_2 = \theta - b_1$，如前面定義。

(一) 猜想 1：$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0$，就是$\frac{360°}{\theta}$ = 偶數，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$

研究結果：當 $\frac{180°}{\theta} - \left[\frac{180°}{\theta}\right] = 0$，成像數 $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1$，兩者相同。

因為$\frac{180°}{\theta} - \left[\frac{180°}{\theta}\right] = 0$，表示 $\frac{180°}{\theta}$ 是整數，也就是 $\frac{360°}{\theta}$ 是偶數，

成像數 $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1 = \left[\frac{360°}{\theta}\right] - 1 = \frac{360°}{\theta} - 1$。

(二) 猜想 2.：$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0.5$，就是$\frac{360°}{\theta}$ = 奇數，使用奇數公式，

當物體 P 在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$，

當物體 P 不在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta}$；

研究結果：當 $\frac{180°}{\theta} - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \neq 0$ 且θ滿足$b_1 = b_2$，

當$\theta_1 = b_1$，就是物體 P 在角平分線上，成像數＝$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$，

當$\theta_1 \neq b_1$，就是物體 P 不在角平分線上，成像數＝$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

猜想與研究結果兩者相同。

因為$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0.5$，就是 $b_1 = 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta = \frac{1}{2}\theta = \theta - \frac{1}{2}\theta = b_2$，

又 $\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] = 0.5$，得到 $\frac{360°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] \times 2 = 1$，

所以 $\frac{360°}{\theta} - 1 = [\frac{180°}{\theta}] \times 2$

因此 物體 P 在角平分線上時，成像數= $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 = \frac{360°}{\theta} - 1$，

物體 P 不在角平分線上時，成像數= $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1 = \frac{360°}{\theta}$。

(三) 猜想 3.： $0<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<0.5$，成像數變化是

$[\frac{360^\circ}{\theta}+1]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$，

研究結果：當 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$ 且θ滿足 $b_1<b_2$，

當 $\theta_1<b_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$，

當 $b_1\leq\theta_1\leq b_2$ ，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2$，

當 $b_2<\theta_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$。

因為 $0<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<0.5$，就是 $0^\circ<b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta<\frac{1}{2}\theta$，

$b_2=\theta-b_1>\frac{1}{2}\theta$，得到 $b_1<b_2$。

又 $0<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<0.5$，得到 $0<\frac{360^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2<1$，

所以 $\frac{360^\circ}{\theta}-1<[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2<\frac{360^\circ}{\theta}$，又$[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2$是整數且$\frac{360^\circ}{\theta}-1$與$\frac{360^\circ}{\theta}$之間

只有一個整數，得到 $[\frac{360^\circ}{\theta}]=[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2$。

將這結果帶入研究結果與猜想 3 做比較，

當 $\theta_1<b_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]+1=[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$，

當 $b_1\leq\theta_1\leq b_2$ ，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$，

當 $b_2<\theta_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]+1=[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$。

研究結果與猜想 3.相同。

(四) 猜想 4. ：$0.5<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<1$，成像數變化是$[\frac{360^\circ}{\theta}]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}+1]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}]$，

研究結果：當 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$ 且θ滿足 $b_1>b_2$，

當$\theta_1\leq b_2$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$，

當$b_2<\theta_1<b_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+2$，

當$b_1\leq\theta_1$，成像數= $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$。

因為 $0.5<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<1$，就是 $\frac{1}{2}\theta<b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta<\theta$，

$\theta-\frac{1}{2}\theta>\theta-b_1=b_2$，所以 $b_2<\frac{1}{2}\theta<b_1$， 得到 $b_1>b_2$。

又 $0.5<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<1$，得到 $1<\frac{360^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2<2$

所以 $\frac{360^\circ}{\theta}-2<[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2<\frac{360^\circ}{\theta}-1$，

又 $[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2$ 是整數 且 $\frac{360^\circ}{\theta}-2$ 與 $\frac{360^\circ}{\theta}-1$ 之間只有一個整數，

所以 $[\frac{360^\circ}{\theta}-1]=[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2$ ，就是 $[\frac{180^\circ}{\theta}]\times 2=[\frac{360^\circ}{\theta}]-1$。

將這結果帶入研究結果與猜想 4 做比較，

當$\theta_1\leq b_2$，成像數$=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]-1+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$，

當$b_2<\theta_1<b_1$，成像數$=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+2=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]-1+2=\left[\frac{360^\circ}{\theta}+1\right]$，

當$b_1\leq\theta_1$，成像數$=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]-1+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$。

研究結果與猜想 4.相同。

(五) 除了 4 個猜想都正確也利用性質 1、性質 2、性質 3 與重點 1、重點 2 完成驗證，也完成猜想公式中分界線方向角度的計算式：

$$b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta，\ b_2=\theta-b_1。$$

並修正補足現有公式 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 不是整數時，未考慮的部分。可以完成分界線方向角度的計算式是值得欣慰的一件事。

五、研究結果與前人作品比較：(吳易修[1])

吳易修(102)，兩面平面鏡任意夾角成像數公式推導，第 53 屆全國科展國中物理組。以撰寫程式方式，計算物體 P 與 M_1 夾角θ_1，由0°以等差遞增到θ，計算不同θ_1對應的成像數變化，但是不知道成像點數變化的原因。 我們的研究結果，找到為什麼存成像數變化的分界角b_1、b_2的原因，然後歸納出分界角的求法，最後導出b_1、b_2的計算式。

