中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

球解懸鍊線-以 nanodots 模擬數學曲線

學校名稱：臺中市立惠文高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 陳廷允	陳韋帆 尤正成

關鍵詞：懸鍊線、catenary、nanodots

摘要

研究科學玩具「nanodots」與數學曲線「懸鍊線」(Catenary)的關係，並更進一步思考 nanodots 的多寡與最終形成曲線的逼近程度是否有正向的關聯。

壹、研究動機

某天我在玩 nanodots 的時候，發現其形成的形狀與三年級數學課本所教「二次函數-拋物線」有點類似，但是也跟我之前在書上讀到的數學曲線「懸鍊線」有點類似，所以想探討其中的關係，因此做了這個題目。

貳、研究目的

探討 nanodots 以及數學曲線「懸鍊線」(Catenary)的關聯。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦程式 GeoGebra Classic 6

肆、研究過程或方法

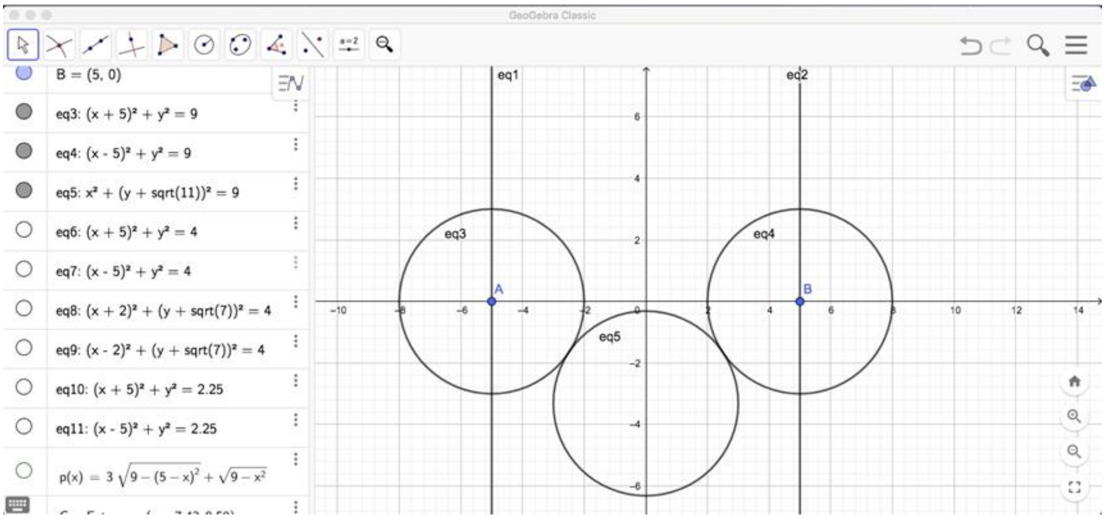
懸鍊線是懸在水平兩點間的因均勻引力作用下的軟繩的形狀，其上每一點的能量（位置）的總和相較於其他狀態是最低的（這裡的能量是位能：一個用來描述物體在保守力場中作功能力大小的物理量，會隨著高度增加而增加。這時如果位能不是最低的，則它會轉換成能量更低的型態，當然就不會保持穩定。）

假設我用的圓都是同樣大小，且兩端距離不變，這條懸鍊線很顯然地就會越拉越長，越垂越低。所以我在增加 nanodots（因為以二維視角模擬，nanodots 在以下文章稱為圓）的時候，以等比例增加兩端的距離，以維持固定的形狀（兩端距離要與「線長」成固定比例，形狀才會相似）。但圖片的面積也會越來越大，難以拍攝，因此我決定以縮小圓的大小做為我

的研究策略，既可使圖片較容易拍攝，也突顯我的研究宗旨：比較不同數量的圓構成的懸鍊線的逼近程度。

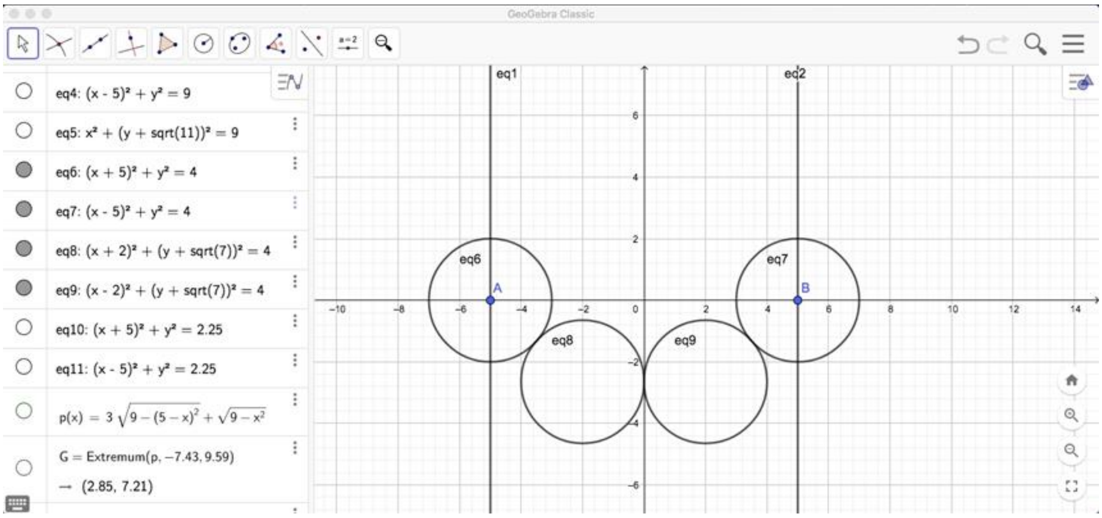
先用 geogebra 開出頁面，將兩端的距離及「線長」（就是相鄰圓的圓心距離的總和）定出來（兩端距離小於線長，這裡是 10 單位及 12 單位）（所以我在模擬 n 個圓的時候，每一個圓的半徑為$\frac{12}{2(n-1)}$），然後再開始用圓來模擬 nanodots 互相吸引的樣子。（此時暫不考慮 nanodots 的重量）

一、三個圓



三個圓很好模擬，只要將兩邊的圓擺好位置，再讓中間的圓與它們相切就可以了。

二、四個圓

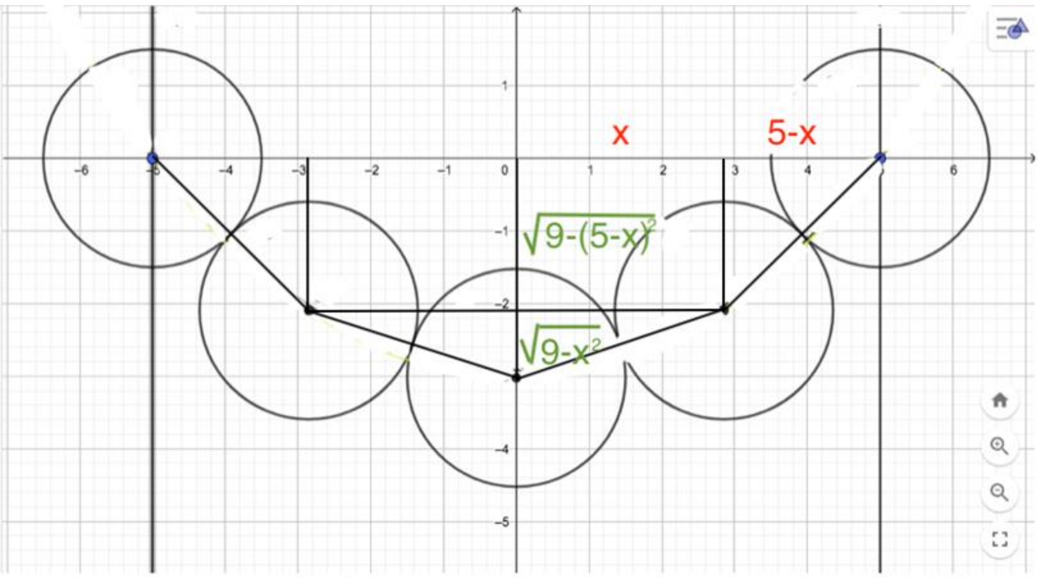


四個圓的情況和三個一樣簡單，只不過要記得下面兩個圓要同高度。

三、五個圓

因為無法直接確定底下三個圓的位置，所以五個圓的難度明顯地提高許多。不過如果整個系統要維持穩定，這五個圓的總能量要維持最低（也就是總位能要最低。因為懸鍊線下垂的相對位置，與重力位能有關，可以讓整條繩子的重力位能最小，所以五個圓的圓心在 x 軸下，且離 x 軸越遠越好）。我們的「線長」是 12，分成 4 段線段，每一段長 3 單位。假設第二低的圓的圓心距離 y 軸 x 單位，那它就比最低的圓還要高$\sqrt{3^2-x^2}$單位，然後最高的圓會比它高$\sqrt{9-(5-x)^2}$單位（五個圓的圓心的座標分別為(-5,0),(-x,-$\sqrt{9-(5-x)^2}$),

(0,-$\sqrt{3^2-x^2}$-$\sqrt{9-(5-x)^2}$),(x,-$\sqrt{9-(5-x)^2}$),(5,0)）。



為了使「總能量」最低，$3\sqrt{9-(5-x)^2}+\sqrt{3^2-x^2}$（以下稱為位能函式）要求最大值：

f(x)=$3\sqrt{-x^2+10x-16}+\sqrt{-x^2+9}$

f'(x)=$\frac{3}{2}(-x^2+10x-16)^{\frac{-1}{2}}$(-2x+10)+$\frac{1}{2}(-x^2+9)^{\frac{-1}{2}}$(-2x)

$\frac{3(-2x+10)}{\sqrt{-x^2+10x-16}}=\frac{2x}{\sqrt{-x^2+9}}$（利用 f'(x)=0 找出 critical points 來找到極值）

$\frac{9(4x^2-40x+100)}{-x^2+10x-16}=\frac{4x^2}{-x^2+9}$

$(36x^2-360x+900)(-x^2+9)=4x^2(-x^2+10x-16)$

$-8x^4+80x^3-125x^2-810x+2025=0$

這條式子展開會變成一條四次方程式(這裡我們透過 WolframAlpha 網站進行數值分析解)。

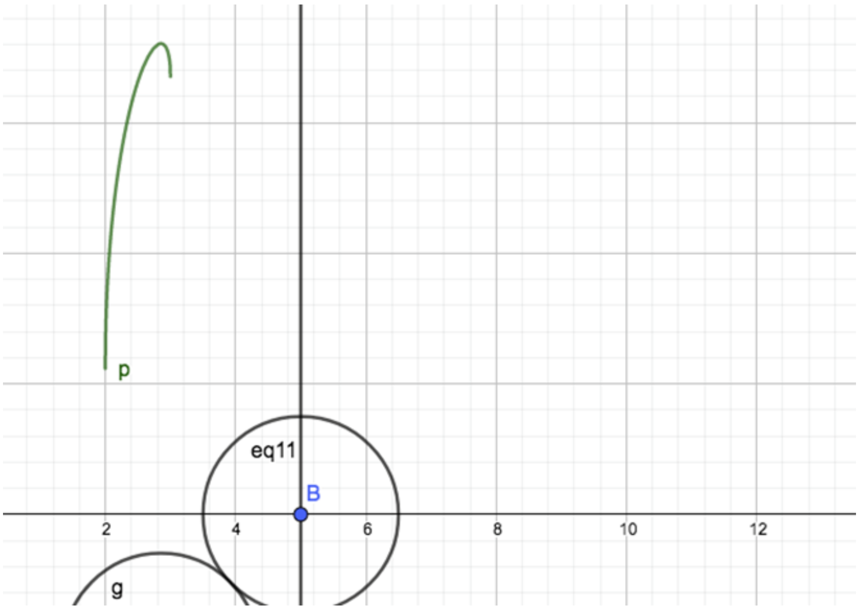
$$x=\frac{5}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\frac{6}{344+(9970352-6480\sqrt{2262657})^{\frac{1}{3}}+2(2(623147+405\sqrt{2262657}))^{\frac{1}{3}}}}}+$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{86}{3}-\frac{1}{24}(9970352-6480\sqrt{2262657})^{\frac{1}{3}}-\frac{(623147+405\sqrt{2262657})^{\frac{1}{3}}}{6*2^{\frac{2}{3}}}+225\sqrt{\frac{6}{344+(9970352-6480\sqrt{2262657})^{\frac{1}{3}}+2(2(623147+405\sqrt{2262657}))^{\frac{1}{3}}}}}$$

