中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030409

當拿破崙形不「正」作不「直」時

學校名稱：桃園市立中壢國民中學

作者：	指導老師：
國二 呂昱賢	蔡牧航 陳威成

關鍵詞：拿破崙定理、重心、相似

摘要

以類似拿破崙定理的方式，先作一個任意三角形，在三邊各作一個與原三角形相似的三角形，再把三個相似三角形的重心連線，成為新三角形，探討原三角形與新三角形在重心方面的關聯。
三邊所做的三角形依照方向分為順時針旋轉、逆時針旋轉、180°旋轉以及不旋轉，依照三角形位置分為向內作圖及向外作圖，比較各種情況的異同，並試圖分析影響重心相對位置的因素。

壹、研究動機

在瀏覽過去的科展作品時，無意間看到拿破崙定理，覺得原理很特別，難道拿破崙定理的三邊只能作正三角形，不能作其他圖形嗎?其關連又是什麼?

貳、研究目的

一、將拿破崙定理中的三邊作向外和向內正三角形替換為與$30° - 60° - 90°$直角三角形時的情況
二、三角形的三邊以順時針旋轉、逆時針旋轉及180°旋轉向外和向內作與原三角形相似的三角形時的比較
三、三角形的三邊以順時針旋轉、逆時針旋轉及180°旋轉向外和向內作與原三角形不相似的任意三角形，但三邊的三角形互相相似的比較

參、研究設備及器材

GGB 繪圖軟體、電腦

肆、研究過程或方法

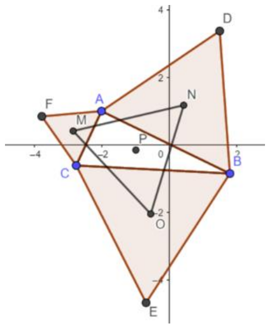
參考過去科展與拿破崙定理相關的科展作品之重點摘要

作品名稱	作者	摘要
拿破崙的四角戀－將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討	國二許翰翔	(1)對象：特定四邊形(平行四邊形、等腰梯形、菱形、矩形、鳶形) (2)構造法：原四邊形的邊向外或向內作相似三角形及特殊四邊形
拿破崙三角形與畢氏定理的聯想	國三陳致安 國三朱建威 國三陳揚叡	(1) 對象:任意三角形 (2) 構造法:以原三角形三邊向外(內)作半圓，取特定圓心角，而得外切三角形

(續下頁)

作品名稱	作者	摘要
拿破崙定理對多邊形之推廣	高一黃家冠	(1)對象:任意 n 邊形 (2)構造法:n 邊形各邊向外作正 n 邊形
從零開始 -初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討	國二徐啓惇 國二楊宗諺 國二吳承諺	(1) 對象:n 邊形 (2) 構造法:以各邊分別向外作正 n 邊形連接相鄰兩正 n 邊形中心，形成一個新的 n 邊形

●拿破崙定理：任意三角形，以三邊各作一個正三角形，把三個正三角形的重心連線，必成為一個新正三角形，且新正三角形的重心會與原正三角形的重心重合，如下圖。



在原拿破崙定理中三邊向外作正三角形，如果向外作與原三角形相似的三角形會如何?為了方便計算，先以原三角形為$30° - 60° - 90°$直角三角形作同方向的三角形，發現向外作的三角形重心連線，得到的三角形中心皆與原重心重合。如圖 1，可是在中文文獻中找不到相關的資料，但在

https://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html

這一篇拿破崙定理的介紹中，中有提到向外作相似三角形對應點連線也為相似三角形，但沒有提到重心的相關變化不過這篇文獻中所作的相似三角形必須依序旋轉。

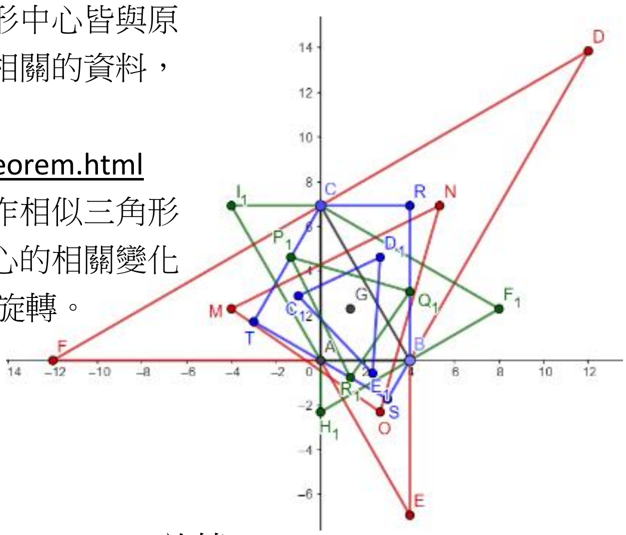
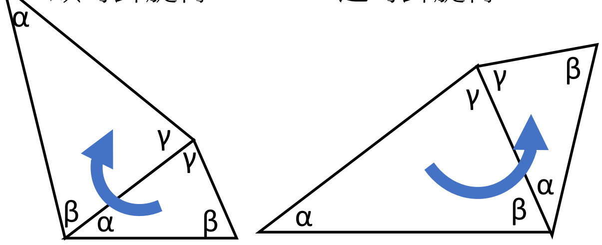
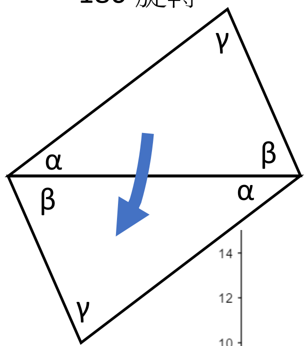


圖 1

為了使用需求，先定義旋轉方式及名稱：

順時針旋轉　　逆時針旋轉　　180 旋轉





一、向外作順時針、逆時針和旋轉180°的圖

(一) 順時針旋轉(圖1-1)：

以 B 點為中心以順時針旋轉，因為要與$\triangle ABC$相似，比例以$\overline{AB}/\overline{BC}$放大得點$A_1$，以 C 點為中心順時針旋轉，比例以$\overline{BC}/\overline{AC}$縮小得點$B_1$。以 A 點為中心順時針旋轉，比例以$\overline{AC}/\overline{AB}$縮小得點$C_1$。