前人作品都是以$\frac{180^\circ}{\theta}\in N$或$\frac{180^\circ}{\theta}\notin N$當作分類依據，而我們比較傾向以 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=0$ 或 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$當作分類。當物體 P 同時向 M_1、M_2 經過最大整數次鏡射，其成像點旋轉角度剩下 $360^\circ-\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]\times 2\theta$，

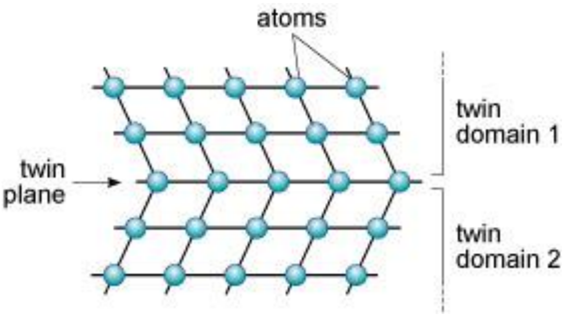
此剩下可用旋轉角就是可繼續增加成像點的依據，因此我們以剩下角度所對應的可再增加成像次數運算式， $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]$ ，當作分類依據顯然比較直覺也容易明白成像數的意義。

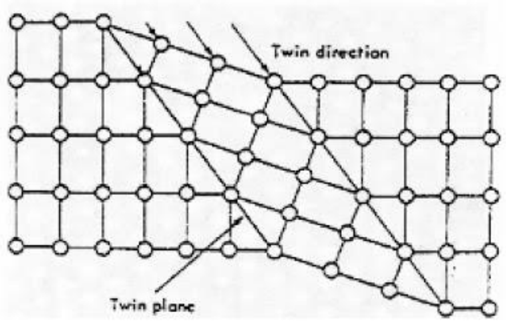
六、未來展望

(一)嘗試做三面鏡的討論，也就是當鏡子所在的三個平面共交一點情況下的反射影像討論，由於情況必須考慮兩兩平面鏡夾角，還要進一步考慮某次對某面鏡成像後與另二個平面鏡的成像。問題的複雜程度超乎我們的想像所以還在構思當中，因此我們將此問題列入明年要克服的目標。

(二)若三個平面鏡問題可以充分掌握之後，我們嘗試做多個平面鏡共交一點情況之下，是否可以做出有規則的排列立體圖形的頂點，例如正多面體頂點、星狀多面體頂點、巴克球的頂點等。

(三)有些晶體結構是面對稱，稱為雙晶，或許可以藉由本作品發展更複雜的多次對稱的晶體結構。





(四)若兩鏡線段與點 P 當作定位線段、定位點，成像點當作取樣點，模仿二維條碼原理，可應用在圖形辨識。若將這些成像點標示黑、白顏色等，表面看起來是一般圖形，卻可當作儲存信息或對訊息的加密方法。

柒、結論

一、 當$\frac{180°}{\theta}-\left[\frac{180°}{\theta}\right]=0$，即$\frac{180°}{\theta}\in N$，也就是$\frac{360°}{\theta}=$偶數，

成像點數 $\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2-1=\frac{360°}{\theta}-1$，

二、. 當 $\frac{180°}{\theta}-\left[\frac{180°}{\theta}\right]\neq 0$，即$\frac{180°}{\theta}\notin N$，$b_1=180°-\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times\theta$， $b_2=\theta-b_1$

若 θ滿足$b_1>b_2$ 就是 $0.5<\frac{180°}{\theta}-\left[\frac{180°}{\theta}\right]<1$	$\theta_1\le b_2$	$b_2<\theta_1<b_1$	$b_1\le\theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=\left[\frac{360°}{\theta}\right]$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+2$ $=\left[\frac{360°}{\theta}+1\right]$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=\left[\frac{360°}{\theta}\right]$
若 θ滿足$b_1=b_2$ 就是$\frac{360°}{\theta}=$奇數	$\theta_1<b_1$ 物體不在角平分線	$b_1=\theta_1=b_2$ 物體在角平分線	$b_2<\theta_1$ 物體不在角平分線
成像數使用公式	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=\frac{360°}{\theta}$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2$ $=\frac{360°}{\theta}-1$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=\frac{360°}{\theta}$
若 θ滿足$b_1<b_2$ 就是 $0<\frac{180°}{\theta}-\left[\frac{180°}{\theta}\right]<0.5$	$\theta_1<b_1$	$b_1\le\theta_1\le b_2$	$b_2<\theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=[\frac{360°}{\theta}+1]$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2$ $=\left[\frac{360°}{\theta}\right]$	$\left[\frac{180°}{\theta}\right]\times 2+1$ $=[\frac{360°}{\theta}+1]$

表(5)

捌、參考資料及其他

1. 吳易修(102)・兩面平面鏡任意夾角成像數公式推導・第 53 屆全國科展國中物理組。

2. QK 醬(2017-11-03)・兩平面鏡夾成一小於 180 度的角這個夾角中看到不止兩個物體的像？每日頭條・取自 https://kknews.cc/science/62njo6m.html （來源：中科院物理所）

3. Crystal defects and twinning・from https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/minerals-and-the-crystalline-state/content-section-5