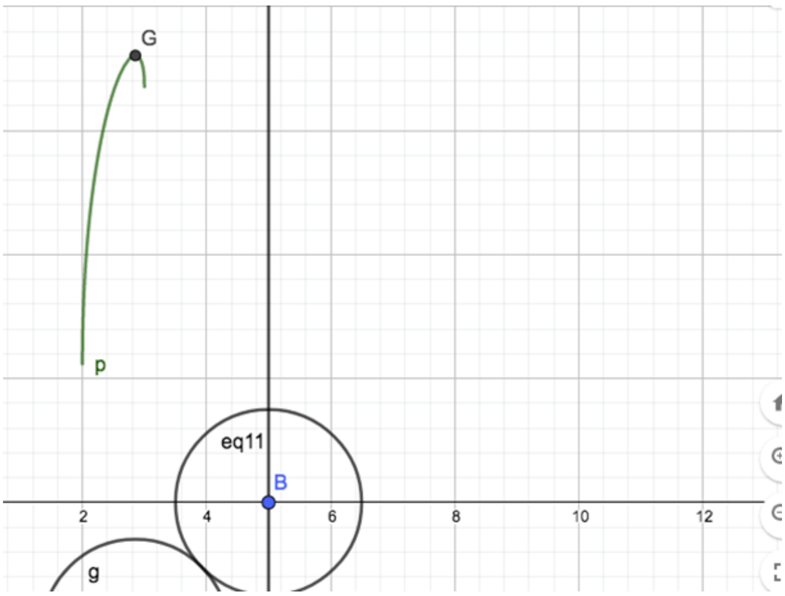
$\fallingdotseq 2.85287$

（其實原方程式應有四個解，但其它三解有兩根為複數（由實數和虛數部分組成，形如$a+bi$的數，此處$i=\sqrt{-1}$），一實根小於零，不符題意。）

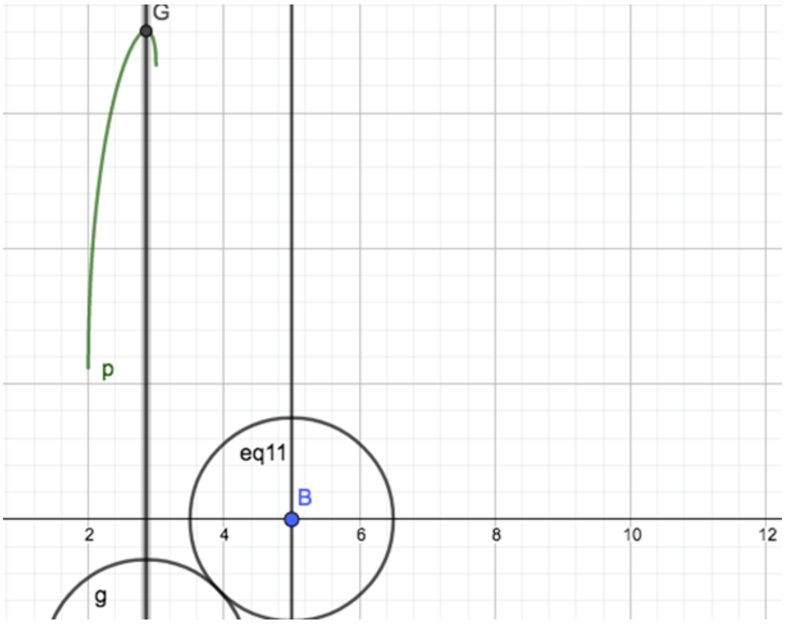
(一)畫出位能函式



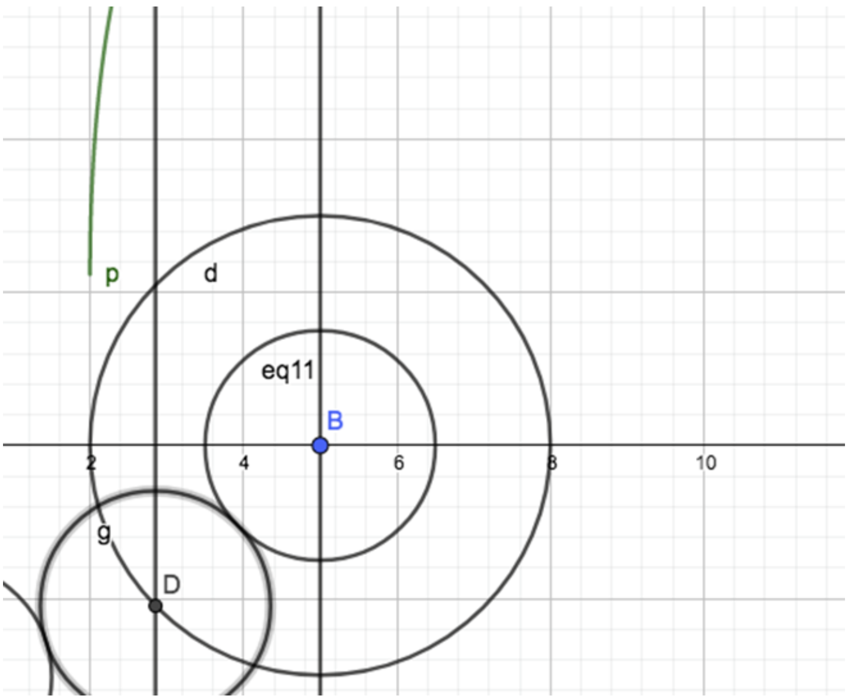
(二)找出方程式的最高點



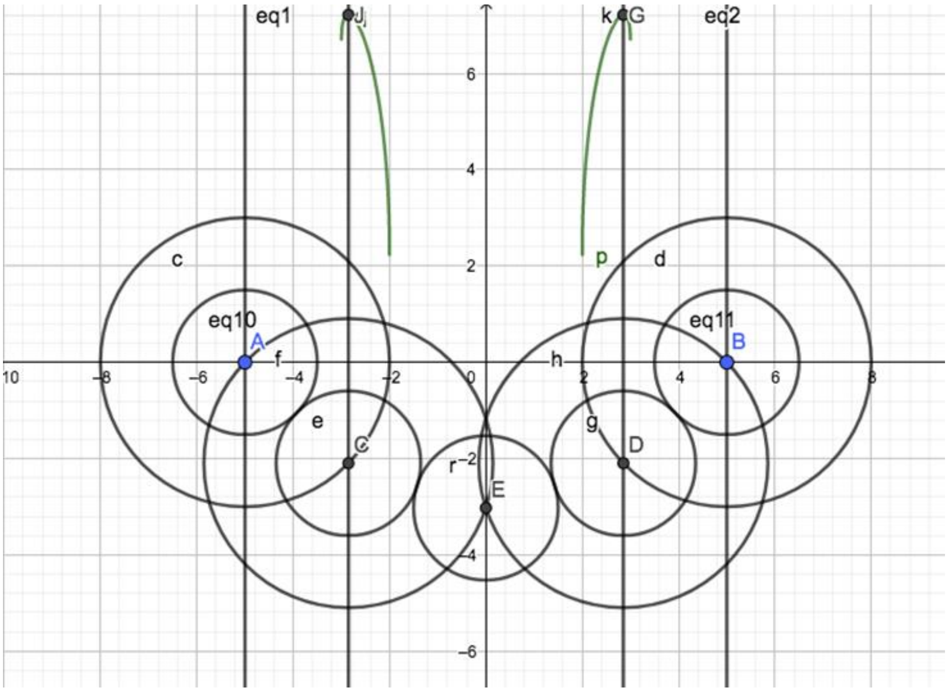
(三)畫出垂線



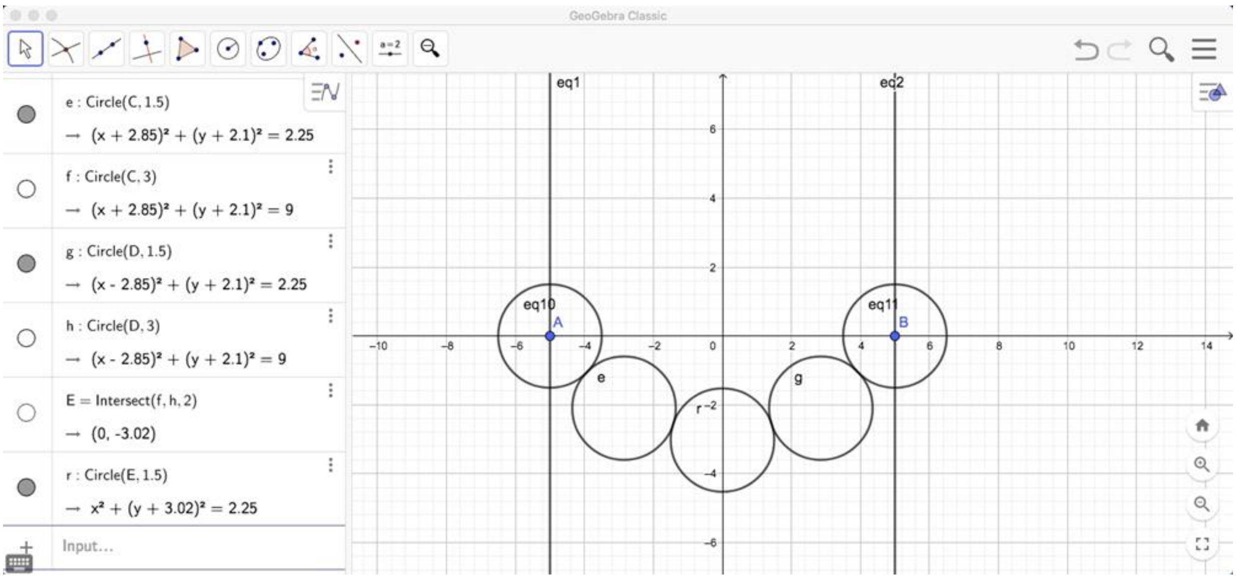
(四)以垂線與兩倍半徑的圓，找出新的圓心



(五)如此做下去，直到所有的圓都已被畫出為止。



如同前面所說，此時 x≒2.85，如圖所示：



四、六個圓

沿用五個圓的「函式法」，六個圓也可求出唯一的最大值，只是函式會變成

$4\sqrt{2.4^2-(3.8-x)^2}+2\sqrt{2.4^2-x^2}$（根號裡的數字會隨著圓的數量、半徑與位置而變）。

$f(x)=4\sqrt{2.4^2-(3.8-x)^2}+2\sqrt{2.4^2-x^2}$

$f'(x)=2(-x^2+7.6x-8.68)^{\frac{-1}{2}}(-2x+7.6)+(-x^2+5.76)^{\frac{-1}{2}}(-2x)$

$\frac{2(-2x+7.6)}{\sqrt{-x^2+7.6x-8.68}}=\frac{2x}{\sqrt{-x^2+5.76}}$

$\frac{4(4x^2-30.4x+57.76)}{-x^2+7.6x-8.68}=\frac{4x^2}{-x^2+5.76}$

$(16x^2-121.6x+231.04)(-x^2+5.76)=4x^2(-x^2+7.6x-8.68)$

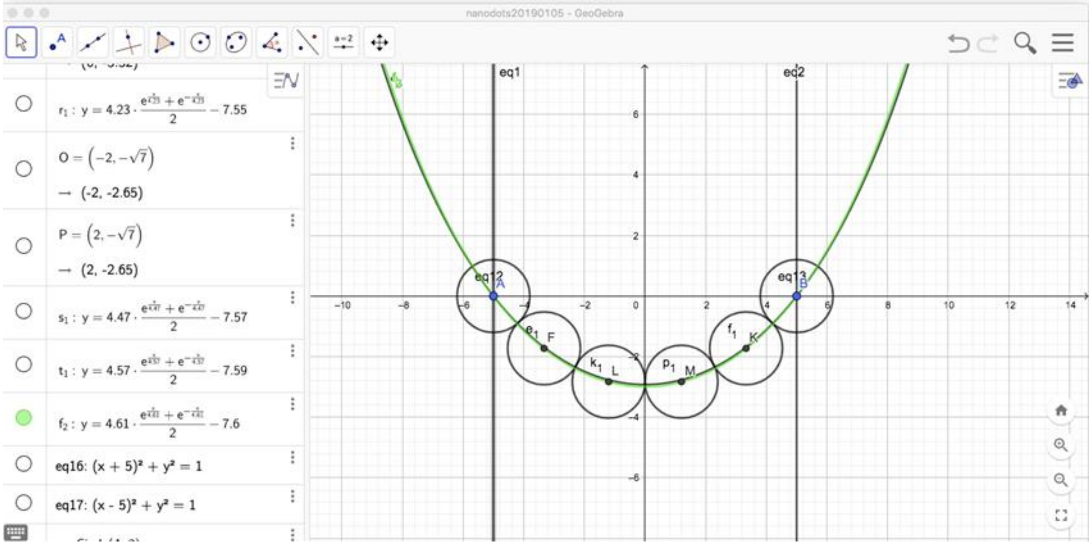
$625x^4-4750x^3+5425x^2+36480x-69312=0$(一樣透過 WolframAlpha 網站進行數值分析解)

$$x=\frac{19}{10}-\frac{1}{50\sqrt{\frac{3}{16225+(2966797140625-171000000\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}}+25(189875017+10944\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}}}}}+$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1298}{75}-\frac{1}{1875}(2966797140625-171000000\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{75}(189875017+10944\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}}+1824\sqrt{\frac{3}{(16225+(2966797140625-171000000\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}}+25(189875017+10944\sqrt{300139995})^{\frac{1}{3}})}}\right)}$$

$\fallingdotseq 2.1318$

做好的圖形如圖所示：



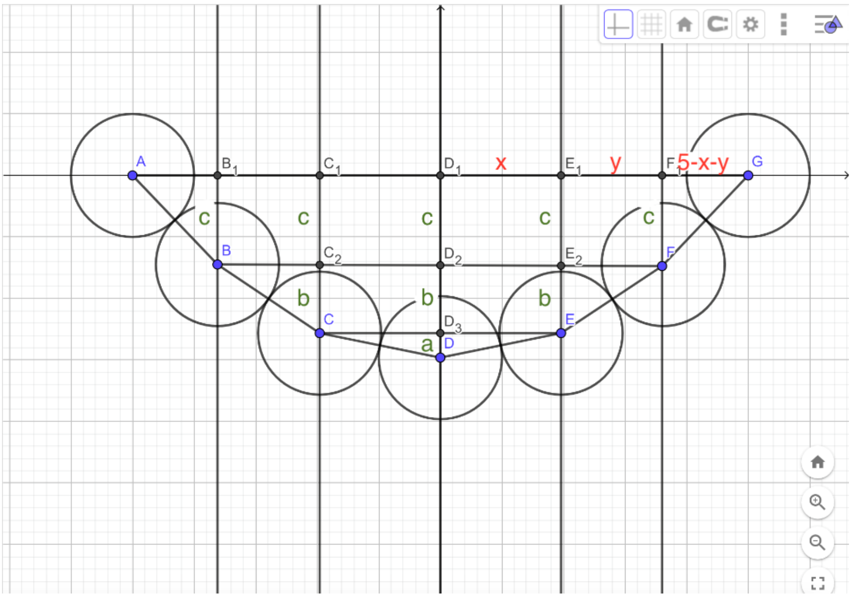
五、七個圓

七個圓的時候會遇到一種新的情況：底下不但有五個圓，還有一個前所未有的問題：會需要求出兩個變數的函式的最大值。

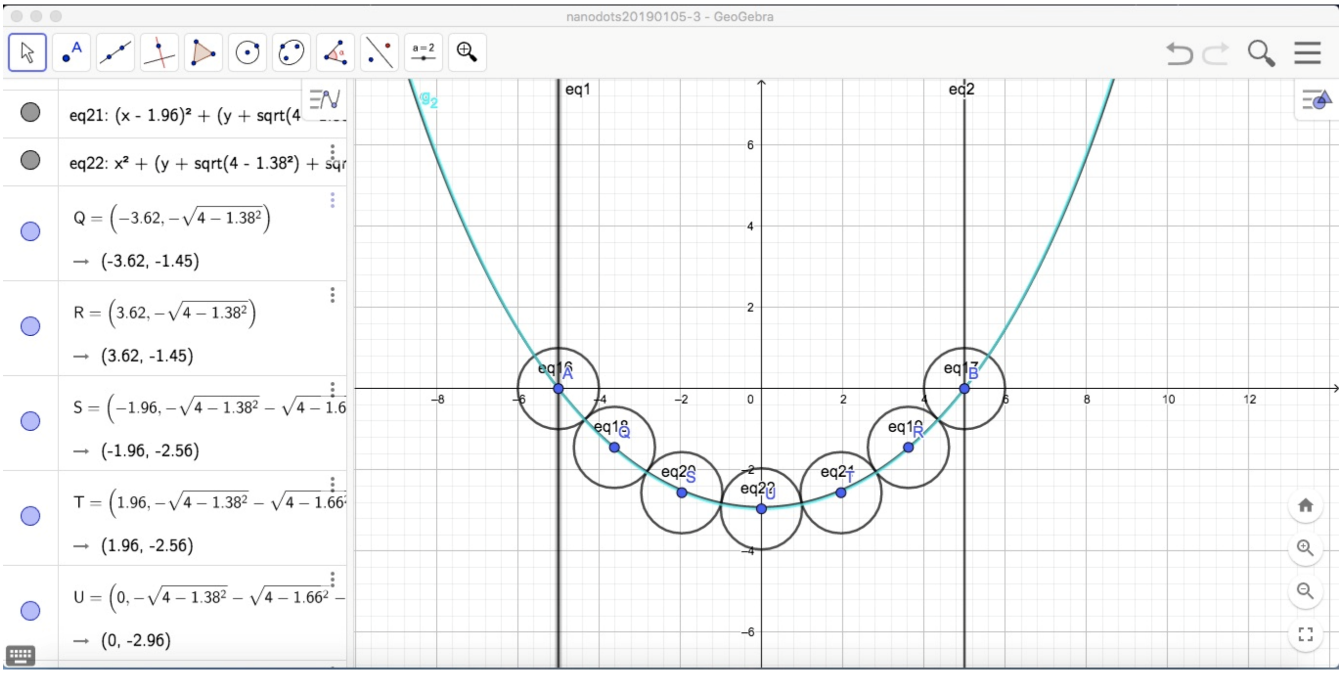
沿用五個圓的「位能函式」，七個圓的函式為$\sqrt{4-x^2}$+3$\sqrt{4-y^2}$+5$\sqrt{4-(5-x-y)^2}$。

其中 a 等於$\sqrt{4-x^2}$，b 等於$\sqrt{4-y^2}$，c 等於$\sqrt{4-(5-x-y)^2}$。

這個函式無法完全以二維座標表示，所以我先固定 y（此處為 A），求出此條件下的最大值，再移動 A，比較各情況下的最高點，找出真正的最大值。此時 x=1.95,y=1.69。將它們代入就可以求出 a,b,c 的值，也就求出了位能函數最低時的底下五個圓的圓心（這個方法其實不是非常精確的解析解，而只是一個近似的解）