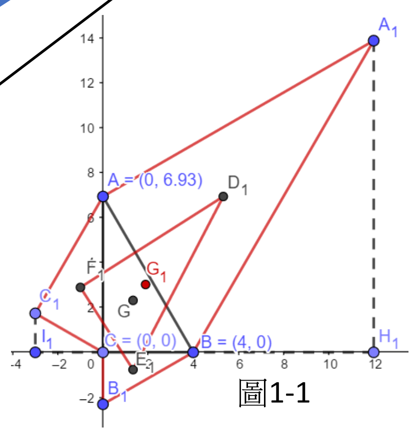


圖1-1

找出△ AA_1B、△ CBB_1、△ ACC_1的重心D_1、E_1、F_1，並且連線得△ $D_1E_1F_1$。

(1) 由$\overline{AB}$=8，可得$\overline{A_1B}$=16，又$\angle A_1BH_1 = 180° - 60° \times 2 = 60°$，可知△ A_1H_1B

也是30°60°90°的三角形，故$\overline{BH_1}$= 8，$\overline{A_1H_1} = 8\sqrt{3}$，可推得$A_1(12，8\sqrt{3})$，

所以△ AA_1B的重心$D_1(\frac{0+12+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+8\sqrt{3}+0}{3}) =(\frac{16}{3}，4\sqrt{3})$。

(2) 由$\overline{BC}$=4，得$\overline{B_1C} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$推得$B_1(0，\frac{-4}{3}\sqrt{3})$，所以△ CBB_1的重心$E_1(\frac{4}{3}，\frac{-4}{9}\sqrt{3})$。

(3) 因為$\overline{AC}$為4√3，所以$\overline{CC_1}$為2√3單位長，又$\angle C_1CI_1 = 180° - 90° - 30° = 30°$，

推得△ C_1CI_1是30°60°90°的三角形，$\overline{CI_1} = 3$，$\overline{C_1I_1} = \sqrt{3}$，所以$C_1(-3，\sqrt{3})$，

推得$F_1(-1，\frac{5}{3}\sqrt{3})$。

(4)△ $D_1E_1F_1$的重心為$G_1(\frac{-1+\frac{16}{3}+\frac{4}{3}}{3}，\frac{\frac{5}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\frac{-4}{9}\sqrt{3}}{3}) =(\frac{17}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$。

$\overline{D_1E_1}:\overline{E_1F_1}:\overline{D_1F_1}$

$$= \sqrt{\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}) - \frac{-4}{9}\sqrt{3}\right)^2} : \sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{-4}{9}\sqrt{3} - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2} : \sqrt{\left(-1-\frac{16}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\right)^2}$$

$=2:1:\sqrt{3}$，的確也是30°60°90°直角三角形。

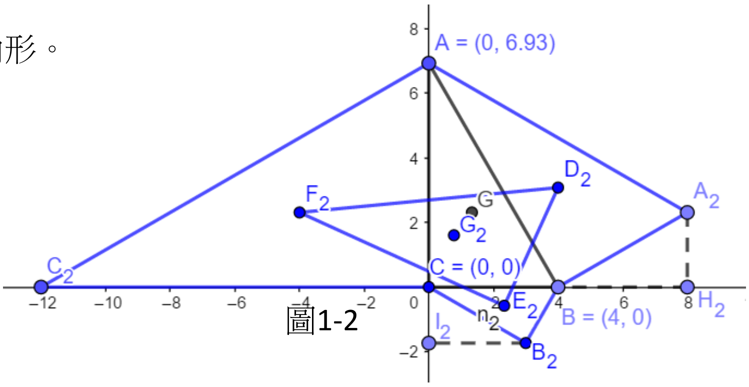


圖1-2

(二) 運用相同方法以逆時針的方式作圖(圖1-2)，以 A 點為中心逆時針旋轉，因為要與△ ABC相似，比例以放大$\overline{BC}/\overline{AC}$得點$A_2$，以點 B 為中心逆時針旋轉，比例以$\overline{BC}/\overline{AB}$縮小得點$B_2$。以 C 點為中心逆時針旋轉，比例以$\overline{AC}/\overline{BC}$得點$C_2$。找出△ AA_2B、△ CBB_2、△ ACC_2的重心D_2、E_2、F_2，並且連線得△ $D_2E_2F_2$。

(1)由$\overline{AB} = 8$，所以$\overline{A_2B} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$，且△ A_2BH_2為30°60°90°的三角形，故

$\overline{A_2H_2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$，$\overline{BH_2} = 4$，可推得$A_2$ $(8，\frac{4}{3}\sqrt{3})$，所以△ AA_2B的重心

$D_2(\frac{0+8+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}+0}{3}) =(4，\frac{16}{9}\sqrt{3})$。

(2)由$\overline{BC}$=4，得$\overline{CB_2}=2\sqrt{3}$，且△$CB_2I_2$是30°60°90°的三角形，$\overline{CI_2}=\sqrt{3}$，$\overline{I_2B_2}=3$，

推得$B_2(3，-\sqrt{3})$，所以△CBB_2重心 $E_2(\frac{0+4+3}{3}，\frac{0+0-\sqrt{3}}{3})=(\frac{7}{3}，-\frac{1}{3}\sqrt{3})$。

(3)$\overline{AC}=4\sqrt{3}$，推得C_2 =(-12，0)，所以△ACC_2的重心

$F_2(\frac{0+0-12}{3}，\frac{4\sqrt{3}+0+0}{3})=(-4，\frac{4}{3}\sqrt{3})$。

(4)△$D_2E_2F_2$的重心為$G_2(\frac{4-4+\frac{7}{3}}{3}，\frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{16}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{3})=(\frac{7}{9}，\frac{25}{27}\sqrt{3})$。

△$D_2E_2F_2$的邊長比$\overline{D_2E_2}:\overline{E_2F_2}:\overline{D_2F_2}$也是2:1:$\sqrt{3}$，也是30°60°90°直角三角形。

(三) 原本的△ABC轉180°(圖1-3)，沒有順時針與逆時針的問題，也無改變邊長，找出△AA_3B、△CBB_3、△C_3AC的重心，點D_3、E_3、F_3，並且連線得△$D_3E_3F_3$，重心為G_3。