4. sábado, 24 de julio de (2010)・Tilt and Twist Grain Boundaries・from http://moisespinedacaf.blogspot.com/2010/07/tilt-and-twist-grain-boundaries.html

【評語】030412

此作品取材自生活中的物理，有意思的作品。作者利用動態數學軟體 GeoGebra 的成像作圖，模擬光的反射來驗證與修正已知的兩平面鏡成像數，進而以數學角度去重新推算公式。此外作者利用一個簡單的數學方法推算出所有的成像數以及成像位置。本作品有原創，作者研究精神佳且掌握了研究方法，值得嘉許。對於鏡像原理，對稱性等數學本身的內涵可多作討論，可加深作品的結果。

作品海報

摘要

當兩平面鏡 M_1、M_2，鏡面夾角為 θ(單位:度)，物體與兩鏡交點所形成的線段分別與 M_1、 M_2的角度為θ_1、θ_2 (單位:度)。利用 GeoGebra 推導兩鏡中成像數的公式。可以寫成以下 5 點，其中 [ ]：高斯符號：

1.當 $180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta = 0°$，成像數= $\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 - 1$，

2.當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2$，

3.當 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_1$且$\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

4.當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $0° < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta < \theta_2$，成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 1$，

5.當 $\theta_1 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$ 且 $\theta_2 < 180° - \left[\frac{180°}{\theta}\right] \times \theta$，成像數=$\left[\frac{180°}{\theta}\right] \times 2 + 2$。

我們歸納出這個公式，已修正蒐集到的文獻所描述公式不足之處。

研究動機

在電梯裡， 時常看到自己呈現在鏡子裡，而且如果不只單面的鏡子，成像數往往不只一個。上網搜尋後，發現原來高中物理課程內有提到兩平面鏡的多次成像，但也只提到夾角為90°、60°等可整除 360°的成像數。剛好學到數學 2 下 2-2 垂直、平分與線對稱，回想理化 2 上 4-2 光的反射與面鏡，可以解決這個問題，於是搜尋相關科展作品，那些作品大都是以實驗出發驗證現有兩平面鏡成像數公式。但這些成像公式的意義是什麼？公式是否正確？ 想用很簡單的 GeoGebra 去探討並歸納正確公式。

研究目的

利用動態數學軟體 GeoGebra 驗證現有的成像公式，若檢驗出公式有錯誤，歸納出正確公式。

一、若$m = \frac{360°}{\theta}$為偶數 ⇒ 成像數為 $m-1$

二、若$m = \frac{360°}{\theta}$為奇數⇒ 成像數為 $m-1$ 或 m (物體在角平分線上取 $m-1$，否者 m)

三、若$\frac{360°}{\theta} \notin N$ ⇒ 成像數為$[\frac{360°}{\theta}]$ 或$[\frac{360°}{\theta}]\pm1$，其中 [ ]：高斯符號 。(吳易修[1])

前人研究結果解釋需要做±1修正的原因，以成像點分裂或重疊帶過，讓我們想要探究成像數改變的真正原因。

研究方法

一、文獻回顧：

根據文獻若$\frac{360°}{\theta} \notin N$ ⇒成像數為$[\frac{360°}{\theta}]$ 或$[\frac{360°}{\theta}]\pm1$，其中 [ ]：高斯符號 。(吳易修[1]) 需要做±1修正的原因是因為成像點分裂或重疊。

二、使用符號定義：

如圖(1)平面鏡 M_1擺放在座標平面上方向角0°，即$\overline{AB}$。

平面鏡 M_2擺放在座標平面上方向角θ(單位:度)，即$\overline{AC}$。得兩平面鏡夾角。分別延伸 M_1和 M_2面鏡，做出M_1'和M_2'，作為兩個面鏡的延伸虛鏡面。

物體 P 擺放在座標平面上方向角θ_1(單位:度)，$\angle BAP = \theta_1$。

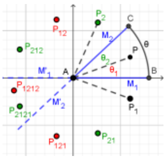
再令$\theta_2 = \angle CAP$ (單位: 度)，即 $\theta = \theta_1 + \theta_2$，

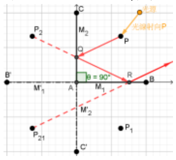
圖形中點 P_1表示物體 P 對 M_1第 1 次鏡射的成像。

點 P_{12}表示點 P_1繼續對 M_2第 2 次鏡射的成像。

同理點 P_{121}表示點 P_{12}對 M_1第 3 次鏡射的成像，….依此類推。

另一邊，物體 P 先對 M_2第 1 次鏡射的成像的是點 P_2，其後續系列的成像為點 P_{21}、點 P_{212}、點 P_{2121}，…….依此類推。


圖(1)


圖(2)

模擬光的反射，如圖(2)，以θ =90°為例

當照射到物體 P 的光線反射到 Q，經由 M_2反射到 R，繼續由 M_1再反射。對觀測者的視覺感受就以為有物體 P_2與 P_{21}，讓觀測者看見。

成像若在面鏡M_1'上方和面鏡M_2'右側，仍可繼續做成像，直到成像落在∠B'AC'之內部。因為已經無光可繼續反射，所以成像到此為止。如圖(2)點 P_2是物體 P 先對M_2第 1 次鏡射的成像，點P_2繼續對延伸虛鏡面M_1'成像得點P_{21}，再來就無法繼續成像。