經過計算，我解出了近似正確的最大解。如圖所示：



伍、研究結果

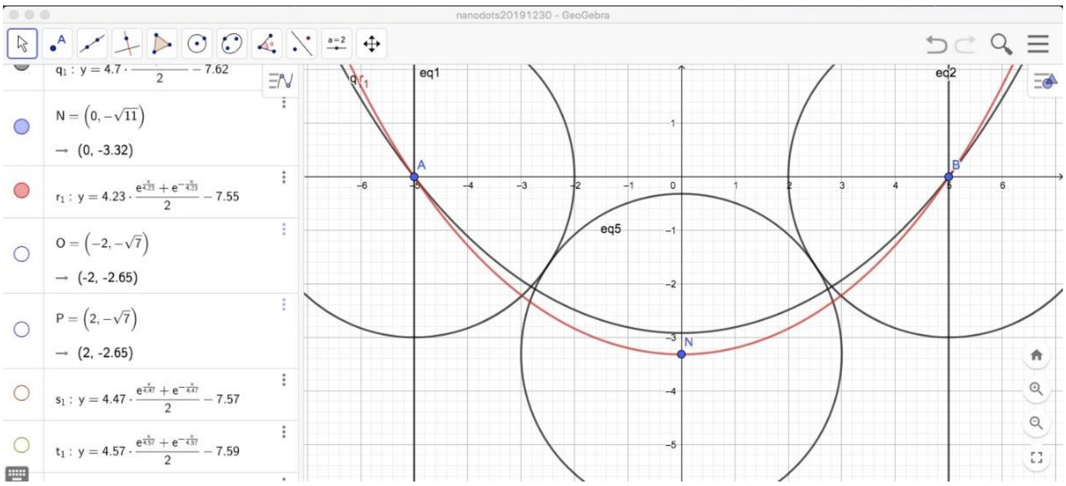
我已經找出了任意 n 個圓的解法：從七個圓開始，就會需要兩個變數，之後每多增加兩個圓就需要多一個變數。從圖中可以看出：3、4 個圓時，任兩個圓心的水平距離皆可確定；在 n 個圓（n≥5 且為奇數）時，可以得到 $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 5$（$a_x$是指從中間向左或向右邊數起第$x$個圓心到第$x+1$個圓心的水平距離，其中$\lfloor\ \rfloor$是高斯符號），將$a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$以 $5 - (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1})$表示，至少需要用到$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$個變數。如果 n 是偶數，則可得出$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = 5 - \frac{12}{2(n-1)}$，要用到$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ 個變數。

不過，不管有幾個變數，總是可以找到一組變數使得有最大值。當圓的數量越來越多，最後的形狀會接近一條最終曲線，數學家稱其為懸鍊線。

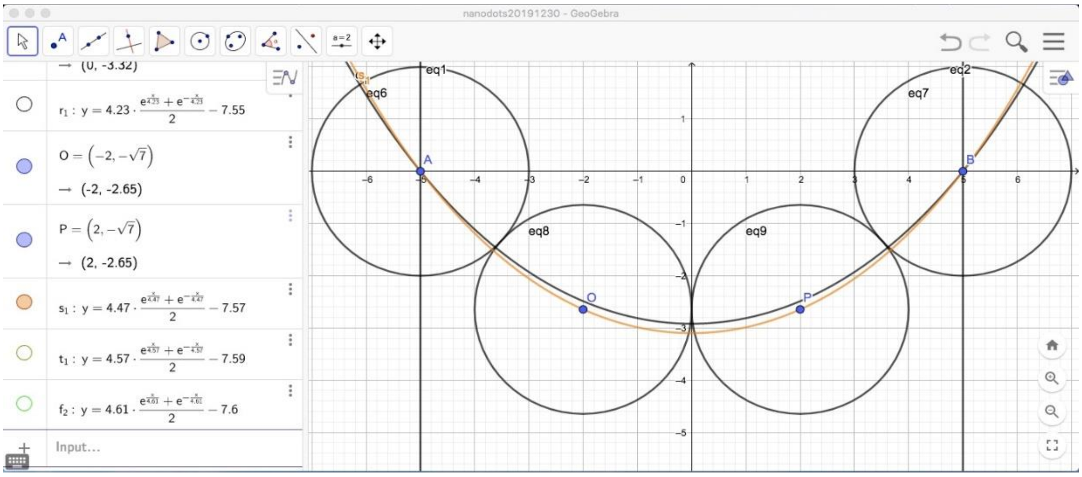
在每一種情況，先將變數 x 和 y 分別代入懸鍊線方程式$c_y = \frac{a(e^{\frac{c_x}{a}} + e^{\frac{-c_x}{a}})}{2} + b$的 a 和 b 當中，接著將懸鍊線任兩點座標$(c_{x_1}, c_{y_1})$、$(c_{x_2}, c_{y_2})$代入$c_x$、$c_y$，得到兩條方程式：

$c_{y_1} = \frac{x(e^{\frac{c_{x_1}}{x}} + e^{\frac{-c_{x_1}}{x}})}{2} + y$以及$c_{y_2} = \frac{x(e^{\frac{c_{x_2}}{x}} + e^{\frac{-c_{x_2}}{x}})}{2} + y$。解出這兩個方程式的交點$(A, B)$（A>0）就是原方程式的 a 和 b。

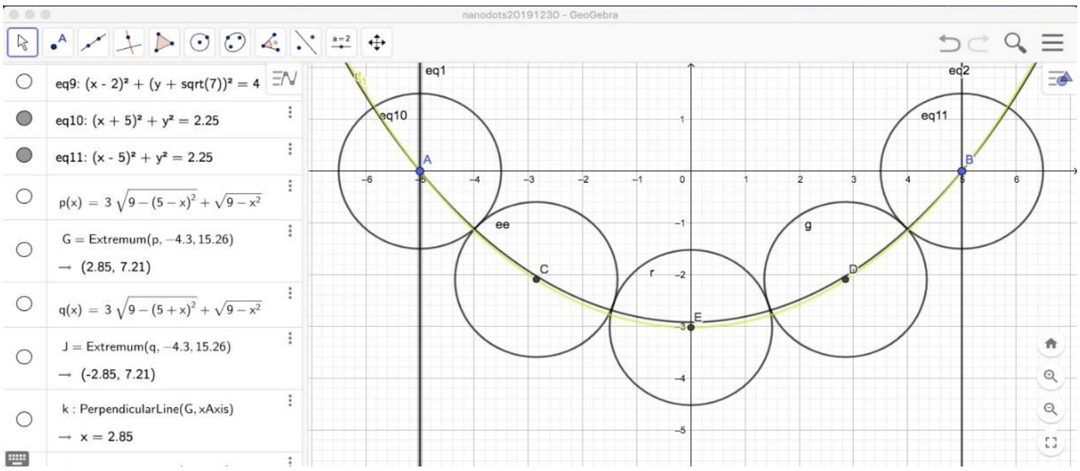
三個圓模擬出的懸鍊線（紅，$y = 4.23 * \frac{e^{\frac{x}{4.23}} + e^{\frac{-x}{4.23}}}{2} - 7.55$）與最終之懸練線（黑）之比對。



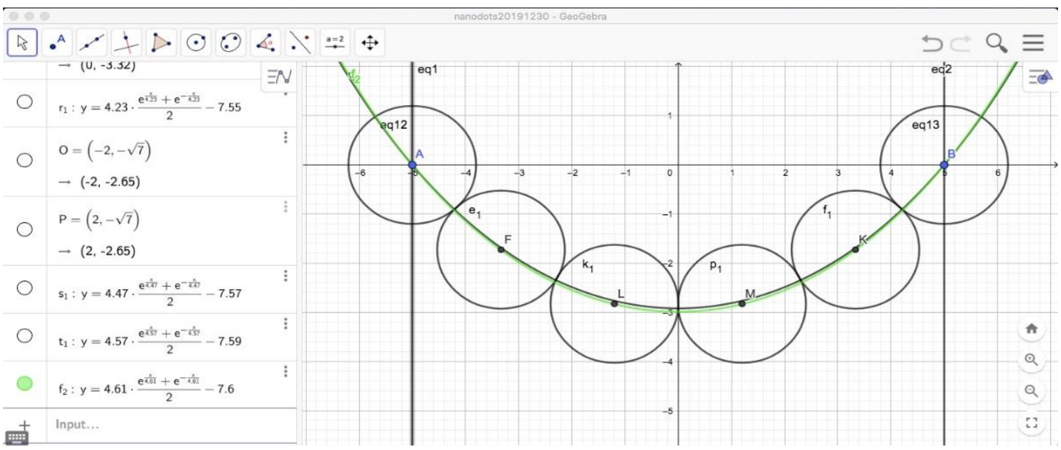
四個圓（橘，$y = 4.47 * \frac{(e^{\frac{x}{4.47}}+e^{\frac{-x}{4.47}})}{2} - 7.57$）的情況。



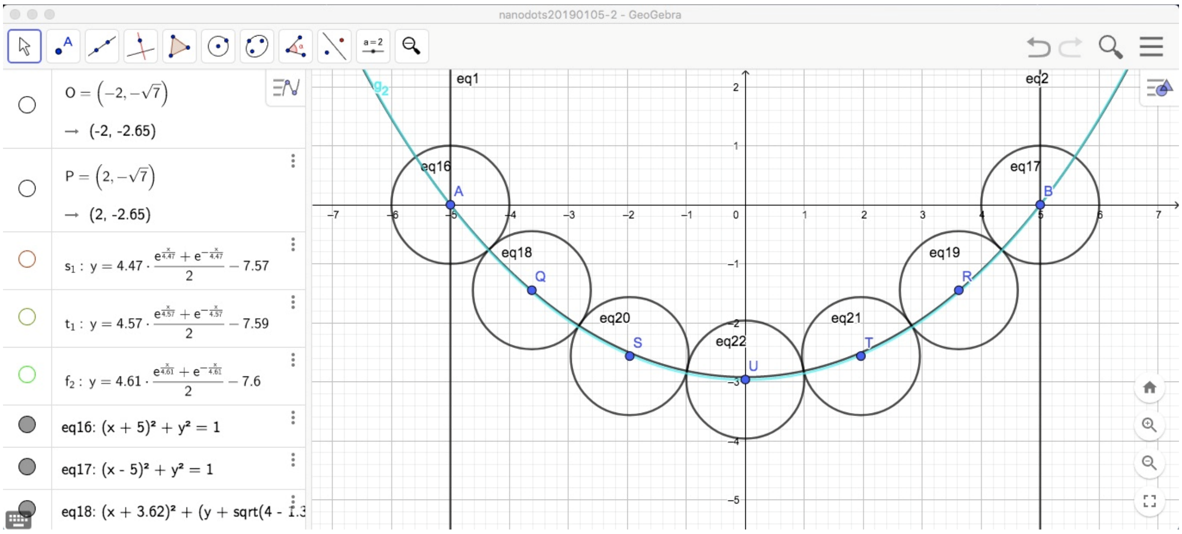
五個圓（黃，$y = 4.57 * \frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2} - 7.59$）的情況。



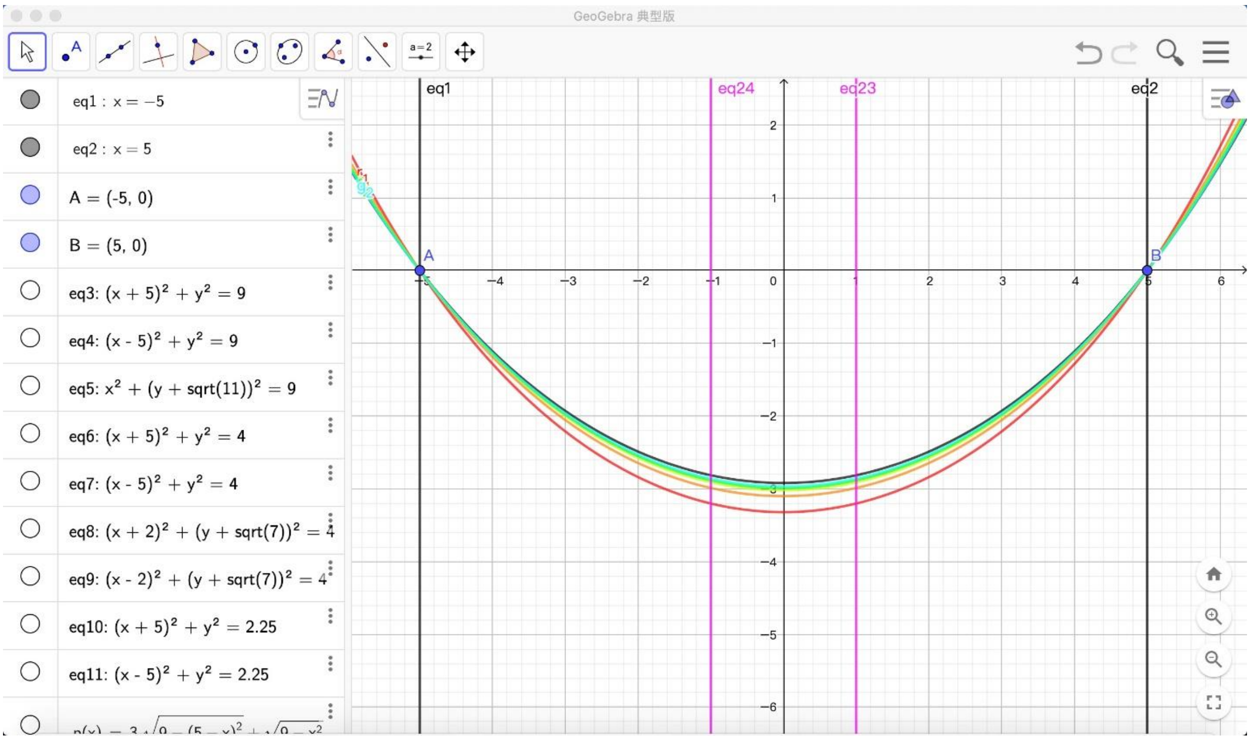
六個圓（綠，$y = 4.61 * \frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2} - 7.6$）的情況。



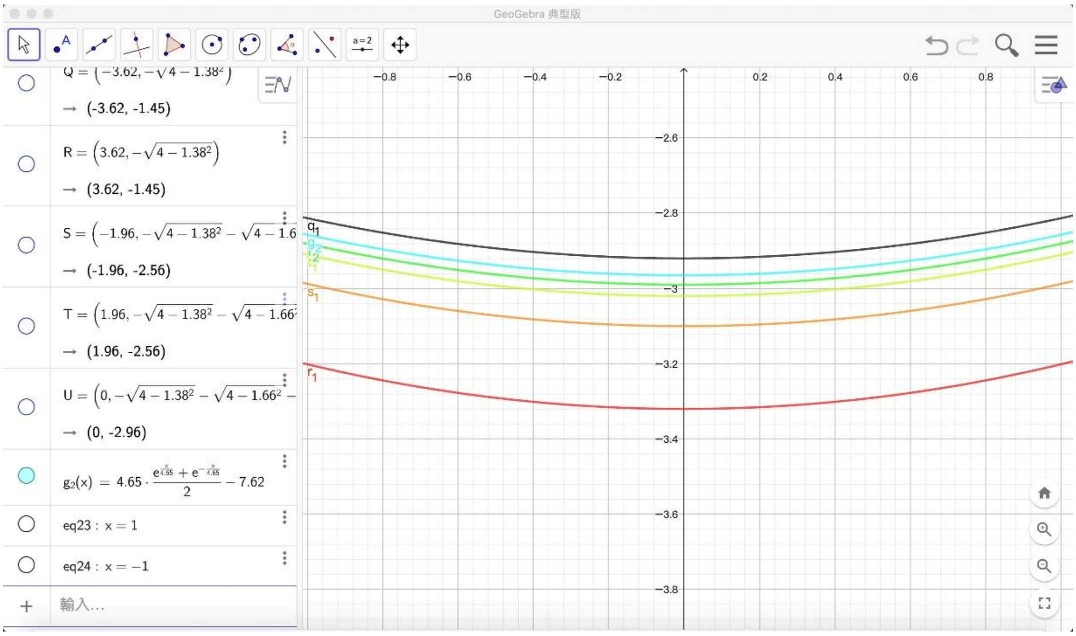
七個圓（靛青，$y=4.65*\frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2}-7.62$）的情況。