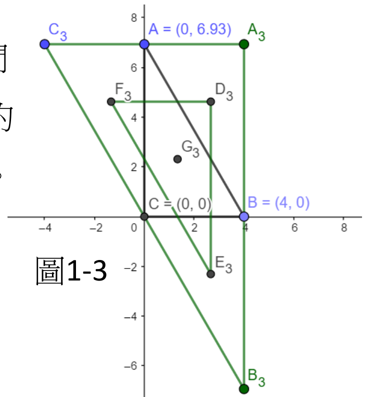


圖1-3

(1)$\overline{AB}=8$，$\overline{AA_3}=4$，$\overline{A_3B}=4\sqrt{3}$，$A_3(4，4\sqrt{3})$，所以

△AA_3B的重心D_3 $(\frac{0+4+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+0}{3})=(\frac{8}{3}，\frac{8}{3}\sqrt{3})$。

(2)同理，由$\overline{CB}=4$，$\overline{BB_3}=4\sqrt{3}$，$B_3(4，-4\sqrt{3})$，則△$CBB_3$的重心$E_3(\frac{8}{3}，-\frac{4}{3}\sqrt{3})$。

(3)同理，由$\overline{AC}=4\sqrt{3}$，$\overline{C_3A}=4$，$C_3(-4，4\sqrt{3})$，則△C_3AC的重心$F_3(-\frac{4}{3}，\frac{8}{3}\sqrt{3})$。

△$D_3E_3F_3$的重心$G_3\left(\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}}{3}，\frac{\frac{8}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$

與△ABC的重心位置一樣。

(四) 三張圖合併後(圖1-4)，發現順時針作圖得到的 $G_1(\frac{17}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$與逆時針作圖得到的 $G_2(\frac{7}{9}，\frac{25}{27}\sqrt{3})$，中點座標$(\frac{\frac{17}{9}+\frac{7}{9}}{2}，\frac{\frac{47}{27}\sqrt{3}+\frac{25}{27}\sqrt{3}}{2})=(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3})$恰好為原本△ABC 的重心 $G(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3})$，順時針、逆時針和旋轉180°三張圖的重心 G_1、G_2、G_3，是一直線且成等距離。

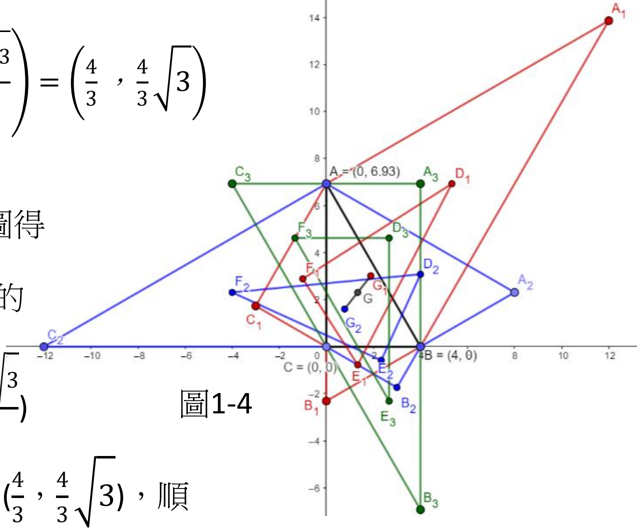


圖1-4

因為相似圖形包含鏡像翻轉，所以有其他三種可能。

(五) 這是順時針旋轉作圖，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖1-5)，

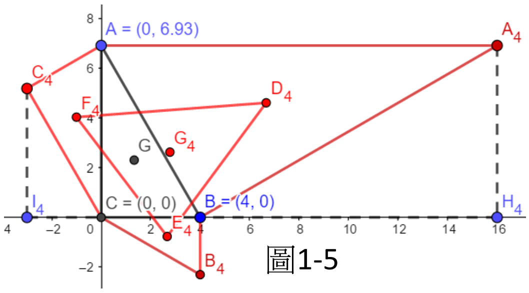


圖1-5

(1) 由$\overline{AB}$=8，可得$\overline{A_4B}$=8$\sqrt{3}$，而△A_4H_4B也是30°60°90°的三角形，故$\overline{A_4H_4}$=4$\sqrt{3}$，$\overline{BH_4}=12$，可得$A_4(16，4\sqrt{3})$，所以△AA_4B的重心$D_4(\frac{0+16+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+0}{3})=(\frac{20}{3}，\frac{8}{3}\sqrt{3})$。

(2) 由$\overline{BC}$=4，，$\overline{BB_4}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$推得$B_4(4，\frac{-4}{3}\sqrt{3})$，所以$E_4(\frac{8}{3}，\frac{-4}{9}\sqrt{3})$。

(3) 因$\overline{AC}$=4√3，$\overline{C_4C}=6$，又$\angle C_4CI_4=180°-60°\times 2=60°$，推得△$C_4CI_4$是30°60°90°的三角形，$\overline{CI_4}=3$，$\overline{C_4I_4}=3\sqrt{3}$，所以$C_4(-3，3\sqrt{3})$，推得$F_4(-1，\frac{7}{3}\sqrt{3})$。

(4) △$D_4E_4F_4$的重心為$G_4(\frac{-1+\frac{8}{3}+\frac{20}{3}}{3}，\frac{\frac{7}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\frac{-4}{9}\sqrt{3}}{3})=(\frac{25}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$。

(六) 這是逆時針旋轉作圖，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖1-6)，

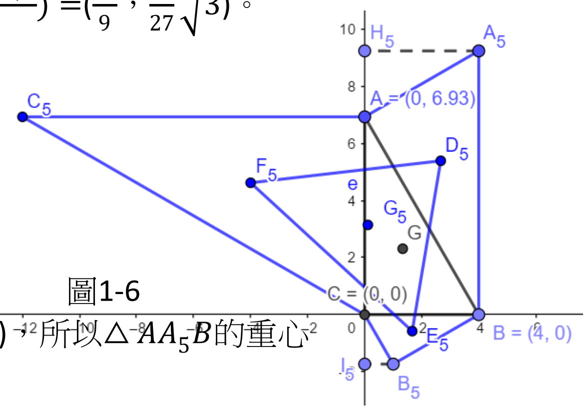


圖1-6

(1)由$\overline{AB}=8$，可得$\overline{AA_5}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$，