同理在圖(1)中，P_{2121}與 P_{1212}都無法繼續成像。

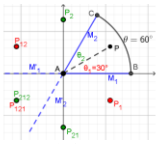
三、兩平面鏡 M_1、M_2各種夾角成像數觀察：

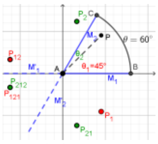
(一)畫出$\frac{360°}{\theta}$為偶數的成像位置與數量：

1. 以$\theta = 60°$、$\theta_1 = 30°$為例，物體 P 在平分線上，經兩平面鏡的第三次成像重疊，故成像數為 3×2-1=5，如圖(3)成像點為點 P_1、點 P_{12}、點 P_2、點 P_{21}、點 P_{212}=P_{121}。

2. 以$\theta = 60°$、$\theta_1 = 45°$為例，物體 P 不在平分線上，經兩平面鏡的第三次成像重疊，故成像數為 3×2 – 1 = 5，如圖(4)成像點為點 P_1、點 P_{12}、點 P_2、點 P_{21}、點 P_{212}=P_{121}。

結果：物體的位置並不會影響成像數。


圖(3)


圖(4)

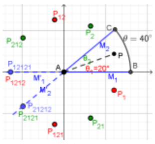
(二) 畫出$\frac{360°}{\theta}$為奇數的成像位置與數量：

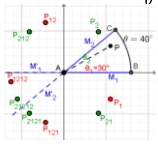
1. θ= 40°，如圖(5) 物體 P 在平分線上，經平面鏡的第五次成像與經平面鏡的第四次成像重疊即 P_{12121}=P_{1212}、P_{21212}=P_{2121}，故成像數為 5+5-2=$\frac{360°}{\theta}$ − 1=8 。

2. θ= 40°，如圖(6)中物體 P 不在平分線上，先經 M_2有五次成像與先經 M_1有四次成像，故成像數為$\frac{360°}{\theta}$ = 9個。

結果：若物體在角平分線上，成像數為$\frac{360°}{\theta}$ − 1個。

若物體不在角平分線上，成像數則為$\frac{360°}{\theta}$個。

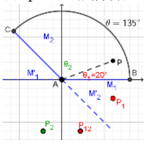

圖(5)

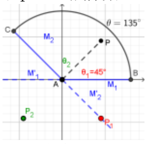

圖(6)

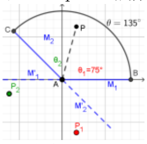
(三) 當$\frac{360°}{\theta} \notin$ N 時，現有成像數公式需要更深入討論與修正。

1.θ = 135°，發現分別以 45°和 90°為分界線成像數有變化。

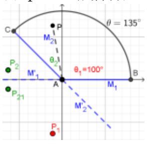
當θ_1 < 45°成像數=3　當θ_1 = 45°成像數=2　當45° < θ_1 < 90°成像數=2

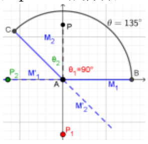

圖(7)


圖(8)


圖(9)

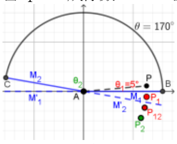
當θ_1 = 90°成像數=2　當 θ_1 > 90°成像數=3

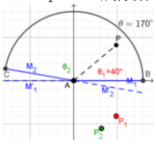

圖(10)

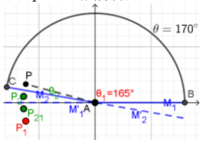

圖(11)

2.θ = 170°，發現分別以 10°和 160°為分界線成像數有變化。

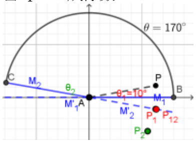
當θ_1< 10°成像數=3　當 10°< θ_1 <169°成像數=2　當θ_1> 160°成像數 = 3

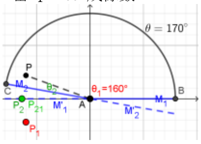

圖(12)


圖(14)


圖(16)

當θ_1= 10°成像數=2　當θ_1= 160°成像數=2


圖(13)

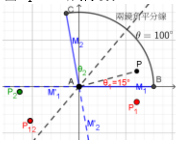

圖(15)

圖(13)與圖(15)各有一個第一次和第二次成像點重合。

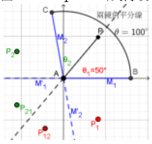
當θ_1由 0°遞增到170°，成像數變化$[\frac{360°}{\theta}+1]$→$[\frac{360°}{\theta}]$→$[\frac{360°}{\theta}+1]$。

3.θ = 100°，發現分別以 20°和 80°為分界線成像數有變化。

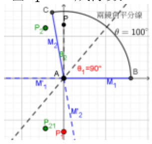
當θ_1< 20°成像數=3　當 20°≤ θ_1 ≤80°成像數=4　當θ_1> 80°成像數=3



圖(17)



圖(18)



圖(19)

當θ_1由 0°遞增到100°，成像數變化$[\frac{360°}{\theta}]$→$[\frac{360°}{\theta}+1]$→$[\frac{360°}{\theta}]$。