我將各個數量的圓構成的懸鍊線放在同一個平面上比較，發現使用的圓越多的時候，它們的圓心連線越來越逼近某一條最終曲線。如圖所示：



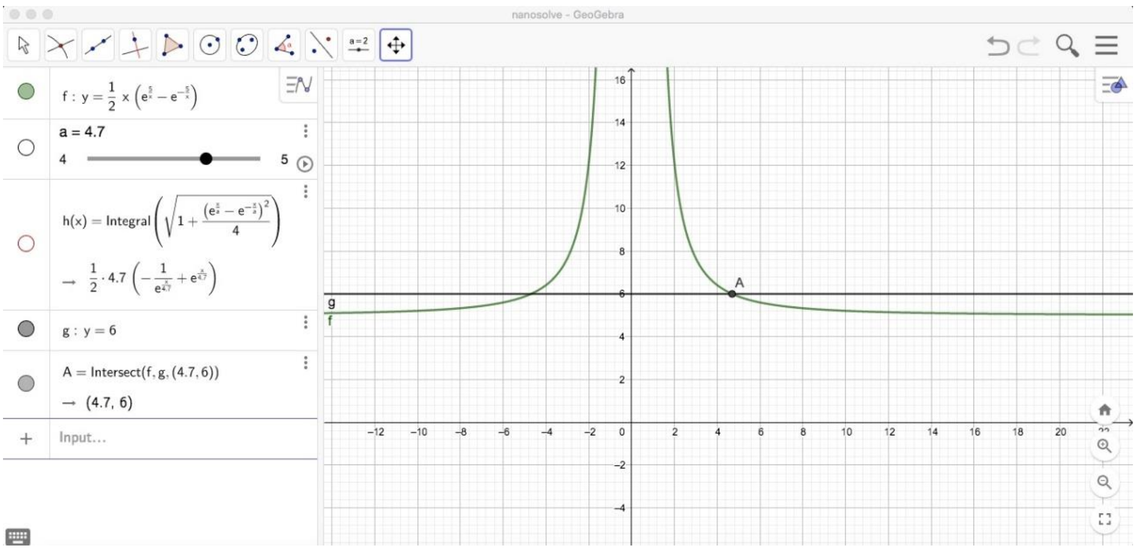
在上圖的粉紅色區間中，我將其放大，如下圖所示：



最終的懸鍊線是如何製做出來的：

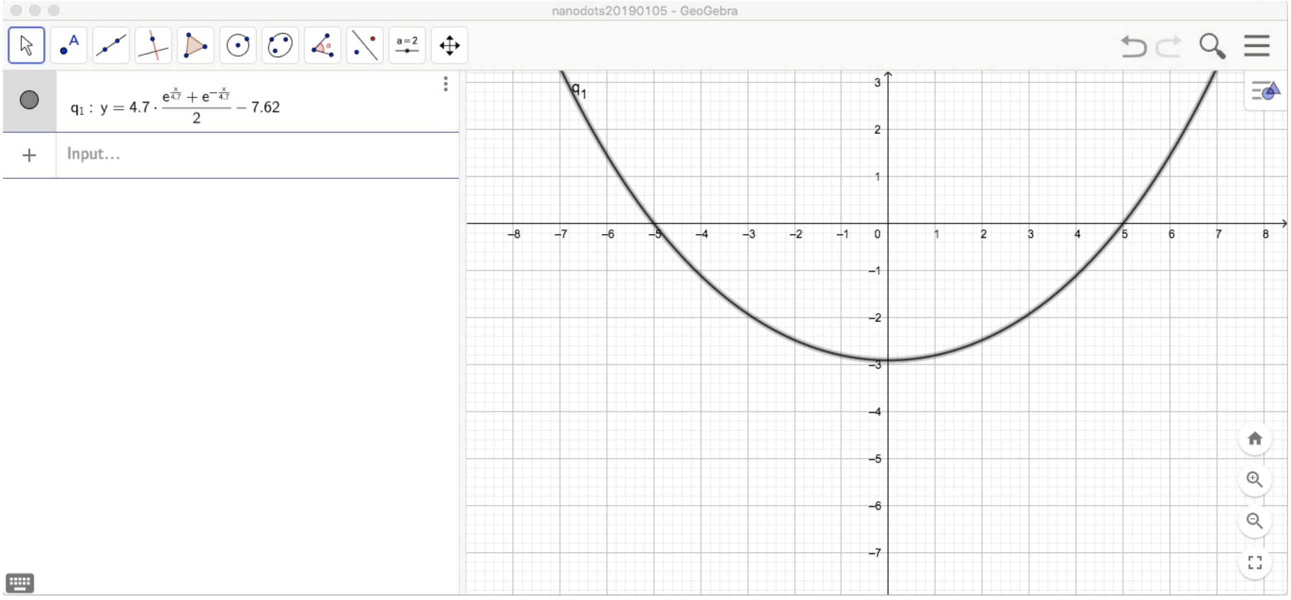
一. 做出懸鍊線的參數式。在這裡是$(t,\frac{a(e^{\frac{t}{a}}+e^{\frac{-t}{a}})}{2}+b)$（參數式：一種以一個變數（例如：t）來表示方程式上的點的方法，例如 y=x 會變成(t,t)、$y=\frac{x^2}{3}$會變成$(t,\frac{t^2}{3})$、等等。這裡因為懸鍊線的方程式是$y=\frac{a(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})}{2}+b$，所以可以替換成$(t,\frac{a(e^{\frac{t}{a}}+e^{\frac{-t}{a}})}{2}+b)$）

二. 將參數式代入曲線弧長的公式，我在書上（微積分的倚天寶劍的第 146~166 頁）讀到說弧長公式為$\int\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$（代入的結果為$\int\sqrt{1+\frac{(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})^2}{4}}=\frac{a(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})}{2}$）

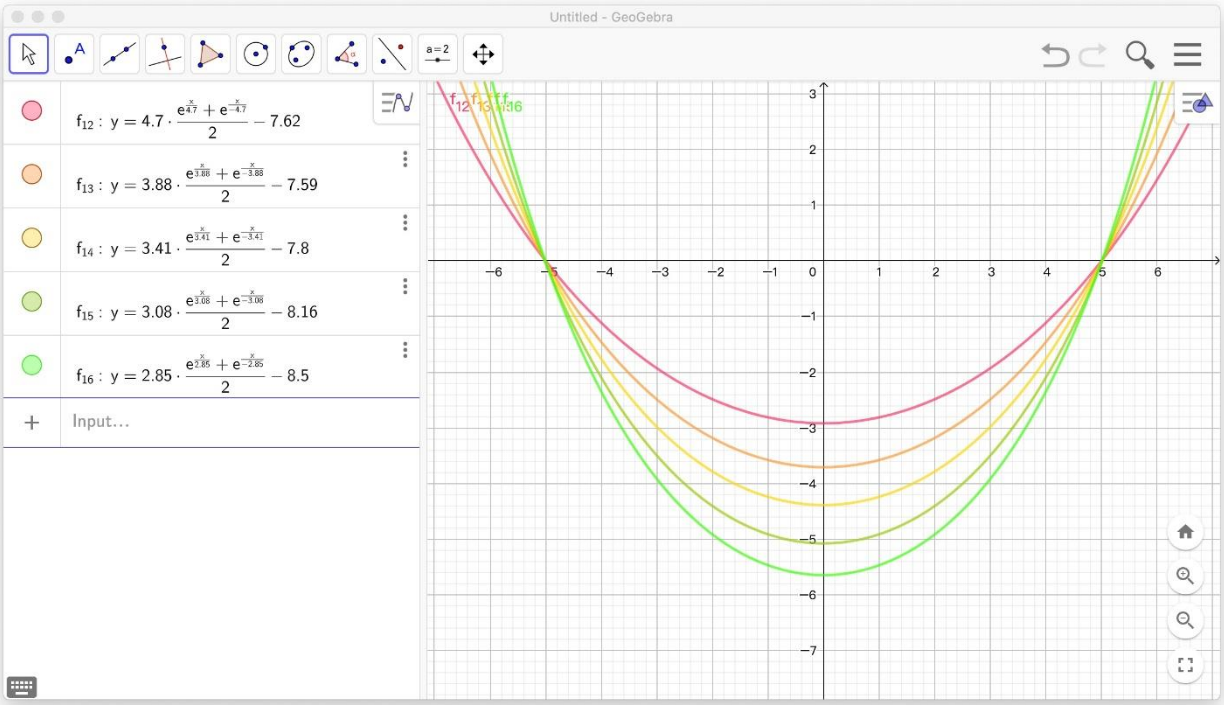


三. 求出 a=4.7，將 a 代回函式中，求出 b=-7.62。

最終的懸鍊線：



這裡的懸鍊線並不是它絕對的形狀，當線段的總長改變時，懸鍊線的形狀也會有所變動。如圖所示（其中函數「線長」由上到下分別為 12,13,14,15,16 公分）：



陸、討論

研究討論——透過電腦軟體協助，可以提升作圖的速度及使步驟變得更加詳細，更可利用軟體的高速運算來驗證圖形本身的正確性，以資訊方法融入數學專題研究可以延伸學習廣度。

延伸討論——在考慮磁力大小以及球的重量的情況下，這條鍊子能撐住幾顆球而不斷裂？萬一球的大小並不是每一顆都相同，而是有大有小，鍊子的形狀會產生什麼改變？假設固定其他的數值，例如球的半徑而不是「線長」呢？還有，再以更多的球串成鍊子，例如八個，九個，十個，或更多？這些都是有趣的問題，非常值得探討研究。

柒、結論

我已經表示出科學玩具”nanodots”與數學曲線「懸鍊線」的關聯：我以相接的圓圖示出懸鍊線的形狀，並且發現在七個圓時就提供了一個滿意的結果。除此之外，這個研究也提供了一種以生活物件逼近函數的方式，讓我對數學有更佳的理解。希望以後也可以發現以其他物件逼近懸鍊線的方法。

捌、參考資料

1. Catenary—from Wolfram MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html
2. 微積分的倚天寶劍的第 146～166 頁（天下文化出版社）
3. 昌爸工作坊：http://www.mathland.idv.tw/fun/catenary.htm
4. kiwi 的物理教室：http://kiwiphysics.blogspot.com/2014/02/blog-post.html
5. 高雄中學數學科 蔡哲淵老師 方程式的公式解(根式解)：
   http://web.kshs.kh.edu.tw/math/research/equation 的公式解.pdf
6. WolframAlpha：https://www.wolframalpha.com
7. QuickMath：http://www.quickmath.com

【評語】030410

此作品運用小球當作組成細繩的最小單位，以相連的球來模擬細繩，計算球心到水平面的距離，藉助簡單的數學模型以及程式的輔助，得出當球心高度的總和最小時，球心所連成的線段的形狀，並說明這些相連的線段會趨向何種曲線。想法頗具巧思，有創意。可惜的是欠缺明確的結論及一些細節缺乏理論的論證。

作品海報

[摘要]

研究科學玩具「nanodots」與數學曲線「懸鍊線」(Catenary)的關係，並更進一步思考 nanodots的多寡與最終形成曲線的逼近程度是否有正向的關聯。

[壹、研究動機]

某天我在玩nanodots的時候，發現其形成的形狀與三年級數學課本所教「拋物線」有點 類似，但是也跟我之前在書上讀到的數學曲線「懸鍊線」有點類似，所以想探討其中的關係，因此做了這個題目。

[貳、研究目的]

探討nanodots以及數學曲線「懸鍊線」(Catenary)的關聯。

[參、研究設備與器材]

紙、筆、電腦程式GeoGebra Classic 6 。

[肆、研究過程與方法]

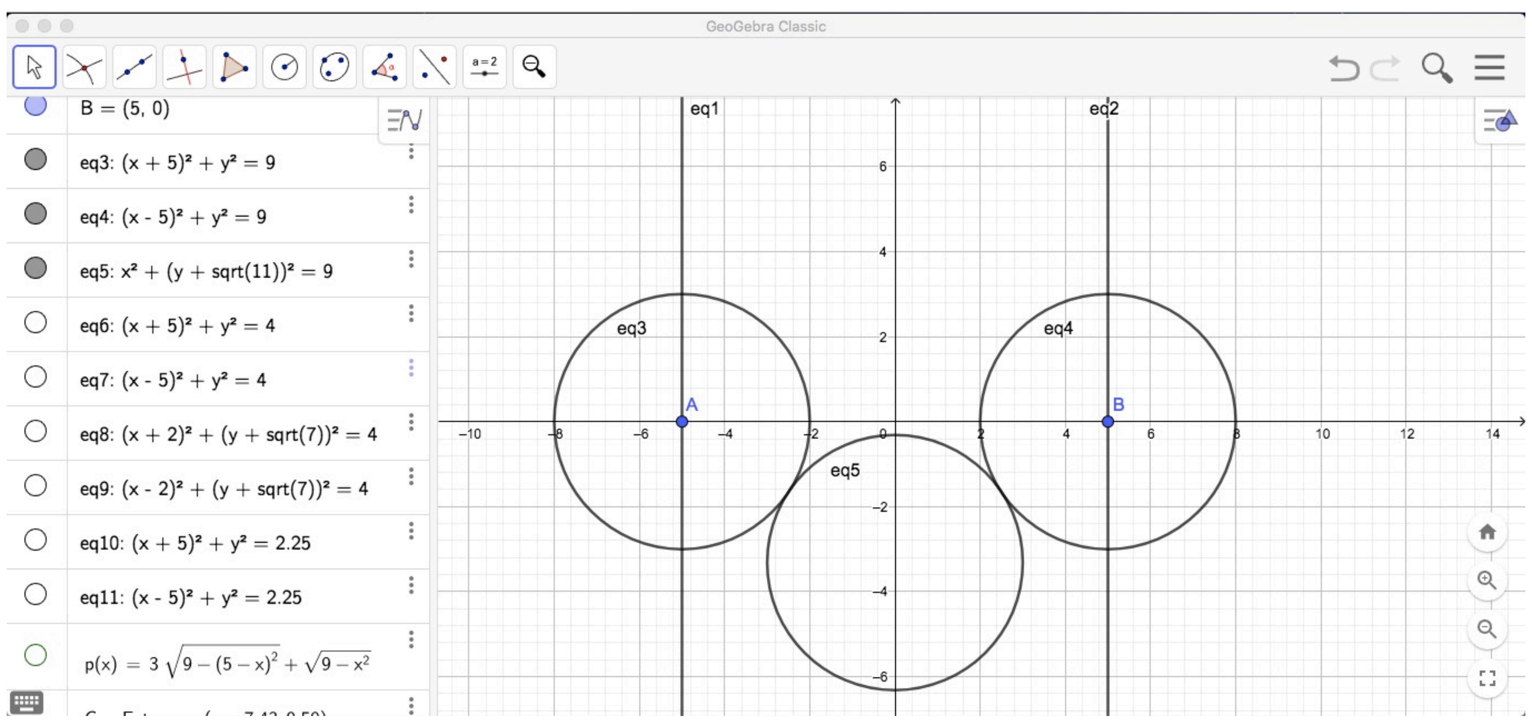
懸鍊線是懸在水平兩點間的因均勻引力作用下的軟繩的形狀，其上每一點的能量（位置）的總和相較於其他狀態是最低的（這裡的能量是位能：一個用來描述物體在保守力場中作功能力大小的物理量，會隨著高度增加而增加。這時如果位能不是最低的，則它會轉換成能量更低的型態，當然就不會保持穩定。）

假設我用的圓都是同樣大小，且兩端距離不變，這條懸鍊線很顯然地就會越拉越長，越垂越低。所以我在增加nanodots(因為以二維視角模擬，nanodots在以下文章稱為圓)的時候，以等比例增加兩端的距離，以維持固定的形狀(兩端距離要與「線長」成固定比例， 形狀才會相似)。但圖片的面積也會越來越大，難以拍攝，因此我決定以縮小圓的大小做為我的研究策略，既可使圖片較容易拍攝，也突顯我的研究宗旨:比較不同數量的圓構成的懸鍊線的逼近程度。

先用geogebra開出頁面，將兩端的距離及「線長」(就是相鄰圓的圓心距離的總和)定出來(兩端距離小於線長，這裡是10單位及12單位)(所以我在模擬n個圓的時候，每一個圓的半徑為 $\frac{12}{2(n-1)}$)，然後再開始用圓來模擬nanodots互相吸引的樣子。(此時暫不考慮nanodots的重量)