△H_5A_5A也是30°60°90°的三角形，故

$\overline{H_5A_5}$=4，$\overline{H_5A}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，可推得$A_5(4，\frac{16}{3}\sqrt{3})$，所以△$AA_5B$的重心$D_5(\frac{0+4+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+\frac{16}{3}\sqrt{3}+0}{3})=(\frac{8}{3}，\frac{28}{9}\sqrt{3})$。

(2)由$\overline{BC}$=4，所以$\overline{CB_5}=2$，$\overline{I_5B_5}=1$，$\overline{CI_5}=\sqrt{3}$，$B_5(1，-\sqrt{3})$，所以$E_5(\frac{5}{3}，\frac{-1}{3}\sqrt{3})$。

(3)由$\overline{AC}$=4$\sqrt{3}$，$\overline{C_5A}=12$推得$C_5(-12，4\sqrt{3})$，所以$F_5(-4，\frac{8}{3}\sqrt{3})$。

(4)△$D_5E_5F_5$的重心為$G_5(\frac{1}{9}，\frac{49}{27}\sqrt{3})$。

(七) 原本的△ABC轉180°後鏡像旋轉(圖1-7)，沒有順時針與逆時針的問題，也無改變邊長，找出△AA_6B、△CBB_6、△C_6AC的重心，點D_6、E_6、F_6，並且連線得△$D_6E_6F_6$，重心為G_6。

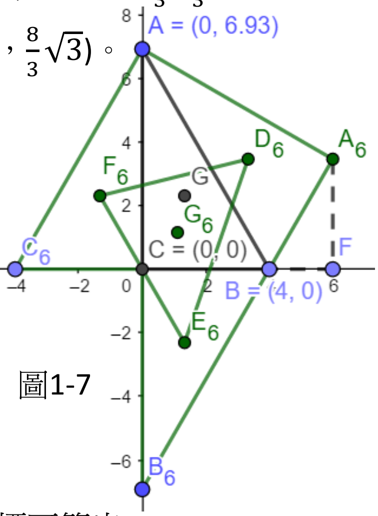


圖1-7

(1)$\overline{AB}=8$，$\overline{A_6B}=4$，$\overline{BF}=2$，$\overline{A_6F}=2\sqrt{3}$，

所以$A_6(6，2\sqrt{3})$，△AA_6B的重心由A、A_6、B三點座標可算出

$D_6(\frac{0+6+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+0}{3})=(\frac{10}{3}，2\sqrt{3})$。

(2)$\overline{CB}=4$，$\overline{CB_6}=4\sqrt{3}$，$B_6(0，-4\sqrt{3})$，所以$\triangle CBB_3$的重心$E_6(\frac{4}{3}，-\frac{4}{3}\sqrt{3})$。

(3)$\overline{AC}=4\sqrt{3}$，$\overline{C_6C}=4$，$C_6(-4，0)$，所以$\triangle C_6AC$的重心$F_6(-\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3})$。

(4)$\triangle D_6E_6F_6$的重心為$G_6(\frac{10}{9}，\frac{2}{3}\sqrt{3})$

(八) 三張圖合併後(圖1-8)，發現順時針鏡像作圖得到的$G_4(\frac{25}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$與逆時針鏡像作圖得到的$G_5(\frac{1}{9}，\frac{49}{27}\sqrt{3})$，以及旋轉180°鏡像作圖得到的$G_6(\frac{10}{9}，\frac{2}{3}\sqrt{3})$，三點連線得△$G_4G_5G_6$，△$G_4G_5G_6$的重心恰好為原本△ABC 的重心 G($\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}\sqrt{3}$)。

$$G\left(\frac{\frac{25}{9}+\frac{1}{9}+\frac{10}{9}}{3}，\frac{\frac{47}{27}\sqrt{3}+\frac{49}{27}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\frac{36}{9}}{3}，\frac{\frac{108}{27}}{3}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

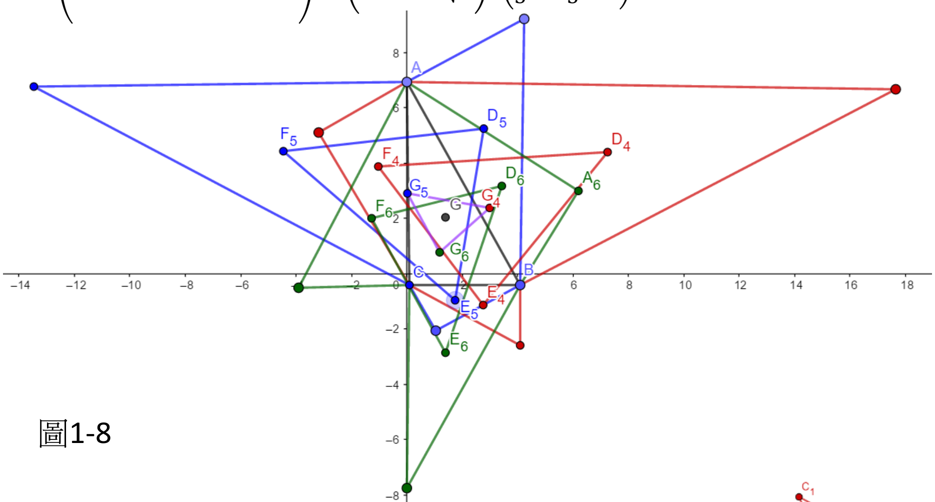


圖1-8

二、由30°60°90°的直角三角形的結論，推廣到任意三角形，將結果一般化。作法如下：

(一) 以 B 點為中心以順時針旋轉，因為要與$\triangle ABC$相似，比例以 AB/BC 放大得點A_1，以 C 點為中心順時針旋轉，比例以 BC/AC 縮小得點B_1。以 A 點為中心順時針旋轉，比例以 AC/AB 縮小得點C_1。

找出$\triangle AA_1B$、$\triangle CBB_1$、$\triangle ACC_1$的重心，點D_1、E_1、F_1，並且連線得$\triangle D_1E_1F_1$。