4.觀察到，如果成像數變化為$[\frac{360°}{\theta}]$→$[\frac{360°}{\theta}+1]$→$[\frac{360°}{\theta}]$ ，$\frac{180°}{\theta}$的小數部分都大於 0.5。這個發現與前人作品有類似結論 (吳易修[1])。於是做以下猜想：

猜想 1：$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0$，就是$\frac{360°}{\theta}$ = 偶數，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$；

猜想 2：$\frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}]=0.5$，就是$\frac{360°}{\theta}$ = 奇數

當物體 P 在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta} - 1$，

當物體 P 不在角平分線，成像數＝$\frac{360°}{\theta}$ ；

猜想 3.$0 < \frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] < 0.5$，成像數變化是$[\frac{360°}{\theta}+1]$ → $[\frac{360°}{\theta}]$ → $[\frac{360°}{\theta}+1]$；

猜想 4.$0.5 < \frac{180°}{\theta} - [\frac{180°}{\theta}] < 1$，成像數變化是$[\frac{360°}{\theta}]$ → $[\frac{360°}{\theta}+1]$ → $[\frac{360°}{\theta}]$。

分界線角度應該有其他的求法有待解決。

四、數學性質與公式推導

（性質 1）平面鏡過 A(0, 0)方向角為θ，點 P 不在原點上且方向角為θ_1，則 P 對鏡子一次成像點之方向角為 $2\theta-\theta_1$。

〔證明〕令平面鏡 M_2 之方向角為θ，P 對 $\overline{AC}$成像得 P_2。

當$0^\circ<\theta_1<\theta$，如圖(26)，因為$\overline{AC}$平分$\angle PAP_2$，

故 P_2之方向角為 $\theta+\theta-\theta_1=2\theta-\theta_1$。

當$\theta<\theta_1$，如圖(32)，因為$\overline{AC}$平分$\angle PAP_2$，

故 P_2之方向角為 $\theta-(\theta_1-\theta)=2\theta-\theta_1$。　得證 ■

（性質 2）兩個平面鏡夾角為θ交點為 A、一個點 P 分別對兩個鏡子同時成像一次，兩個成像點P_1、P_2，則P_1、P_2對 A 的圓心角為 2θ。

〔證明〕令 A(0, 0)不失一般性，令其中一個平面鏡為 M_1 方向角0°，

另一鏡子為 M_2 方向角為$\theta<360^\circ$，

再令 P 方向角為θ_1、分別對 M_1、M_2之成像為P_1、P_2。

共有以下四種情況，各成像的方向角都標記在圖形中：

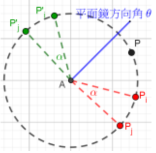
(1) $\theta_1=0^\circ$時，則 P=P_1、P_2方向角為 2θ，得$\angle P_1AP_2=2\theta$，如圖(29)。

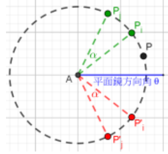
(2) $\theta_1=\theta$時，則 P=P_2、P_1方向角為 2θ，得$\angle P_1AP_2=2\theta$，如圖(30)。

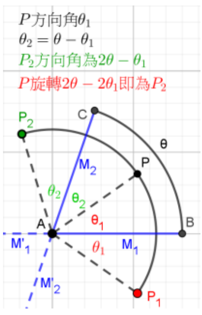
(3) $0^\circ<\theta_1<\theta$，則P_1方向角為$-\theta$、P_2方向角為 $2\theta-\theta_1$，如圖(31)。

(4) $\theta<\theta_1<360^\circ$，則$P_1$方向角為$-\theta$、$P_2$方向角為 $2\theta-\theta_1$，如圖(32)。

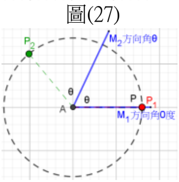
在情況(3)與(4)中$\angle P_1AP_2=2\theta-\theta_1-(-\theta_1)=2\theta$，故得證 ■

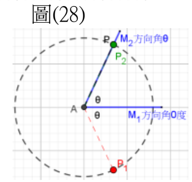

圖(27)

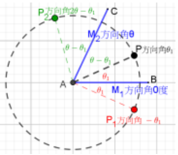

圖(28)

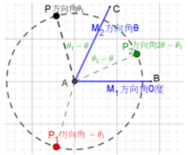


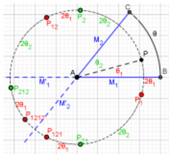
圖(26)


圖(29)


圖(30)


圖(31)


圖(32)


圖(33)

（性質 3）以 A 為圓心$\overline{AP}$為半徑的圓弧上圓心角α的兩點 P_i、P_j同時對過 A 的平面鏡做映射，成像後圓心角度數仍為α，但是方向角大小互換。

〔證明〕如圖(27)、圖(28)，令 P_i、P_j對平面鏡做映射之成像分別為P_i'、P_j'