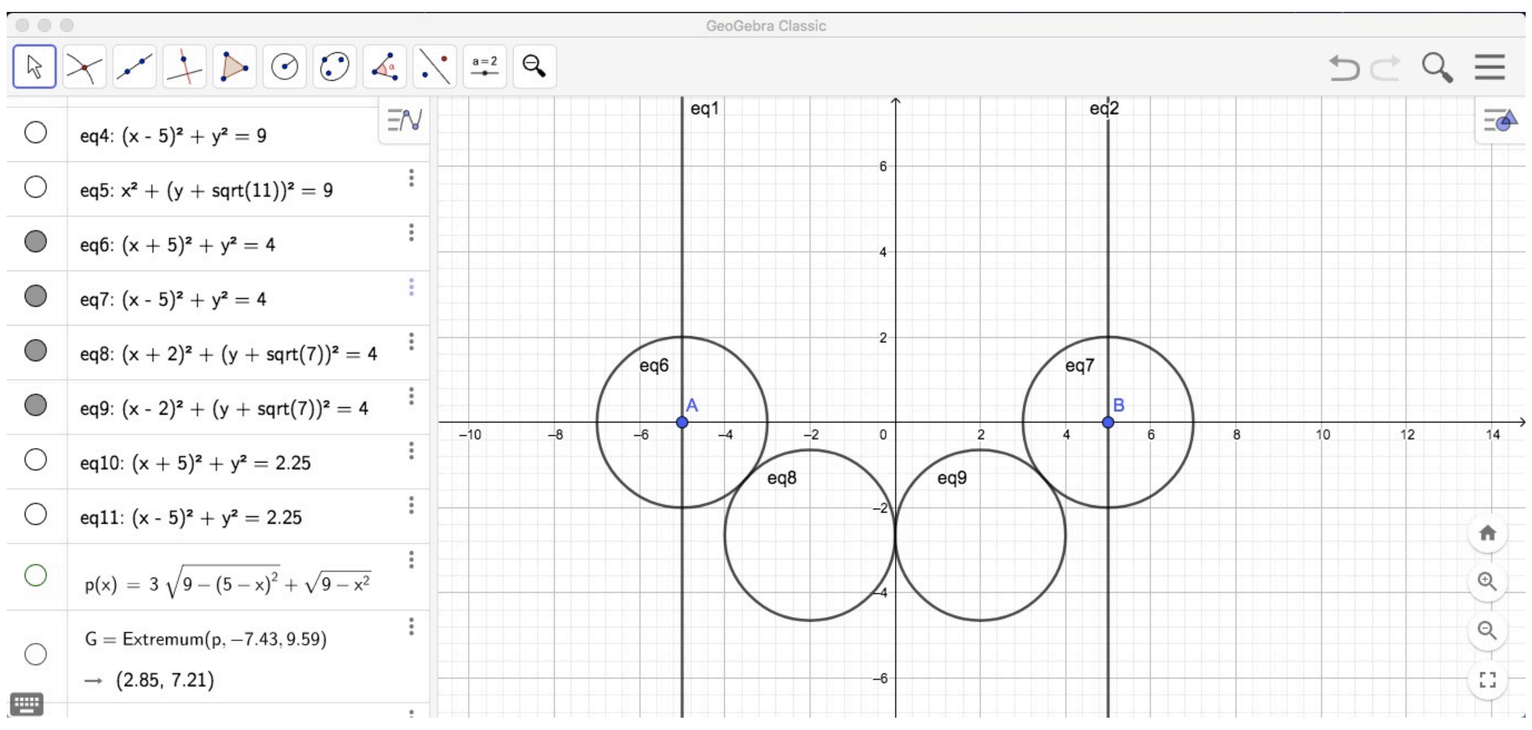
一、三個圓

三個圓很好模擬，只要將兩邊的圓擺好位置，再讓中間的圓與它們相切就可以了。



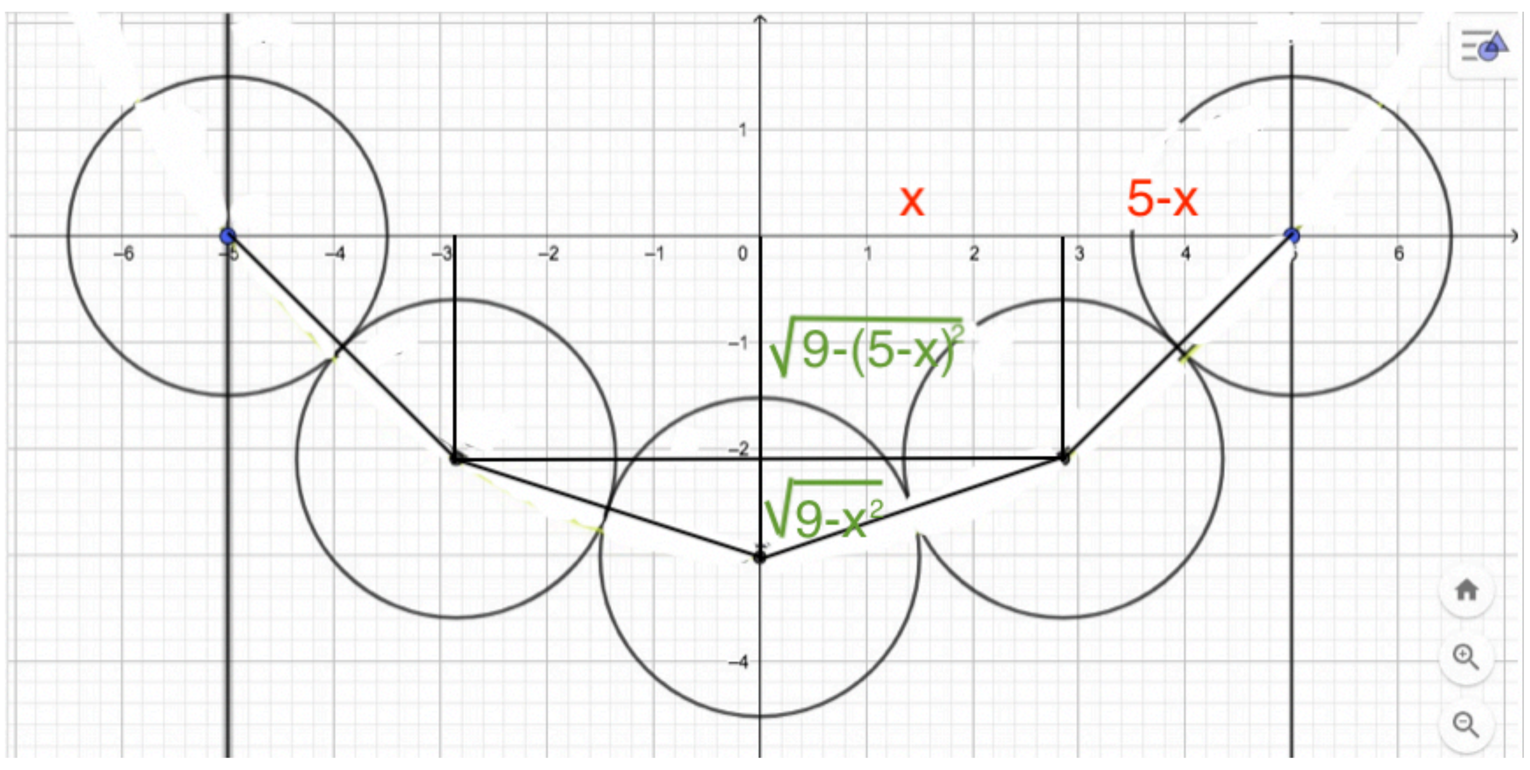
二、四個圓

四個圓的情況和三個一樣簡單，只不過要記得下面兩個圓要同高度。



三、五個圓

因為無法直接確定底下三個圓的位置，所以五個圓的難度明顯地提高許多。不過如果整個系統要維持穩定，整個系統的總能量要維持最低(也就是五個圓的總位能要最低，所以五個圓的圓心在x軸下，且離x軸越遠越好)。我們的「線長」是12，而且有4 段，每一段的長是3。假設第二低的圓的圓心距離y軸x單位，那它就比最低的圓還要高$\sqrt{3^2-x^2}$單位，然後最高的圓會比它高$\sqrt{9-(5-x)^2}$單位(五個圓的圓心的座標分別為$(-5,0)$, $(-x,-\sqrt{9-(5-x)^2})$, $(0,-\sqrt{3^2-x^2}-\sqrt{9-(5-x)^2})$, $(x,-\sqrt{9-(5-x)^2})$, $(5,0)$ 。



為了使「總能量」最低， $f(x)=3\sqrt{9-(5-x)^2}+\sqrt{3^2-x^2}$要找最大值:

$$f(x)=3\sqrt{-x^2+10x-16}+\sqrt{-x^2+9}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(-x^2+10x-16)^{\frac{-1}{2}}(-2x+10)+\frac{1}{2}(-x^2+9)^{\frac{-1}{2}}(-2x)$$

$$\frac{3(-2x+10)}{\sqrt{-x^2+10x-16}}=\frac{2x}{\sqrt{-x^2+9}}$$ （利用f′(x)=0找出critical points來找到極值）

$$\frac{9(4x^2-40x+100)}{-x^2+10x-16}=\frac{4x^2}{-x^2+9}$$

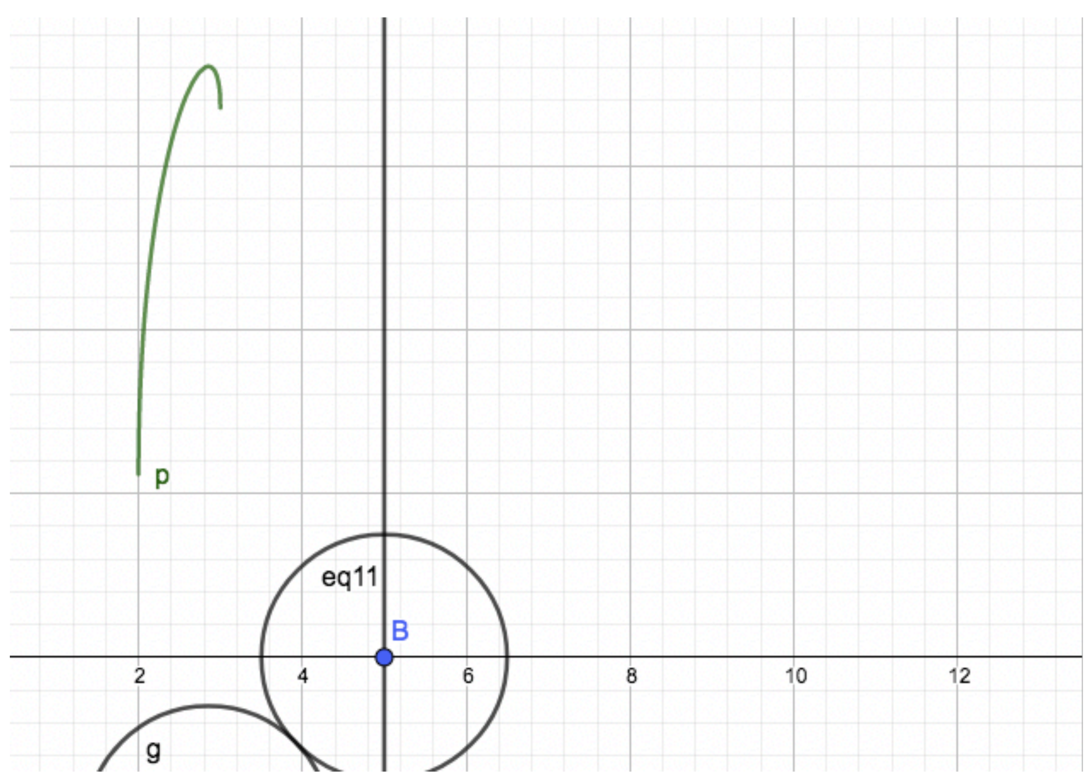
$$(36x^2-360x+900)(-x^2+9)=4x^2(-x^2+10x-16)$$

$$-8x^4+80x^3-125x^2-810x+2025=0$$

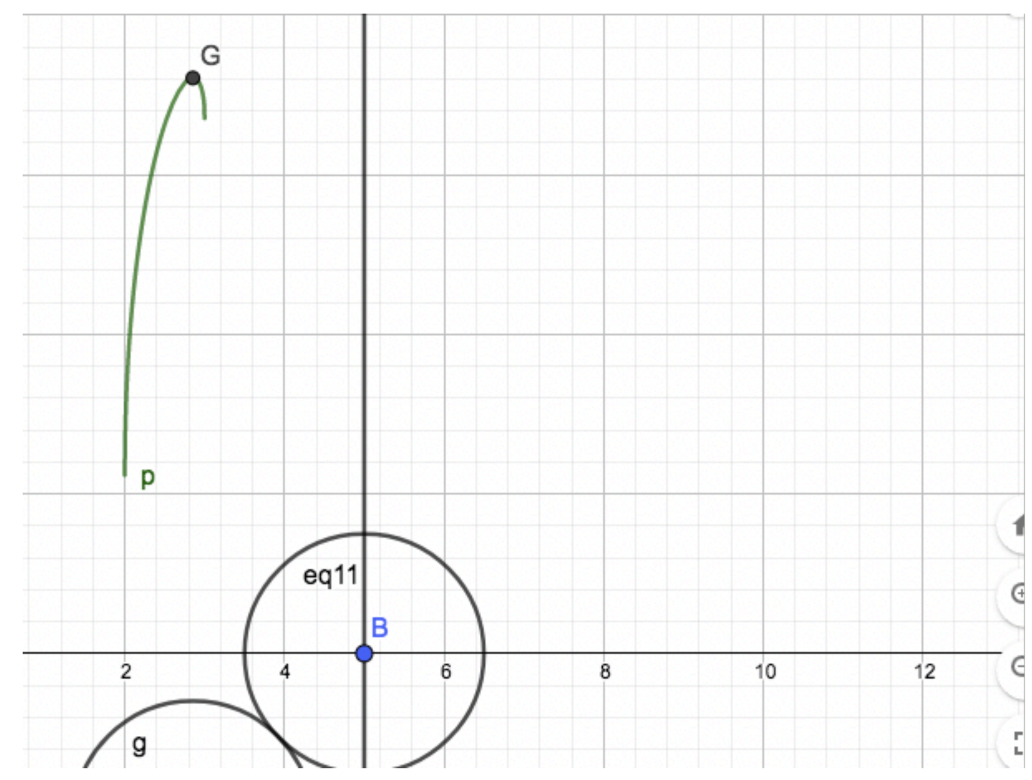
這條式子展開會變成一條四次方程式(這裡我們透過WolframAlpha網站進行數值分析解)。