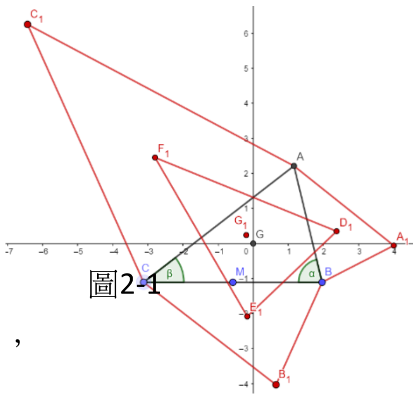
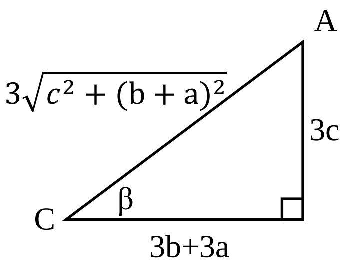
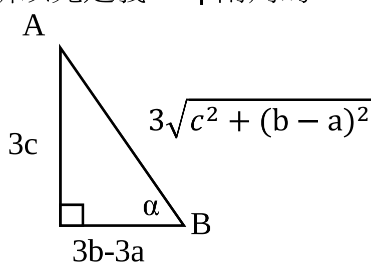


圖2-1

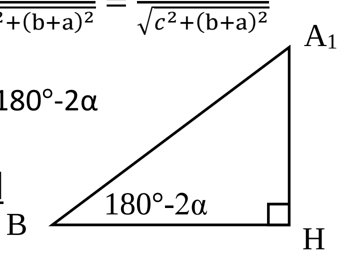
為了計算方便，假設$\triangle ABC$的重心 G 為(0，0)，A(2a，2c)、M(-a，-c)、B(-a+3b，-c)、C(-a-3b，-c)。計算過程會用到三角函數，所以先定義α、β兩角的sin 、cos　函數值。





$$\sin\alpha=\frac{3c}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}，\sin\beta=\frac{3c}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{3b-3a}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}，\cos\beta=\frac{3b+3a}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}=\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}$$



(1)因為順時針旋轉(圖2-1)，$\angle \mathrm{AB}A_1=\angle\alpha$，$\angle A_1\mathrm{BH}=$180°-2α

$$\overline{A_1B}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{6b}=\frac{3[c^2+(\mathrm{b-a})^2]}{2b}$$

$$\sin(180°-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{2c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=\frac{2c(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$$

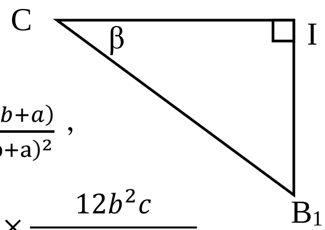
$$\cos(180°-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=-1+\frac{2c^2}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}=\frac{c^2-(\mathrm{b-a})^2}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$$

$$A_1\left(\overline{A_1B}\times\cos(180°-2\alpha)+(-a+3b)\ ，\overline{A_1B}\times\sin(180°-2\alpha)+(-c)\right)$$

$$=\left(\frac{3[c^2+(\mathrm{b-a})^2]}{2b}\times\frac{c^2-(\mathrm{b-a})^2}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}+(-a+3b)\ ，\frac{3[c^2+(\mathrm{b-a})^2]}{2b}\times\frac{2c(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}+(-c)\right)$$

$$=\left((-a+3b)+\frac{3(c^2-(\mathrm{b-a})^2)}{2b}\ ，(-c)+\frac{3c(b-a)}{b}\right)$$

$$D_1=\left(\frac{2a+\frac{3(c^2-(\mathrm{b-a})^2)}{2b}+(-a+3b)+(-a+3b)}{3}\ ，\frac{2c+\frac{3c(b-a)}{b}+(-c)+(-c)}{3}\right)=\left(\frac{\frac{3(c^2-(\mathrm{b-a})^2)}{2b}+6b}{3}\ ，\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}\right)$$



(2)$\overline{BC}=6b\ ，\overline{CB_1}=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}$，

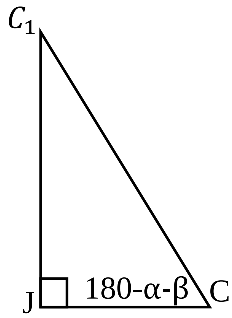
$$\overline{CI}=\overline{CB_1}\times\cos\beta=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}=\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}，$$

$$\overline{IB_1}=\overline{CB_1}\times\sin\beta=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\times\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}$$

$$B_1\left((-a-3b)+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}\ ，(-c)-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}\right)$$

$$E_1\left(\frac{(-a-3b)+(-a+3b)+(-a-3b)+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}\ ，\frac{(-c)+(-c)+(-c)-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}{3}\ ，\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}{3}\right)$$



(3)$\angle C_1\mathrm{CA}=\alpha$，$\angle C_1\mathrm{CJ}=$180°-α-β，$\overline{\mathrm{C_1C}}=6\mathrm{b}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}$

$$\overline{\mathrm{JC}}=\overline{\mathrm{C_1C}}\times\cos\big(180°-(\alpha+\beta)\big)=6\mathrm{b}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}\times(-\cos(\alpha+\beta))$$

$$=6\mathrm{b}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b+a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}\times-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times-\left(\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}-\frac{c}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\right)$$

$$=6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}$$

$$\overline{C_1J}=\overline{C_1C}\times\sin\big(180°-(\alpha+\beta)\big)=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\sin(\alpha+\beta)$$

$$=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$$=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}+\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\right)$$

$$=6b\times\frac{2cb}{c^2+(b-a)^2}$$

$$C_1\left((-a-3b)-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\text{，}(-c)+6b\times\frac{2cb}{c^2+(b-a)^2}\right)$$

$$F_1\left(\frac{2a+(-a-3b)+\left(-a-3b-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}\text{，}\frac{2c+(-c)+\left(-c+6b\times\frac{2cb}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-6b+\left(-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}\text{，}\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}\right)$$

(4)$\triangle D_1E_1F_1$的重心為G_1，

$$G_1\left(\frac{\frac{\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}+6b}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}\text{，}\frac{\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$$

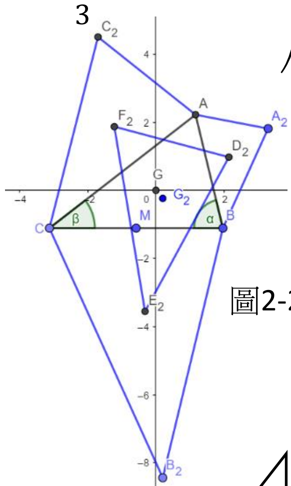
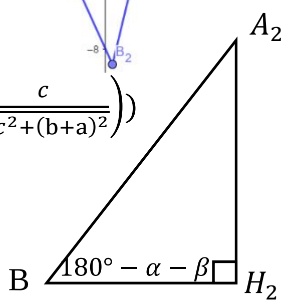