無論同時對鏡子逆時針方向鏡射圖(27)或對鏡子順時針方向鏡射圖(28)，

鏡子所在直線必為$\angle P_iAP_i'$之角平分線，也是$\angle P_jAP_j'$之角平分線。

因此$\angle P_iAP_j=\angle P_i'AP_j'=\alpha$，故成像後圓心角度數仍為$\alpha$。

再來，令P_i的方向角為i、P_i'的方向角為i'、

P_j的方向角為j、P_j'的方向角為j'。

因為鏡子所在直線方向角θ，為$\angle P_iAP_i'$與$\angle P_jAP_j'$之共同角平分線。

所以 $\frac{i+i'}{2}=\theta=\frac{j+j'}{2}$，得到 $i+i'=j+j'$，

可推出 若 $i>j$，則 $i'<j'$；反之，若 $i<j$，則 $i'>j'$。 故得證 ■

五、成像數計算方法

如圖(33)，P 以逆時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_2，P 與 P_2同做 M_1鏡射得 P_1與 P_{21} 因為旋轉角度不變但是方向角大小互換，所以 P_1以順時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_{21}，同理可以得到 P_{12} 以逆時針方向旋轉$2\theta_2$到達 P_{212}。

由三個性質與圖(33)還可以得到：

P 同時對 M_1與 M_2做一 次成像使用圓弧角度$2\theta_1+2\theta_2=2\theta$，

每使用一次2θ得到 2 個成像點。P 同時對 M_1與 M_2做$\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]$ 次成像，得 $\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]\times2=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times2$個成像點，剩餘角為 $360^\circ-\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]\times2\theta$只要剩餘的圓弧角度大於$2\theta_1$或 $2\theta_2$就足夠再做成像。

即$2\theta_1<360^\circ-\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]\times2\theta$ 或 $2\theta_2<360^\circ-\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]\times2\theta$足夠再做成像，

化簡成$\theta_1<180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta$或$\theta_2<180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta$足夠再做成像。

因為沒有剩餘的圓弧角度時，表示最後一次成像由順時針而來的成像恰與逆時針而來的成像重合，所以成像數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times2-1$。所以成像數可以整理成摘要所述之五點計算成像數公式。

六、成像數不增、增 1、增 2 的分界線方向角度

成像數增 1 或增 2 在於θ_1 或θ_2足夠小有關係。因為物體 P 的方向角θ_1，$\theta_2=\theta-\theta_1$，因此可以定義臨界角度t，

(1)$\theta_1<t$可以增 1 個成像點，(2)$\theta_2<t$可以增 1 個成像點，

(3)$\theta_1<t$且$\theta_2<t$可以增 2 個成像點。

在成像點公式討論中知道，$t=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta$。

物體 P 成像點數不增、增 1、增 2 分界線方向角就可表示成，$b_1=t$，$b_2=\theta-t$。所以 $\theta_1<t$ 就是 $\theta_1<b_1$、$\theta_2<t$ 就是 $\theta_1>b_2$。

七、分界線方向角b_1、b_2 比較大小的求法與實例

因為b_1 的臨界角就是 $180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta$ ，又$b_2=\theta-b_1$。

$b_1\geq b_2$ 就是 $180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta\geq\theta-(180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta)$

化簡得到 $\theta\leq\frac{360^\circ}{1+2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]}$ ……………………………………………(1)

算式(1)就是滿足$b_1\geq b_2$的θ範圍，再與$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]$ 對應的θ範圍取出共同角度。

舉二個例子說明：(只討論正整數角度)

〔例 1〕取$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=3$，得到 $46^\circ\leq\theta\leq60^\circ$，………………………………(2)

將 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=3$帶入算式(1)，$\theta\leq\frac{360^\circ}{1+2\times3}=\frac{360^\circ}{7}=51\frac{3^\circ}{7}$，…………(3)

取出(2)、(3)共同角度，就是 $46^\circ\leq\theta\leq51^\circ$滿足$b_1>b_2$。■

〔例 2〕取$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=4$，得到 $37^\circ\leq\theta\leq45^\circ$，………………………………(4)

將 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=4$帶入算式(1)，$\theta\leq\frac{360^\circ}{1+2\times4}=\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$，…………(5)

取出(4)、(5)共同角度，就是 $37^\circ\leq\theta\leq40^\circ$滿足$b_1\geq b_2$，

又由 (5)可知 $\theta=40^\circ$ 滿足 $b_1=b_2$。■

如果θ 在實數中討論。當 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=k$時，

先求出 $\frac{180^\circ}{k+1}$ 、$\frac{360^\circ}{1+2k}$ 、$\frac{180^\circ}{k}$ 三個數值，代入表(2)，就可求出θ範圍。

	取角範圍	b1=b2 取角範圍	b1>=b2 取角範圍	b1>b2 取角範圍	b1<b2 取角範圍
$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]$	(下限, 上限]	$\theta=\frac{360^\circ}{1+2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]}$	$\theta\leq\frac{360^\circ}{1+2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]}$	$\theta<\frac{360^\circ}{1+2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]}$	$\theta>\frac{360^\circ}{1+2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]}$
k	$(\frac{180^\circ}{k+1},\frac{180^\circ}{k}]$	$\frac{360^\circ}{1+2k}$	$(\frac{180^\circ}{k+1},\frac{360^\circ}{1+2k}]$	$(\frac{180^\circ}{k+1},\frac{360^\circ}{1+2k})$	$(\frac{360^\circ}{1+2k},\frac{180^\circ}{k}]$

表(2)

〔例 3〕取$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=7$，查表(3)，得$\frac{180^\circ}{7+1}=22\frac{1^\circ}{2}$ 、$\frac{180^\circ}{7}=25\frac{5^\circ}{7}$ 、$\frac{360^\circ}{1+2\times7}=24^\circ$ ，