此時$x \approx 2.85287$（其實原方程式應有四個解，但其它三解有兩根為複數，一實根小於零，不符題意。）

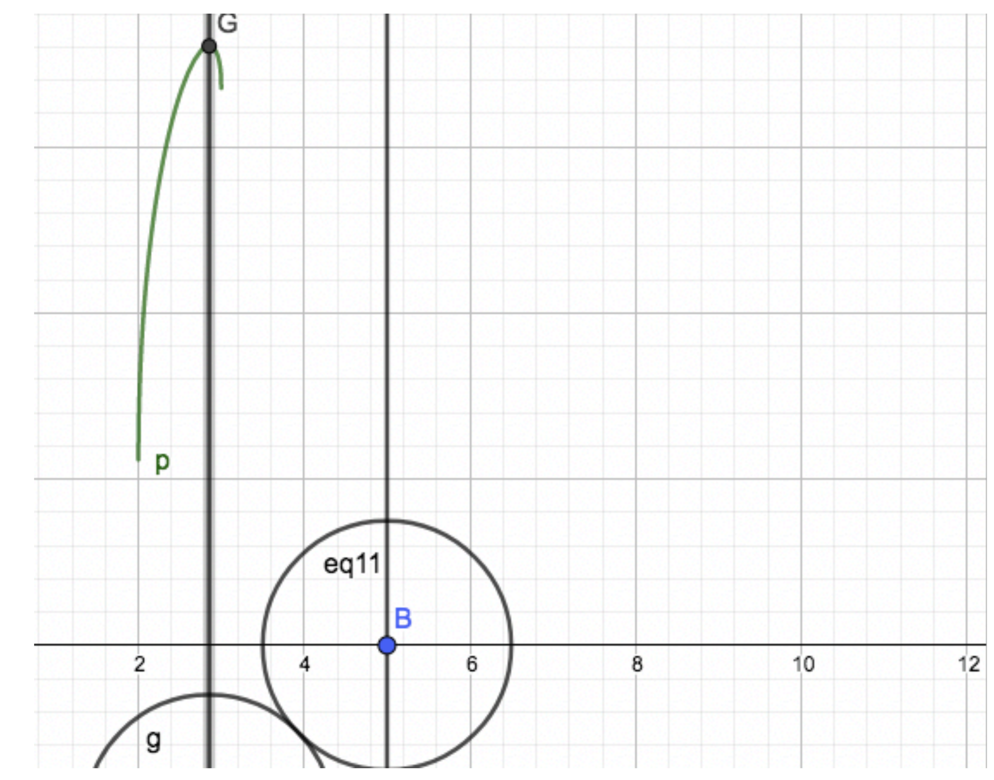
1.畫出位能函式



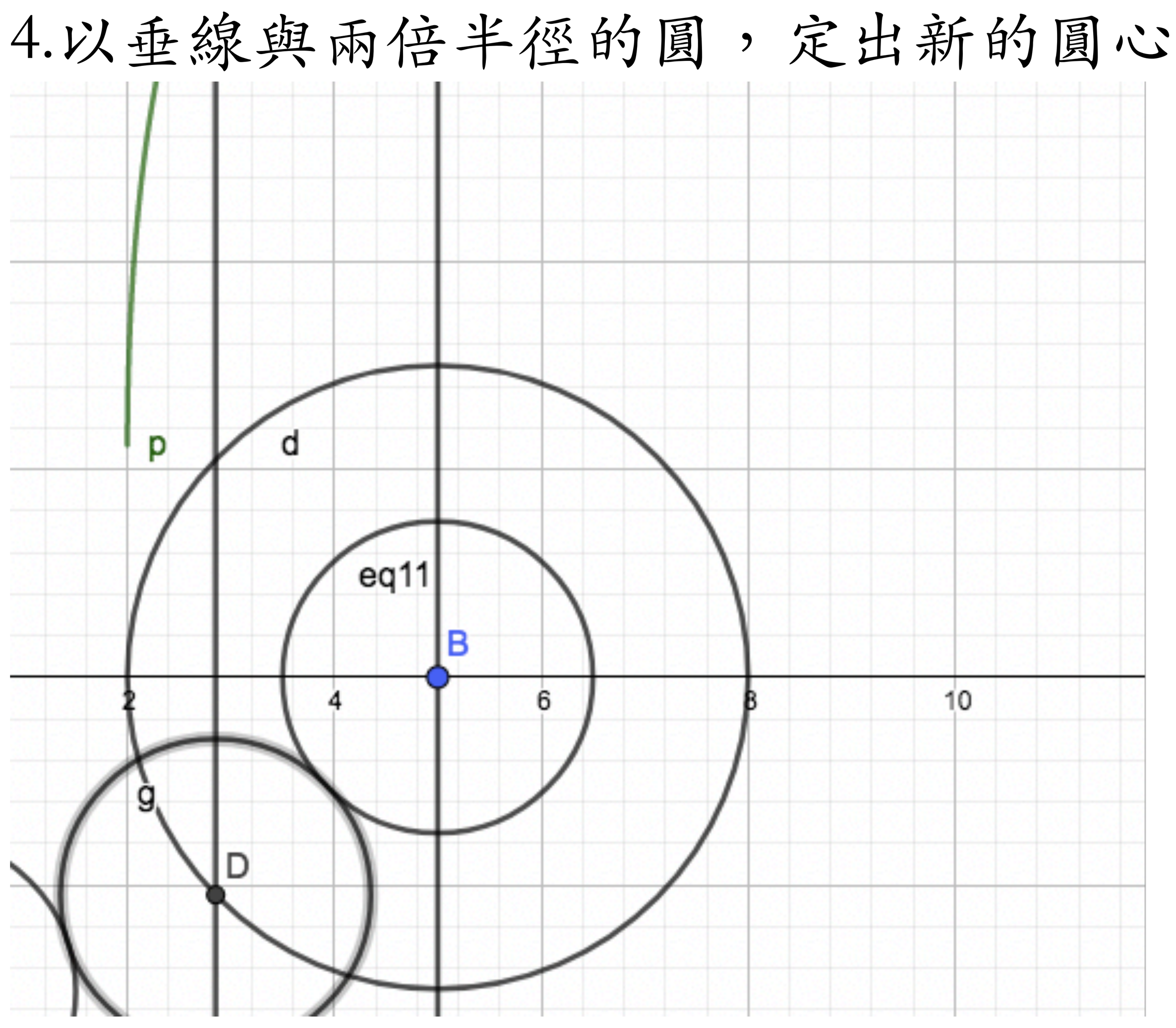
2.找出方程式的最高點



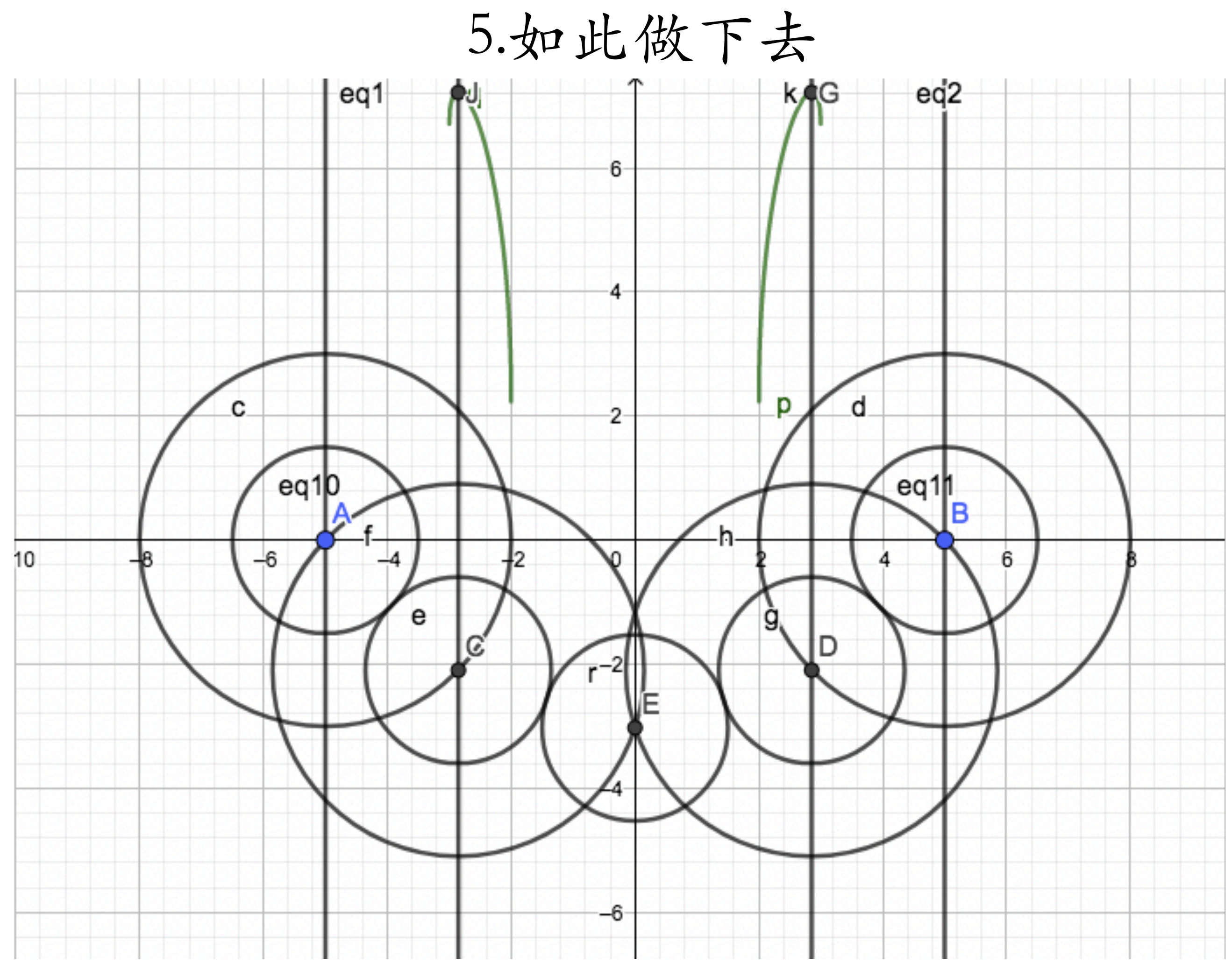
3.畫出垂線



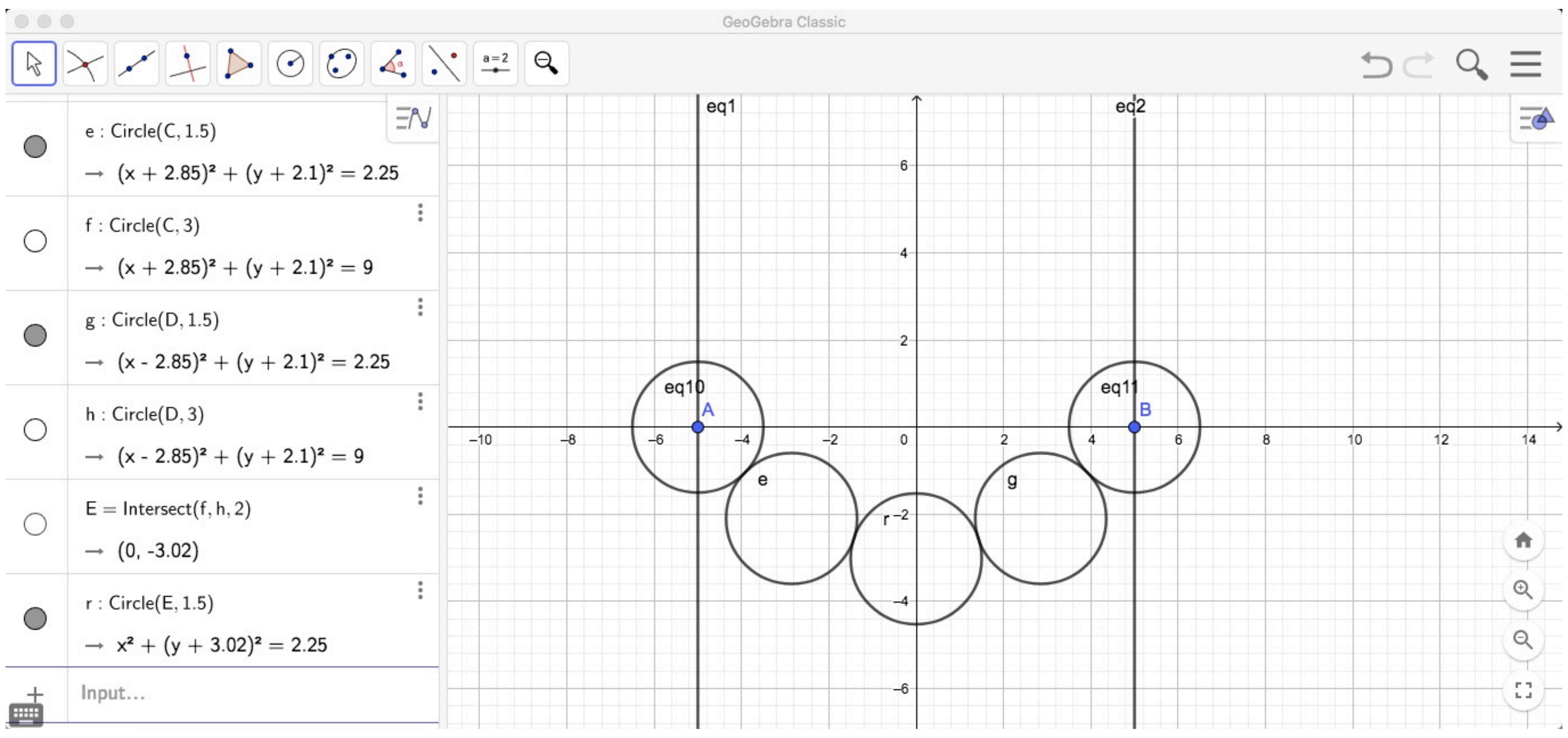
4.以垂線與兩倍半徑的圓，定出新的圓心



5.如此做下去

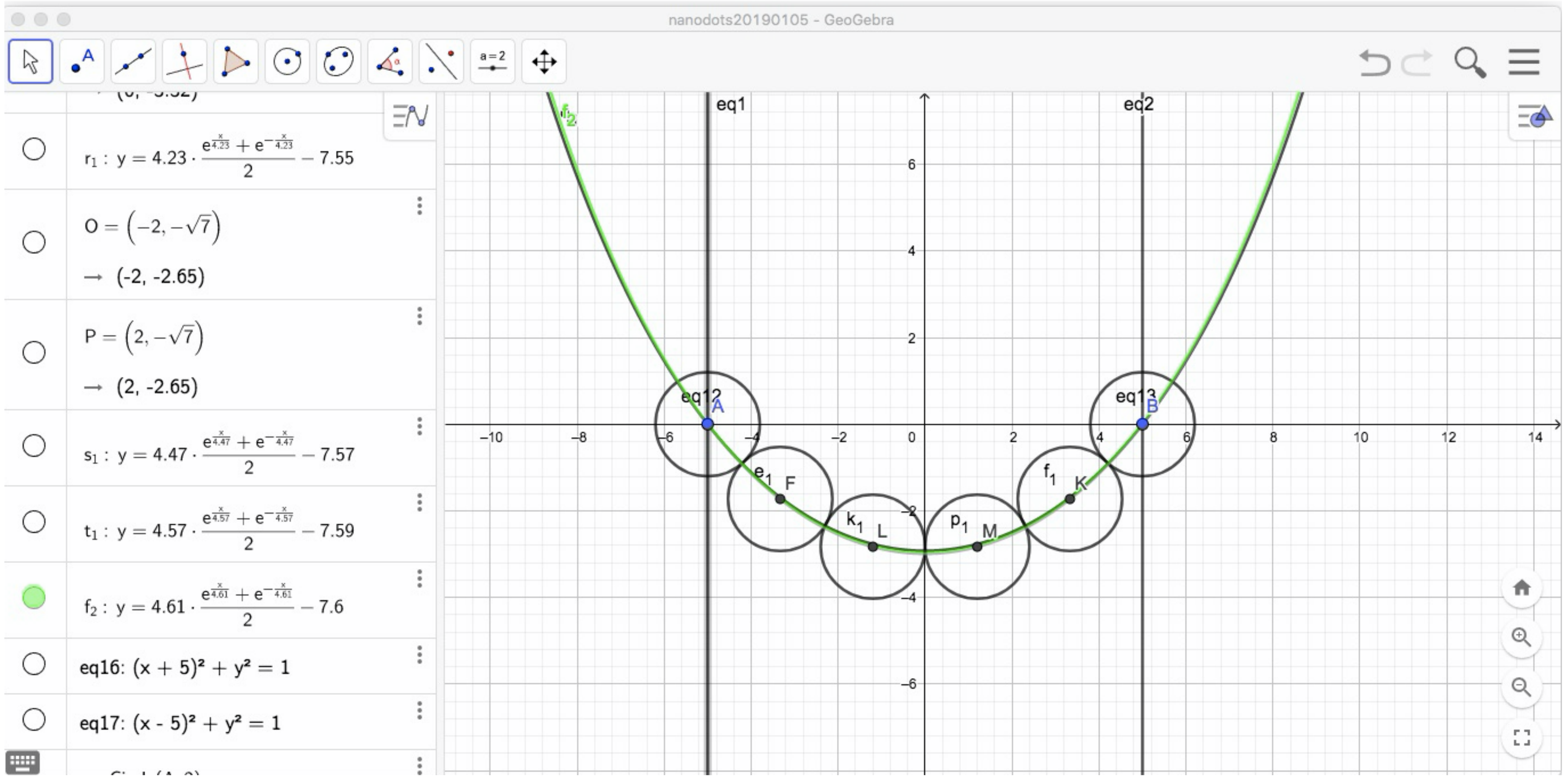


6.此時x約等於2.85，如圖所示



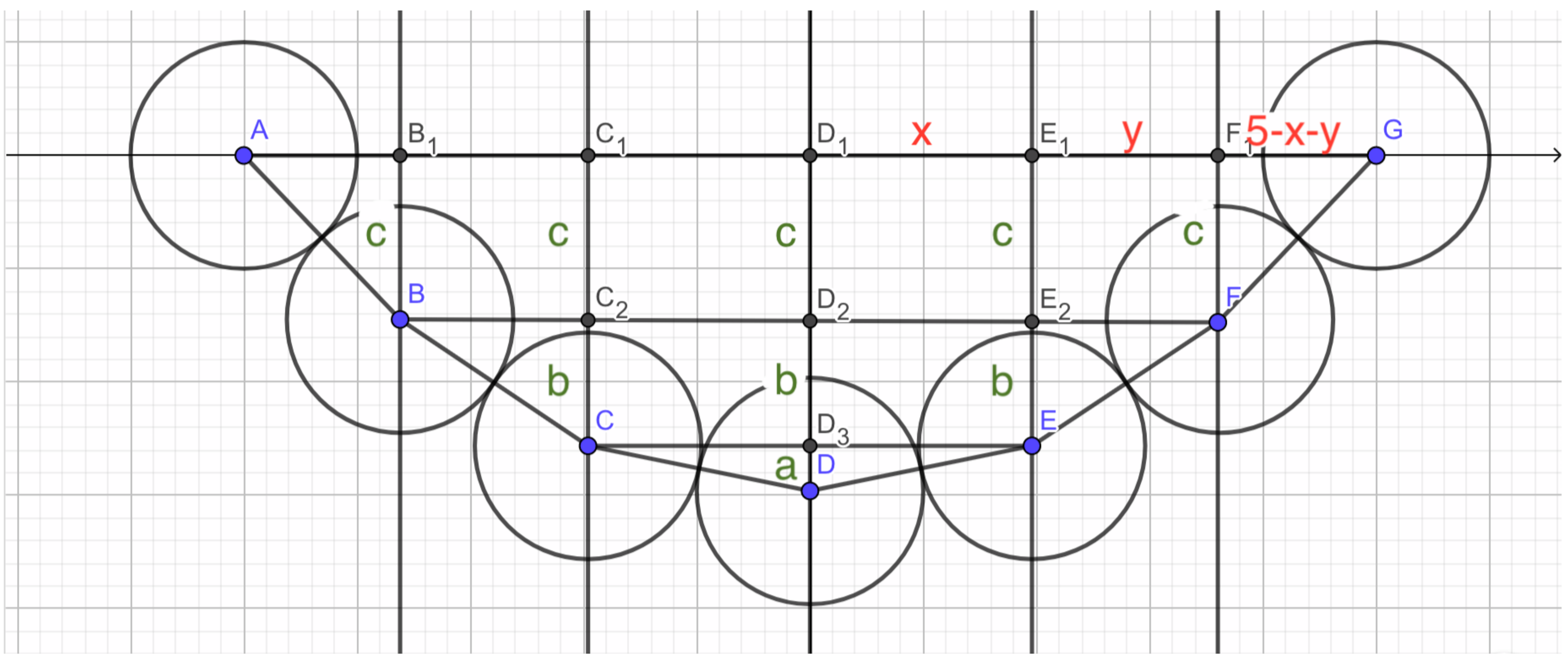
四、六個圓

根據五個圓的「函式法」，六個圓也可求出唯一的最大值，只是函式會變成$4\sqrt{2.4^2-(3.8-x)^2}+2\sqrt{2.4^2-x^2}$，透過數值法可以得到最大值發生在$x \approx 2.1318$。(根號裡的數字會隨著圓的數量、半徑與位置而變)。