圖2-2

(二) 因為兩相似三角形共用的邊長不同，會影響到相似三角形的大小，第一次所作的圖形是用順時針方向旋轉作出，若是以逆時針方向旋轉，則又會得到不一樣大小的相似三角形，所以再以逆時針方向旋轉作一次(圖2-2)，找出$\triangle AA_2B$、$\triangle CBB_2$、
$\triangle ACC_2$的重心，點D_2、E_2、F_2，並且連線得$\triangle D_2E_2F_2$。

(1)$\overline{A_2B}=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}$，$\overline{BH_2}=\overline{A_2B}\times\cos(180°-\alpha-\beta)$



$$=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\times\left(-\left(\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}-\frac{c}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\right)\right)$$

$$=6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}$$

$$\overline{A_2H_2}=\overline{A_2B}\times\sin(180°-\alpha-\beta)$$

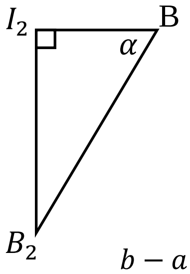
$$=6b\times\frac{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\times\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}+\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}\right)$$

$$= 6b \times \frac{2cb}{c^2 + (b+a)^2}$$

$$A_2\left((-a+3b) + 6b \times \frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}，(-c) + 6b \times \frac{2cb}{c^2+(b+a)^2}\right)$$

$$D_2\left(\frac{2a + (-a+3b) + 6b \times \frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2} + (-a+3b)}{3}，\frac{2c + (-c) + 6b \times \frac{2cb}{c^2+(b+a)^2} + (-c)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{6b + 6b \times \frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}，\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)$$

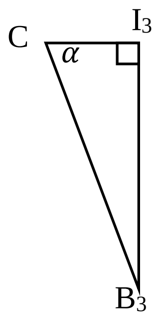


(2)$\overline{BB_2} = 6b \times \frac{6\mathrm{b}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}$，

$$\overline{I_2B} = \overline{BB_2} \times \cos\alpha = 6b \times \frac{6\mathrm{b}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}} \times \frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}} = \frac{12\mathrm{b}^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$$

$$\overline{I_2\mathrm{B}_2} = \overline{BB_2} \times \sin\alpha = 6b \times \frac{6\mathrm{b}}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}} \times \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}} = \frac{12\mathrm{b}^2\mathrm{c}}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$$

$$B_2\left((-a+3b) - \frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}，(-c) - \frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\right)，$$



$$E_2\left(\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}，\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}\right)$$

(3)$\overline{CC_2} = 3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2} \times \frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b}$，

$$\overline{CJ_2} = \overline{CC_2} \times \cos 2\beta$$

$$= 3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2} \times \frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b} \times (1 - 2\sin^2\beta) = \frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b} \times \left(1 - \frac{2c^2}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\right)$$

$$= \frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b} \times \frac{-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2} = \frac{3(-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b}$$

$$\overline{C_2J_2} = \overline{CC_2} \times \sin 2\beta = 3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2} \times \frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b} \times 2\sin\beta\cos\beta$$

$$= \frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b} \times \frac{2c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}} \times \frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}} = \frac{3c(b+a)}{b}$$

$$C_2\left(-a-3b+\frac{3(-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b}，-\mathrm{c}+\frac{3c(b+a)}{b}\right)，F_2\left(\frac{-6b+\frac{3(-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b}}{3}，\frac{\frac{3c(b+a)}{b}}{3}\right)，$$

$$G_2\left(\frac{\frac{6b+6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b}}{3}}{3}，\frac{\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{\frac{3c(b+a)}{b}}{3}}{3}\right)$$

(三)直接旋轉180°作圖(圖2-3)

(1)因為A_3與 A 是在同一條直線上，所以

$A_3(2a+6b，2\mathrm{c})$，$D_3\left(\frac{3a+9b}{3}，\frac{3c}{3}\right)$

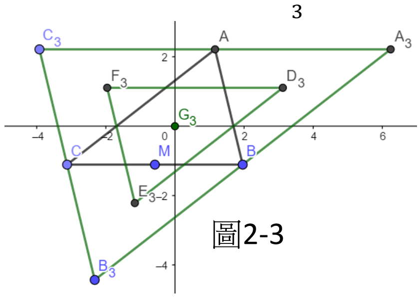


圖2-3

(2) $\overline{CB_3}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

$$\overline{CI_3}=\overline{CB_3}\times\cos\alpha=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}=3b-3a$$

$$\overline{B_3I_3}=\overline{CB_3}\times\sin\alpha=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}=3c，B_3(-4a，-4\mathrm{c})$$

$，E_3\left(\frac{-6a}{3}，\frac{-6c}{3}\right)$

(3)因為C_3與 A 是在同一條直線上，所以$C_3(2a-6b，2\mathrm{c})$，$F_3\left(\frac{3a-9b}{3}，\frac{3c}{3}\right)$

(4) $G_3\left(\frac{\frac{3a+9b}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{3a-9b}{3}}{3}，\frac{\frac{3c}{3}+\frac{-6c}{3}+\frac{3c}{3}}{3}\right)=(0，0)$

(四) 三張圖合在一起比較(圖2-4)，發現G_1與G_2的中點和△ABC的重心G恰好位置一樣，旋轉180°作圖得到的重心G_3，與G是同一點。

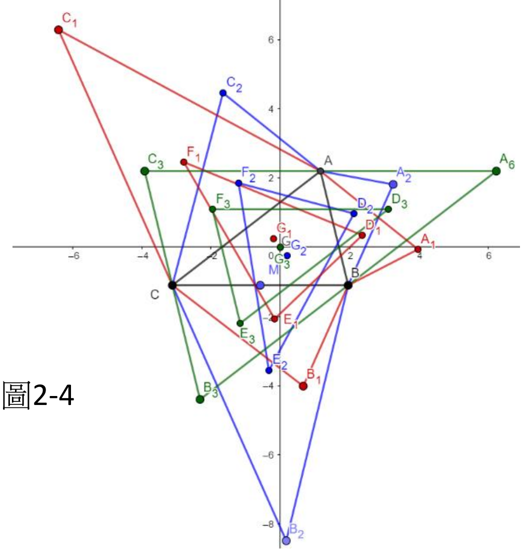


圖2-4

$$\frac{G_1+G_2}{2}$$

$$=\left(\frac{\frac{\frac{\frac{3(c^2-(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{2b}+6b}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-6b+\left(-6\mathrm{b}\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\right)}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(-c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{2b}}{3}}{3}}{2},\right.$$