代入表(2) 得 $22\frac{1^\circ}{2}<\theta\leq25\frac{5^\circ}{7}$ 時 (i) $\theta=\frac{360^\circ}{1+2\times7}=24^\circ$時，$b_1=b_2$；

(ii) $22\frac{1^\circ}{2}<\theta\leq24^\circ$時，$b_1\geq b_2$； (iii) $24^\circ<\theta\leq25\frac{5^\circ}{7}$時，$b_1<b_2$。■

〔例 4〕用手算，當$\theta=23.5^\circ$時，求出b_1、b_2與例 3 的結果比較是否相符？

當物體 P 方向角θ_1分別為5°、10°、20°，成像數？

$\left[\frac{180^\circ}{23.5^\circ}\right]=7$， $b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{23.5^\circ}\right]\times23.5^\circ=180^\circ-164.5^\circ=15.5^\circ$，

$b_2=23.5^\circ-15.5^\circ=8^\circ$，結果$b_1\geq b_2$與例 3 查表結果相同。

$\theta_1=5^\circ$時，$\theta_1<b_2<b_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times2+1=15$；

$\theta_1=10^\circ$時，$b_2<\theta_1<b_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times2+2=16$；

$\theta_1=20^\circ$時，$b_2<b_1<\theta_1$，成像點數$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times2+1=15$。■

表(3)是討論實數角度θ時，列舉一部分 $\frac{180^\circ}{k+1}$、$\frac{360^\circ}{1+2k}$、$\frac{180^\circ}{k}$的數值表。

$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]$	$\frac{180}{1+k}$	$\frac{360}{1+2k}$	$\frac{180}{k}$	$\frac{180}{1+k}$ 帶分數			$\frac{360}{1+2k}$ 帶分數			$\frac{180}{k}$ 帶分數		
k	小數 6 位	小數 6 位	小數 6 位	整數	分子	分母	整數	分子	分母	整數	分子	分母
2	60.000000	72.000000	90.000000	60	0	3	72	0	5	90	0	2
3	45.000000	51.428571	60.000000	45	0	4	51	3	7	60	0	3
4	36.000000	40.000000	45.000000	36	0	5	40	0	9	45	0	4
5	30.000000	32.727273	36.000000	30	0	6	32	8	11	36	0	5
6	25.714286	27.692308	30.000000	25	5	7	27	9	13	30	0	6
7	22.500000	24.000000	25.714286	22	4	8	24	0	15	25	5	7
180	0.994475	0.997230	1.000000	0	180	181	0	360	361	1	0	180

表(3)

研究結果

成像數整理列表，如表(5)

一、 當$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=0$，就是$\frac{360^\circ}{\theta}=$偶數， 成像點數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2-1=\frac{360^\circ}{\theta}-1$，

二、. 當 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$，即$\frac{180^\circ}{\theta}\notin N$，$b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times\theta$， $b_2=\theta-b_1$

若 θ滿足$b_1>b_2$ 就是 $0.5<\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]<1$	$\theta_1\leq b_2$	$b_2<\theta_1<b_1$	$b_1\leq\theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+2=\left[\frac{360^\circ}{\theta}+1\right]$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$
若 θ滿足$b_1=b_2$ 就是$\frac{360^\circ}{\theta}=$奇數	$\theta_1<b_1$ 物體不在角平分線	$b_1=\theta_1=b_2$ 物體在角平分線	$b_2<\theta_1$ 物體不在角平分線
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\frac{360^\circ}{\theta}$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2=\frac{360^\circ}{\theta}-1$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=\frac{360^\circ}{\theta}$
若 θ滿足$b_1<b_2$ 就是 $0<\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]<0.5$	$\theta_1<b_1$	$b_1\leq\theta_1\leq b_2$	$b_2<\theta_1$
成像數使用公式	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2=\left[\frac{360^\circ}{\theta}\right]$	$\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1=[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$

表(5)

討論

一、$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=0$，即 $\frac{180^\circ}{\theta}=$偶數或奇數 情形，成像數 $\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2-1$=11，成像數與$\theta_1$無關。這個結果與現有公式，〔若 m $=\frac{360^\circ}{\theta}$為偶數 ⇒ 成像數為 $m-1$〕，結果相同，也跟我們的猜想一致。

二、$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$ ，先找$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]=\frac{1}{2}$，

相當於現有公式〔若m $=\frac{360^\circ}{\theta}$為奇數〕的情形。

(一)現有公式陳述為：若m $=\frac{360^\circ}{\theta}$為奇數

1. 若物體在兩平面鏡的角平分線上 ⇒ 成像數為 $m-1$
2. 若物體不在兩平面鏡的角平分線上 ⇒ 成像數為 m

以$\theta=72^\circ$為例，現有公式求出成像數=5 或 4。

(二)利用我們的研究結果

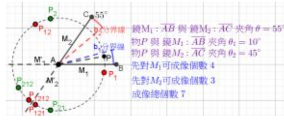
以$\theta=72^\circ$為例， $b_1=180^\circ-\left[\frac{180^\circ}{72^\circ}\right]\times 72^\circ=36^\circ$，
$b_2=36^\circ$， 由表(4)中 $b_1=b_2$ 情況使用的公式，
$b_1=\theta_1=b_2=36^\circ$，成像數 $=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2$，
$\theta_1<b_1=36^\circ$或$\theta_1>b_2=36^\circ$，成像數 $=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$。