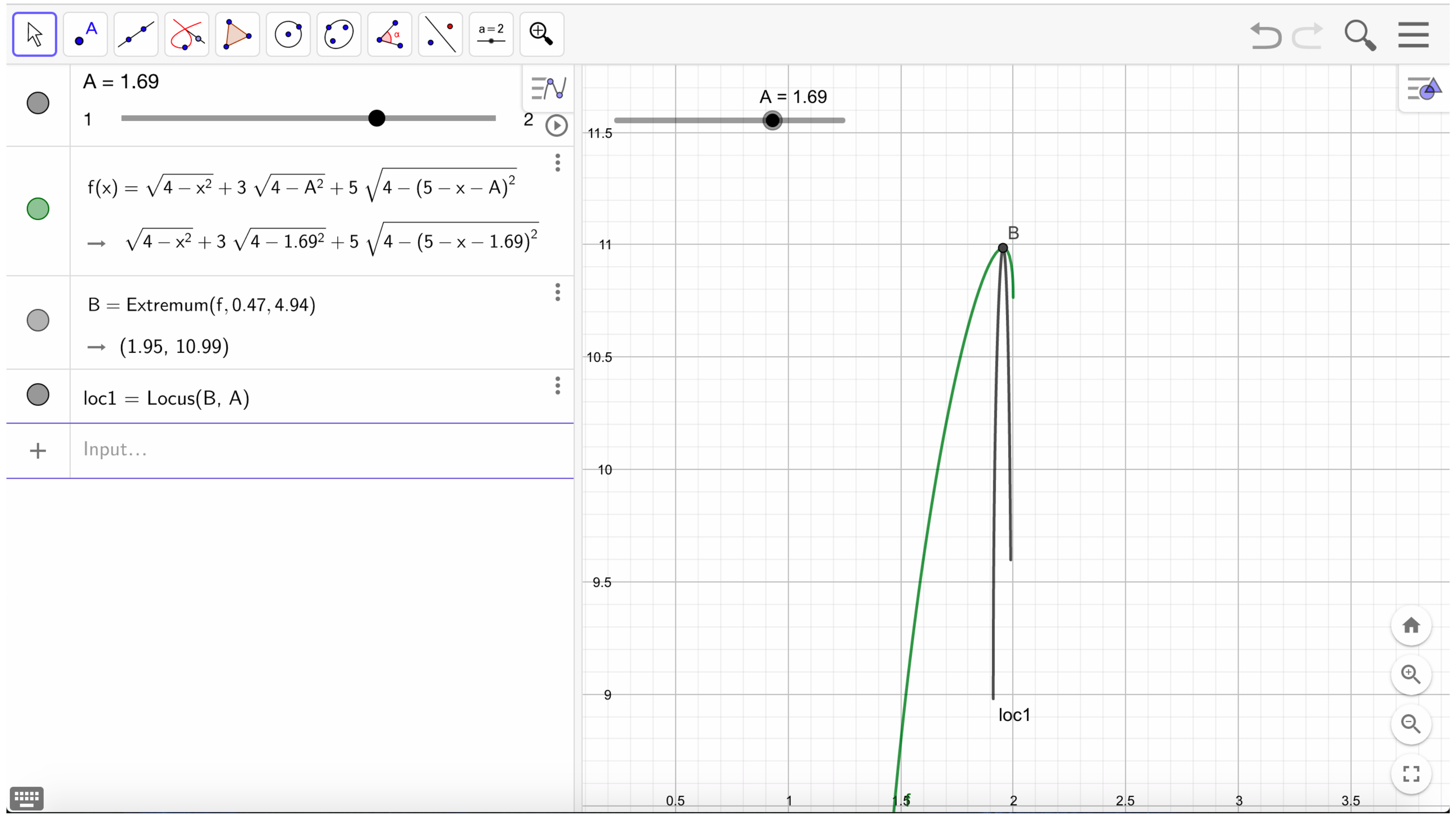


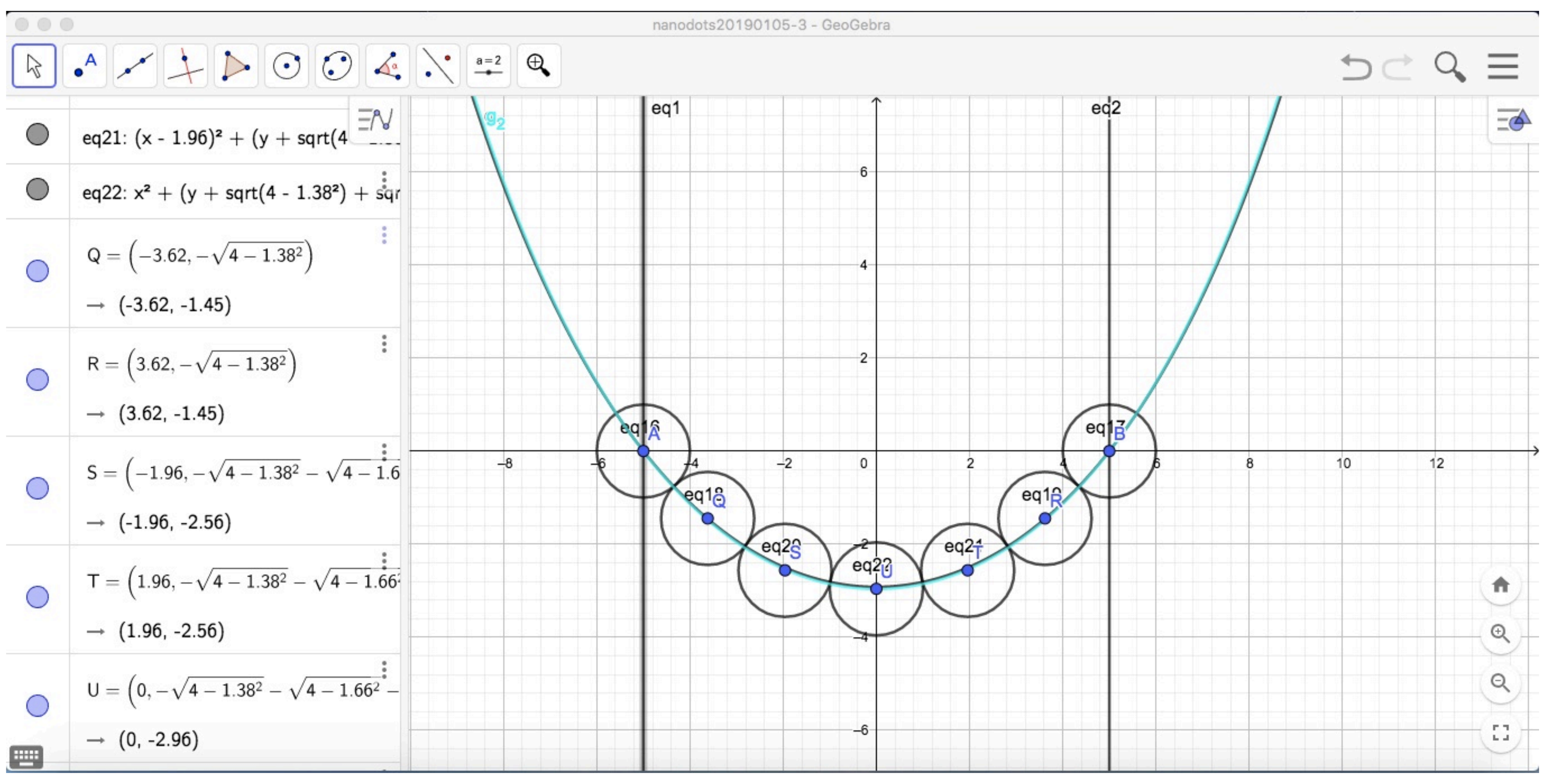
五、七個圓

七個圓是我的研究的一大里程碑:底下不但有五個圓，還有一個前所未有的問題:會需 要求出兩個變數的函式的最大值。 沿用五個圓的「位能函式」，七個圓的函式為$\sqrt{4-x^2}+3\sqrt{4-y^2}+5\sqrt{4-(5-x-y)^2}$。其中a等於$\sqrt{4-x^2}$，b等於$\sqrt{4-y^2}$，c等於$\sqrt{4-(5-x-y)^2}$。



這個函式無法完全以二維座標表示，所以我先固定y(此處為A)，求出此條件下的最大值，再移動A，比較各情況下的最高點，找出真正的最大值。此時將x=1.95,y=1.69代入就 可以求出a,b,c的值，也就求出了位能函數最低時的底下五個圓的圓心(這個方法其實不是非 常精確的解析解，而只是一個近似的解)經過計算，我解出了近似正確的最大解。如下圖所示

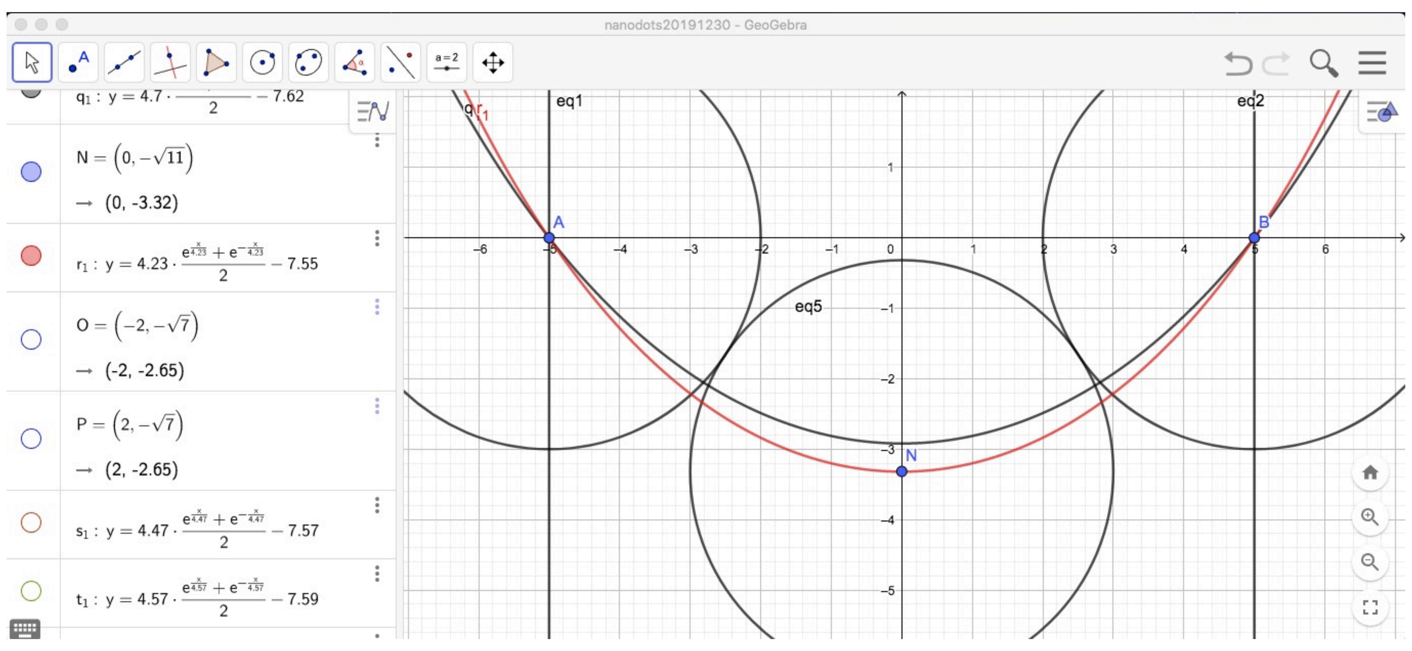




伍、研究結果

我已經找出了任意n個圓的解法:從七個圓開始，就會需要兩個變數，之後每多增加兩個圓就需要多一個變數。不過，不管有幾個變數，總是可以找到一組變數使得有最大值。當圓的數量越來越多，最後的形狀會接近一條最終曲線，數學家稱其為懸鍊線。

三個圓模擬出的懸鍊線(紅)與最終之懸練線(黑)之比對

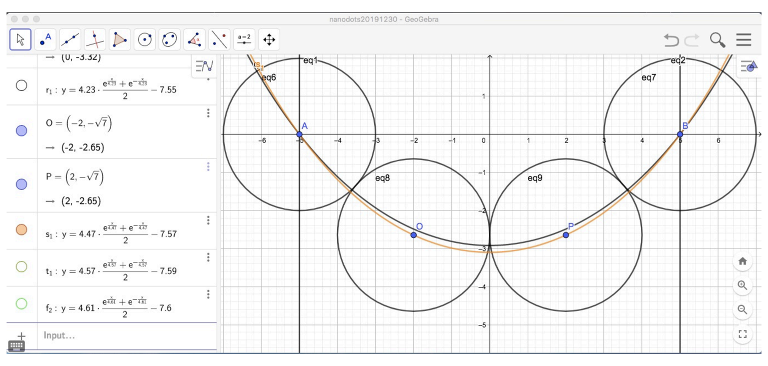


在每一種情況，先將變數x和y分別代入懸鍊線方程式$c_y=\frac{a(e^{\frac{c_x}{a}}+e^{\frac{-c_x}{a}})}{2}+b$的a和b當中，接著將懸鍊線任兩點座標$(c_{x_1},c_{y_1})$、$(c_{x_2},c_{y_2})$代入$c_x$、$c_y$，得到兩條方程式：