$$\left.\frac{\frac{\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{\frac{3c(b+a)}{b}}{3}}{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{3(c^2-(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{2b}+\frac{3((b+a)^2-c^2)}{2b}-6a+6b\left(\frac{b^2-a^2-c^2-2b^2+2ab}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\right)+6b\left(\frac{-b^2+a^2+c^2+2b^2+2ab}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\right)}{18},\right.$$

$$\left.\frac{\frac{3c(b-a)}{b}+\frac{3c(b+a)}{b}-6c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}+\frac{12cb^2}{c^2+(b+a)^2}+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{18}\right)=(0，0)$$

(五) 相似三角形順時針旋轉，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖2-5)

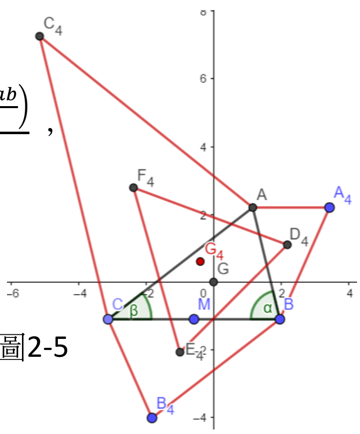
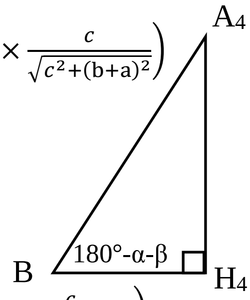


圖2-5

(1) $\overline{A_4B}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{6b}$，$\overline{BH_4}=\overline{A_4B}\times\cos(180°-\alpha-\beta)$



$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{6b}\times-\left(\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}-\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\right)$

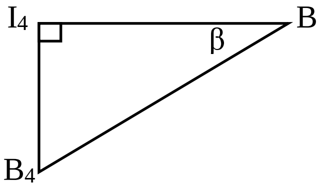
$=\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}$

$\overline{A_4H_4}=\overline{A_4B}\times\sin(180°-\alpha-\beta)$

$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{6b}\times\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}+\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\right)=3c$

$A_4\left(-a+3b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}\ ,\ 2\mathrm{c}\right)$，$D_4\left(\frac{6b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}\ ,\ \mathrm{c}\right)$

(2) $\overline{BB_4}=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}$，

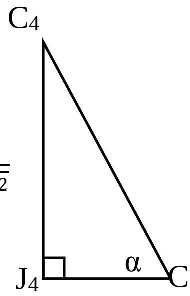


$\overline{I_4B}=\overline{BB_4}\times\cos\beta=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}=\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}$

$\overline{I_4B_4}=\overline{BB_4}\times\sin\beta=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}=\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}$

$B_4\left(-a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\ ,\ -\mathrm{c}-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\right)$，$E_4\left(\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}\ ,\ \frac{-3\mathrm{c}-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}\right)$

(3) $\overline{C_4C}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}$，



$\overline{J_4C}=\overline{C_4C}\times\cos\alpha$

$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}$

$=\frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

$\overline{C_4J_4}=\overline{C_4C}\times\sin\alpha$

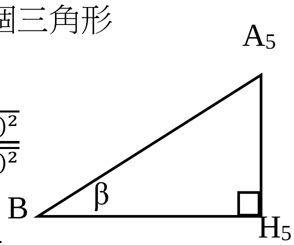
$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}=\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

$C_4\left(-a-3b-\frac{3(c^2+(b+a)^2)(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\ ,\ -\mathrm{c}+\frac{3c(c^2+(b+a)^2)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\right)$，

$F_4\left(\frac{-6b-\frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}\ ,\ \frac{\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}\right)$。

(4) $G_4\left(\frac{\frac{6b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{3(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}}{3}\ ,\ \frac{3\mathrm{c}+\frac{-3\mathrm{c}-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}\frac{\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}}{3}\right)$

(六) 相似三角形逆時針旋轉，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖2-6)



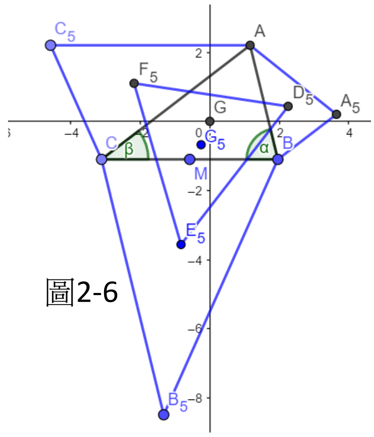


圖2-6

(1)$\overline{A_5B}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}$

$\overline{BH_5}=\overline{A_5B}\times\cos\beta$

$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}$

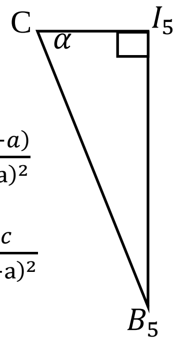
$=\frac{3(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}$

$\overline{A_5H_5}=\overline{A_5B}\times\sin\beta=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}=\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}$

$A_5\left(-a+3b+\frac{3(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}，-\mathrm{c}+\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}\right)$，

$D_5\left(\frac{6b+\frac{3(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}，\frac{\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}\right)$。

(2)$\overline{CB_5}=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}$

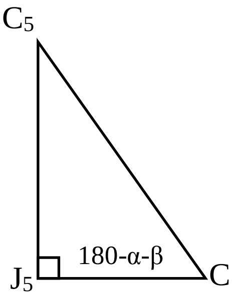


$\overline{CI_5}=\overline{CB_5}\times\cos\alpha=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}=\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

$\overline{I_5B_5}=\overline{CB_5}\times\sin\alpha=6b\times\frac{6b}{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}=\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}$

$B_5\left(-a-3b+\frac{12b^2(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}，-\mathrm{c}-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\right)$，

$E_5\left(\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}，\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}\right)$。