三、$\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq 0$ 且 $\frac{180^\circ}{\theta}-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\neq\frac{1}{2}$ 時，
相當於現有公式〔m $=\frac{360^\circ}{\theta}\notin$ N〕的情形。
現有公式陳述：若 m $=\frac{360^\circ}{\theta}\notin$ N ⇒成像數為m $=[\frac{360^\circ}{\theta}]$。
忽視了分界線的重要性只考慮特殊情況，沒有考慮全面的情形。前人研究結果解釋需要做±1修正的原因，以成像點分裂或重疊帶過(吳易修[1]) 。我們找出真正的原因：

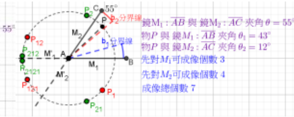
(一) 以$\theta=55^\circ$為例，屬於$b_1<b_2$情形， $b_1=15^\circ$，$b_2=40^\circ$，取 $\theta_1<b_1$、$b_1\leq\theta_1\leq b_2$、$b_2<\theta_1$，分別作圖。依照現有公式的描述，$\theta=55^\circ$的成像數都是 6 個，但是在$\theta_1<b_1$與$b_2<\theta_1$情況下現有公式不正確，如圖(42) 、圖(45)說明。

(二) 以 $\theta=68^\circ$為例，屬於$b_1>b_2$情形，依照現有公式的描述，$\theta=68^\circ$的成像數，與θ_1無關都是 5 個。當我們考慮b_1、b_2因素後，結果就不一樣了。

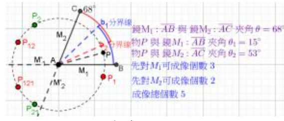
$b_1=44^\circ$，$b_2=24^\circ$，在$b_2<\theta_1<b_1$，如圖(48)，現有公式不正確。



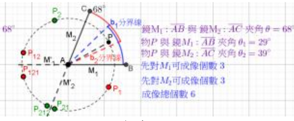
圖(42)



圖(45)



圖(46)



圖(48)

四、研究結果表(5)與原來猜想公式比較完全相同

(一) 猜想 1：$\frac{180^\circ}{\theta}$ $-[\frac{180^\circ}{\theta}]$=0，即$\frac{360^\circ}{\theta}=$偶數，成像數$=\frac{360^\circ}{\theta}-1$

(二) 猜想 2.： $\frac{180^\circ}{\theta}$ $-[\frac{180^\circ}{\theta}]$=0.5，即$\frac{360^\circ}{\theta}=$奇數，用奇數公式，

當$\theta_1=b_1$，物體 P 在角平分線上，成像數$=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2$，

當$\theta_1\neq b_1$，物體 P 不在角平分線上，成像數$=\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\times 2+1$。

(三) 猜想 3.：$0<\frac{180^\circ}{\theta}-[\frac{180^\circ}{\theta}]<0.5$，成像數$[\frac{360^\circ}{\theta}+1]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}+1]$ 。

(四) 猜想 4.：$0.5<\frac{180^\circ}{\theta}$ $-[\frac{180^\circ}{\theta}]<1$，成像數$[\frac{360^\circ}{\theta}]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}+1]\rightarrow[\frac{360^\circ}{\theta}]$ 。

五、研究結果與前人作品比較：(吳易修[1])

吳易修(102)，兩面平面鏡任意夾角成像數公式推導，第 53 屆全國科展國中物理組。以撰寫程式方式，計算物體 P 與 M_1 夾角θ_1，由0°以等差遞增到θ，計算不同θ_1對應的成像數變化，但是不知道成像點數變化的原因。 我們的研究結果，找到為什麼存成像數變化的分界角b_1、b_2的原因，然後歸納出分界角的求法，最後導出b_1、b_2的計算式。

結論

如表(5)

未來展望

一、嘗試做三面鏡的討論，若三個平面鏡問題可以充分掌握之後，想做多個平面鏡共交一點情況之下，找有規則排列立體圖形的頂點，例如正多面體頂點、星狀多面體頂點、巴克球的頂點等。

二、有些晶體結構是面對稱，稱為雙晶，或許可以藉由本作品發展更複雜的多次對稱的晶體結構。

三、若兩鏡線段與點 P 當作定位線段、定位點，成像點當作取樣點，模仿二維條碼原理，可應用在圖形辨識。若將這些成像點標示黑、白顏色等，可當作儲存信息或對訊息的加密方法。

參考資料

1. 吳易修(102)，兩面平面鏡任意夾角成像數公式推導，第 53 屆全國科展國中物理組。

2. QK 醬(2017-11-03)，兩平面鏡夾成一小於 180 度的角這個夾角中看到不止兩個物體的像？每日頭條，取自 https://kknews.cc/science/62njo6m.html（來源：中科院物理所）

3. Crystal defects and twinning，from https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/minerals-and-the-crystalline-state/content-section-5

4. sábado, 24 de julio de (2010)，Tilt and Twist Grain Boundaries，from http://moisespinedacaf.blogspot.com/2010/07/tilt-and-twist-grain-boundaries.html