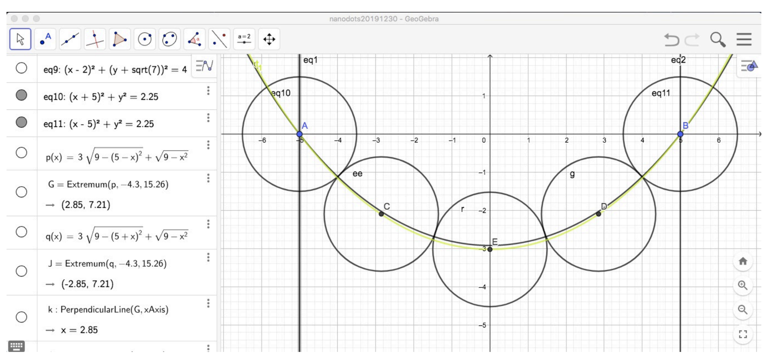
$c_{y_1}=\frac{x(e^{\frac{c_{x_1}}{x}}+e^{\frac{-c_{x_1}}{x}})}{2}+y$以及$c_{y_2}=\frac{x(e^{\frac{c_{x_2}}{x}}+e^{\frac{-c_{x_2}}{x}})}{2}+y$。解出這兩個方程式的交點$(A,B)$（A>0）就是原方程式的a和b。

三個圓模擬出的懸鍊線（紅，$y=4.23*\frac{e^{\frac{x}{4.23}}+e^{\frac{-x}{4.23}}}{2}-7.55$）與最終之懸練線（黑）之比對。

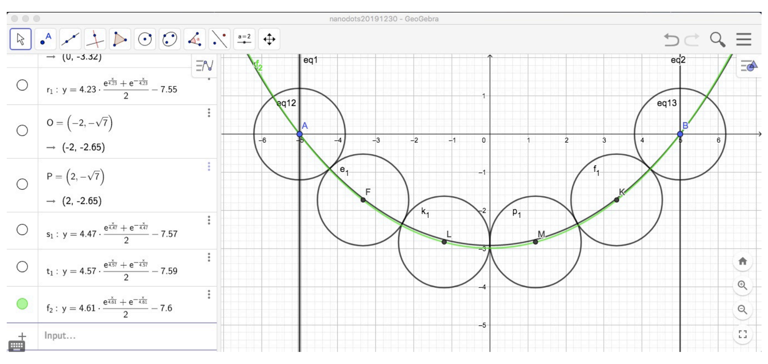
四個圓（橘，$y=4.47*\frac{(e^{\frac{x}{4.47}}+e^{\frac{-x}{4.47}})}{2}-7.57$）的情況



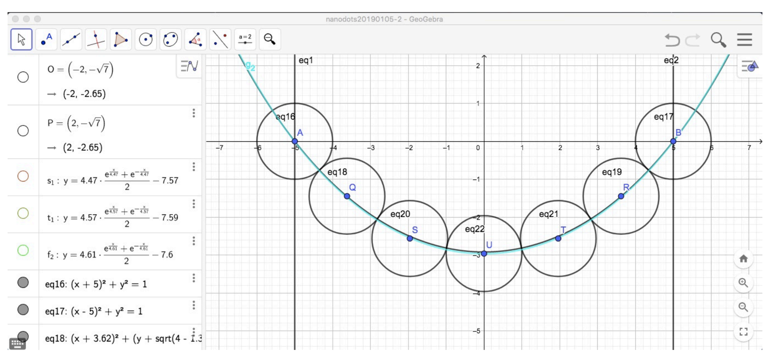
五個圓（黃，$y=4.57*\frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2}-7.59$）的情況



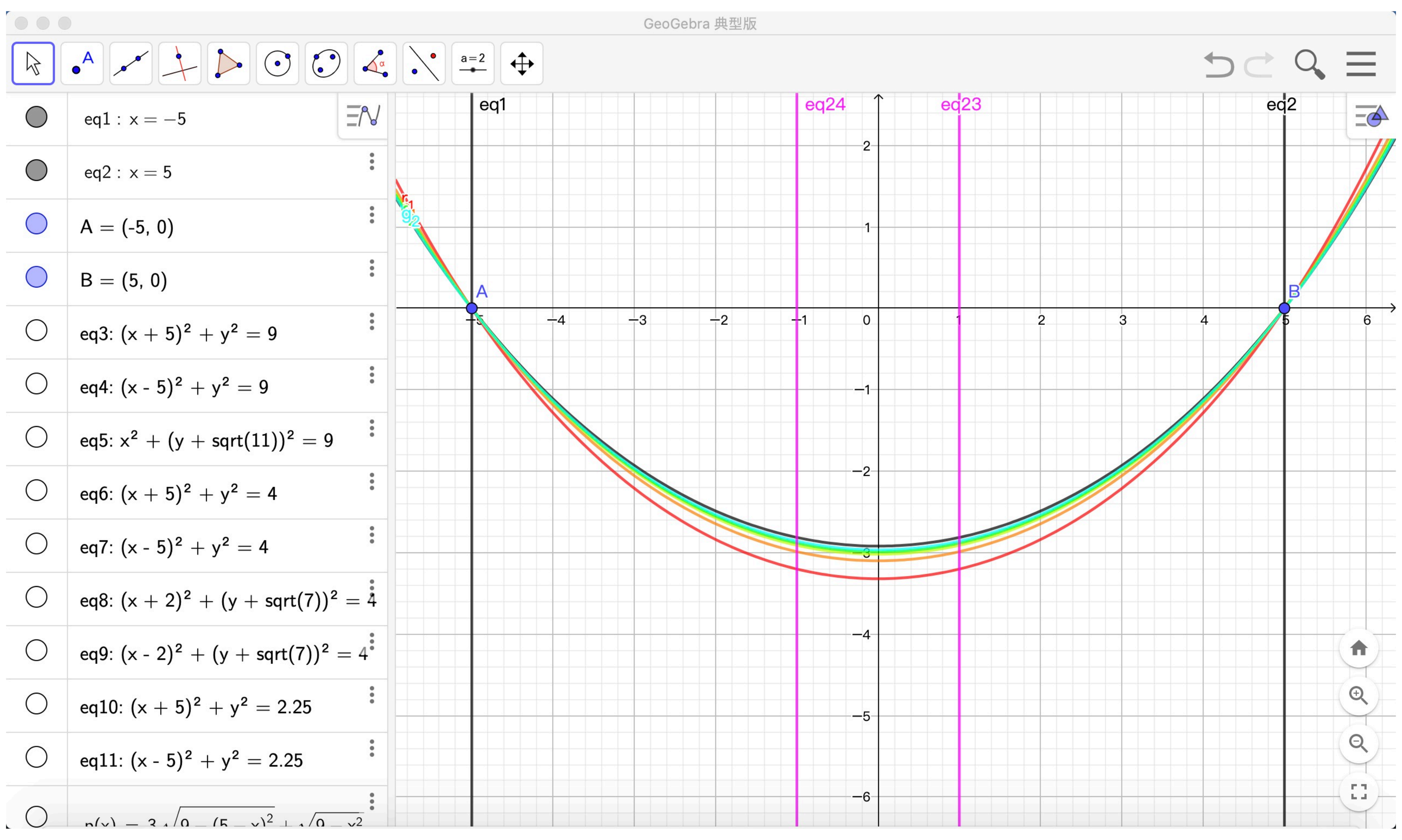
六個圓（綠，$y=4.61*\frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2}-7.6$）的情況



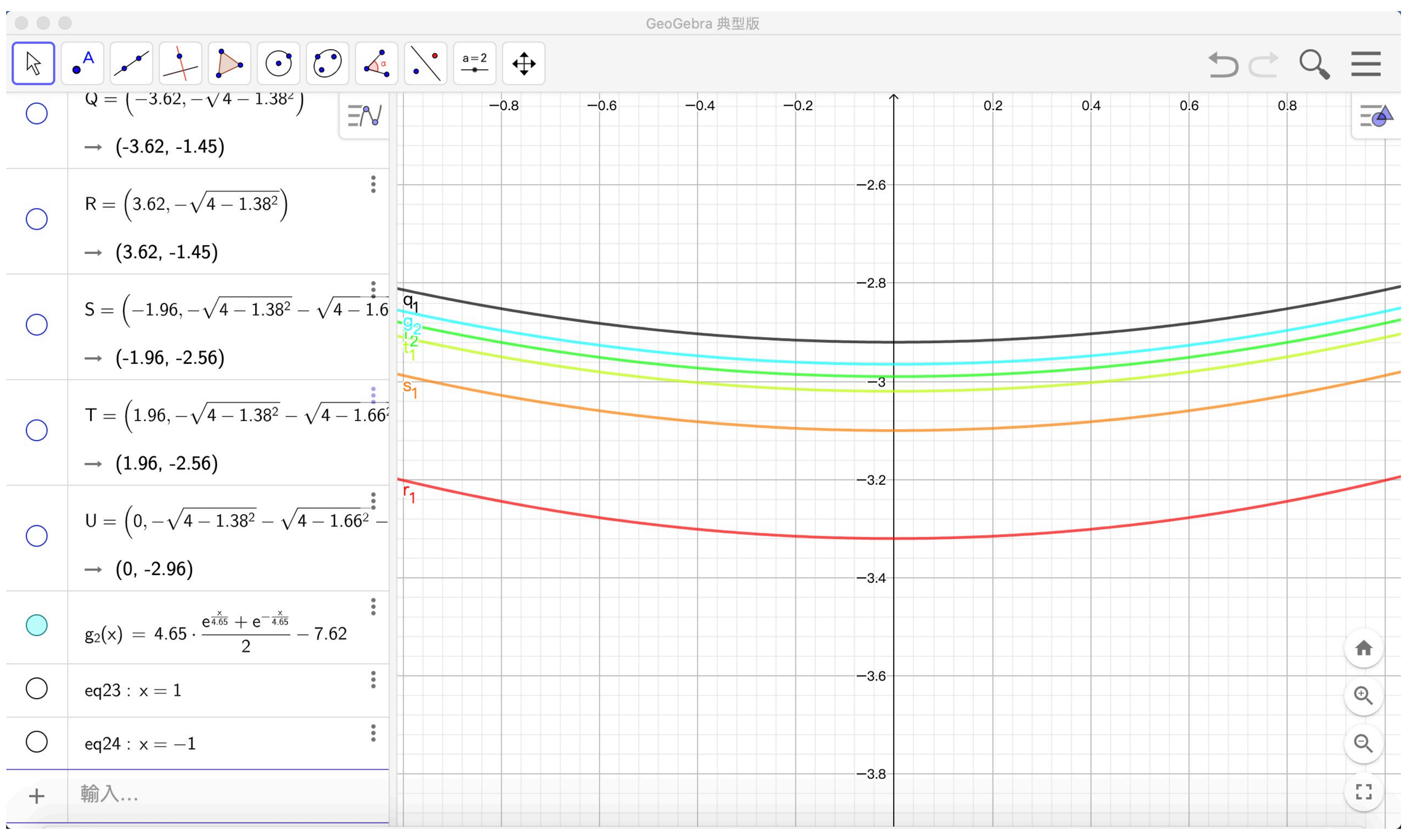
七個圓（靛青，$y=4.65*\frac{(e^{\frac{x}{4.57}}+e^{\frac{-x}{4.57}})}{2}-7.62$）的情況



圓越多的時候， 圓心連線越來越逼近某一條最終曲線



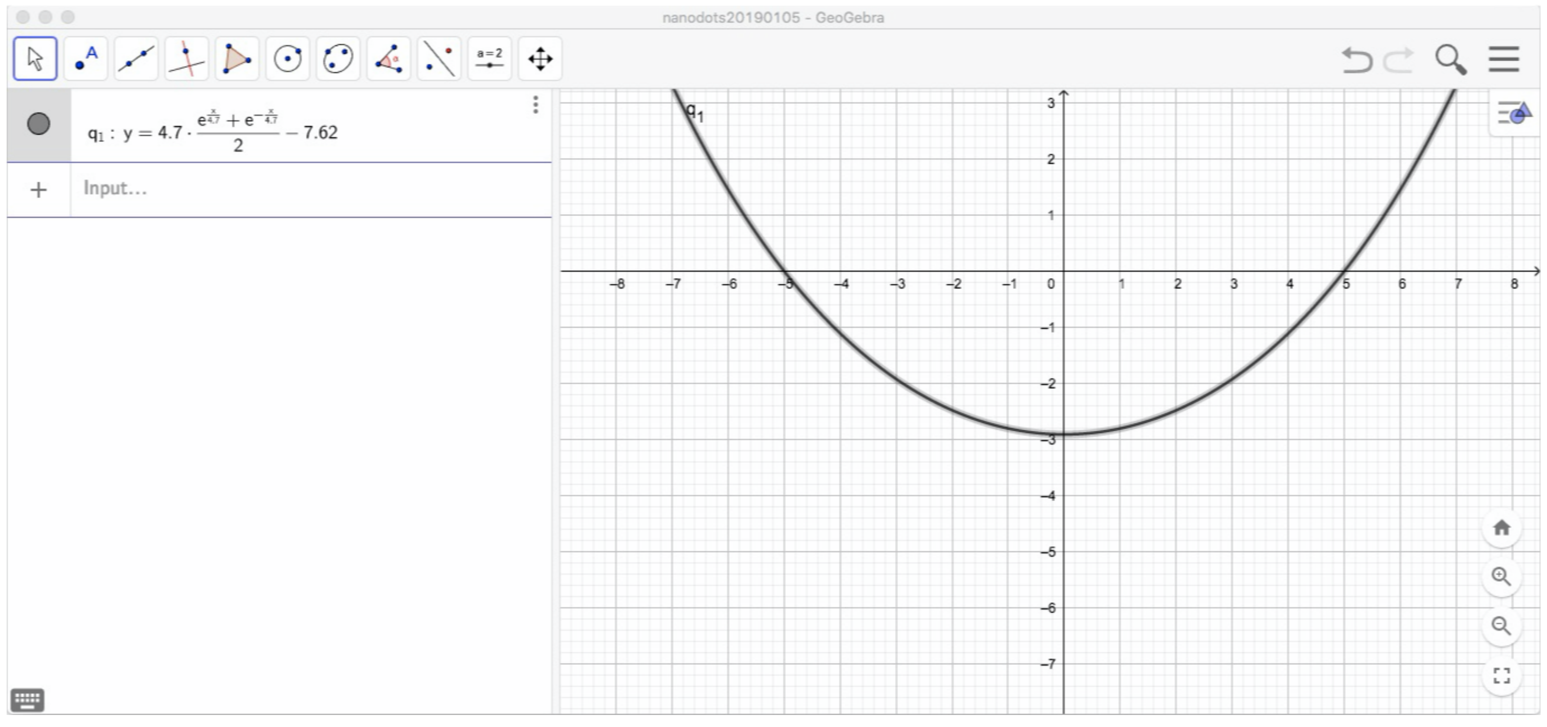
在上圖的粉紅色區間中，我將其放大，如下圖所示



最終的懸鍊線是如何製做出來的:(如右圖)

一. 做出懸鍊線的參數式。在這裡是$\left(t,\frac{a\left(e^{\frac{t}{a}}+e^{-\frac{t}{a}}\right)}{2}+b\right)$。

二. 將參數式代入曲線弧長的公式，我在書上(微積分的倚天寶劍的第146~166頁)讀到說弧長公式為$\int\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$



[陸、討論]

透過電腦軟體協助，可以提升作圖的速度及使步驟變得更加詳細，更可利用軟體的高速運算來驗證圖形本身的正確性，以資訊方法融入數學專題研究可以延伸學習廣度。在考慮磁力大小以及球的重量的情況下，這條鍊子能撐住幾顆球而不斷裂？ 萬一球的大小並不是每一顆都相同，而是有大有小，鍊子的形狀會產生什麼改變？假設固定其他的數值，例如球的半徑而不是「線長」呢？還有，再以更多的球串成鍊子，例如八個，九個，十個，或更多？這些都是有趣的問題，非常值得探討研究。

[柒、結論]

我已經表示出科學玩具”nanodots”與數學曲線「懸鍊線」(Catenary)的關聯:我以相接的圓圖示出懸鍊線的形狀，並且發現在七個圓時就提供了一個滿意的結果。除此之外，這個研究也提供了一種以生活物件逼近函數的方式，讓我對數學有更佳的理解。希望以後也可以發現以其他物件逼近懸鍊線的方法。

[捌、參考資料]

1. Catenary—from Wolfram MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html
2. 微積分的倚天寶劍的第146~166頁(天下文化出版社)
3. 昌爸工作坊：http://www.mathland.idv.tw/fun/catenary.htm
4. kiwi的物理教室：http://kiwiphysics.blogspot.com/2014/02/blog-post.html
5. 高雄中學數學科 蔡哲淵老師 方程式的公式解(根式解)：http://web.kshs.kh.edu.tw/math/research/equation的公式解.pdf
6. WolframAlpha：https://www.wolframalpha.com
7. QuickMath：http://www.quickmath.com