(3)$\overline{C_5C}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b}$

$\overline{J_5C}=\overline{C_5C}\times\cos(180-\alpha-\beta)$

$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b}\times-\left(\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}-\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\right)=\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}$

$\overline{C_5J_5}=\overline{C_5C}\times\sin(180-\alpha-\beta)$

$=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{6b}\times\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}+\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}\right)=3c$

$C_5\left(-a-3b-\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}，2\mathrm{c}\right)$，$F_5\left(\frac{-6b-\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}，c\right)$

(4)$G_5\left(\frac{\frac{6b+\frac{3(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)(b+a)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}}{3}，\frac{\frac{\frac{3c(c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2)}{c^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}}{3}+c}{3}\right)$

(七)相似三角形旋轉180°，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖2-7)

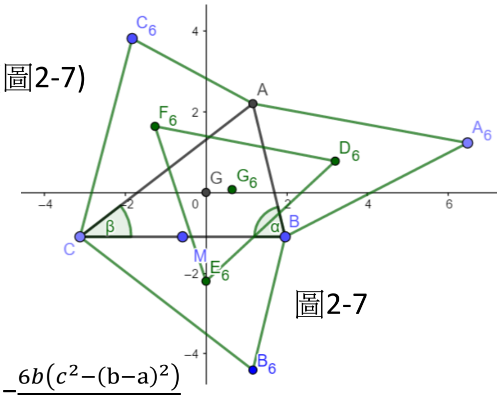
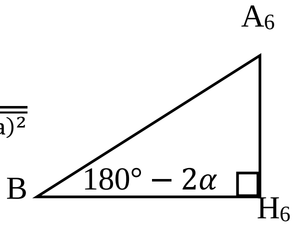


圖2-7

(1)$\overline{A_6B}=6b$



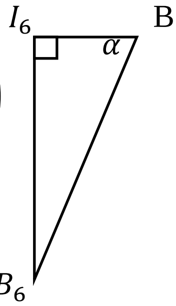
$\overline{BH_6}=\overline{A_6B}\times\cos(180°-2\alpha)$

$=6b\times\frac{2c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}$

$=\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$

$\overline{A_6H_6}=\overline{A_6B}\times\sin(180°-2\alpha)=6b\times\left(-1+\frac{2c^2}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\right)=\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$

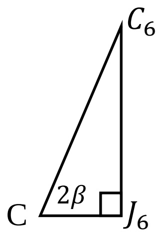
$A_6\left(-a+3b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\text{ , }-\mathrm{c}+\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\right)$，$D_6\left(\frac{6b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}\text{ , }\frac{\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}\right)$



(2)$\overline{BB_6}=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$

$\overline{I_2B}=\overline{BB_6}\times\cos\alpha=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=3(b-a)$

$\overline{I_6B_6}=\overline{BB_6}\times\sin\alpha=3\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\times\frac{c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=3c$，$B_6(2a\text{ , }-4\mathrm{c})$，$E_6(0\text{ , }-2\mathrm{c})$



(3) $\overline{C_6C}=6b$，$\overline{CJ_6}=\overline{C_6C}\times\cos2\beta=6b\times\left(-1+\frac{2c^2}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\right)=\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$，

$\overline{C_6J_6}=\overline{C_6C}\times\sin2\beta=6b\times\frac{2c}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}\times\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}=\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}$，

$C_6\left(-a-3b+\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\text{ , }-\mathrm{c}+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}\right)$，$F_6\left(\frac{-6b+\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}\text{ , }\frac{\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}\right)$

(4)$G_6\left(\frac{\frac{6b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}+0+\frac{-6b+\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}}{3}\text{ , }\frac{\frac{\frac{6b\left(c^2-(\mathrm{b-a})^2\right)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}+-2\mathrm{c}+\frac{\frac{12bc(b-a)}{c^2+(\mathrm{b-a})^2}}{3}}{3}\right)$

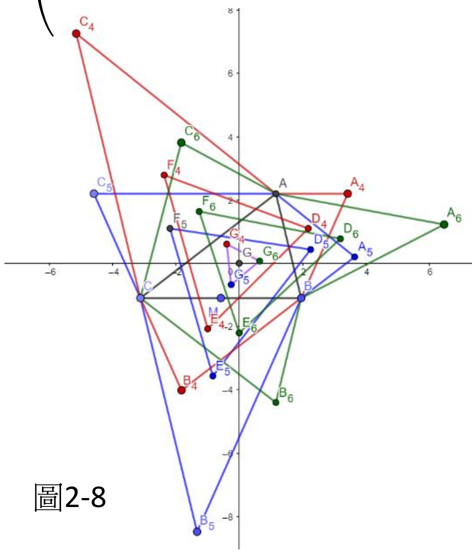


圖2-8

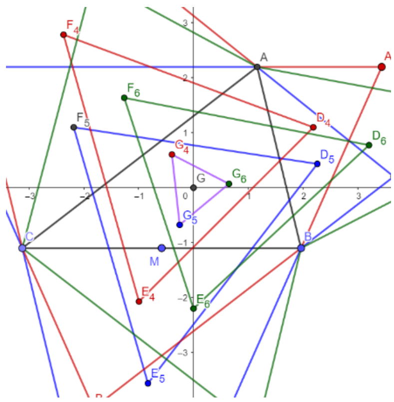


圖2-9

(八)把三張圖合併觀察(圖2-8、圖2-9)，發現順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉與轉180°鏡像旋轉得到的重心G_4、G_5、G_6連線得到的△$G_4G_5G_6$的重心與△ABC的重心位置一樣。

$$\frac{G_4+G_5+G_6}{3}=\left(\frac{\frac{\frac{6b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{3(c^2+(b+a)^2)(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{3(c^2+(b-a)^2)(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-6b+\frac{6b(c^2-(b-a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}}{3},\right.$$

$$\left.\frac{\frac{3c+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c\left(c^2+(b+a)^2\right)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c\left(c^2+(b-a)^2\right)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+c}{3}+\frac{\frac{\frac{6b\left(c^2-(b-a)^2\right)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+-2c+\frac{\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}}{3}\right)=(0，0)$$

三、 在拿破崙定理中也可以向內作圖，在原拿破崙定理中，各邊向內作一個正三角形，其三個正三角形的重心連線，得到的正三角形的重心與原三角形的重心位置一樣。

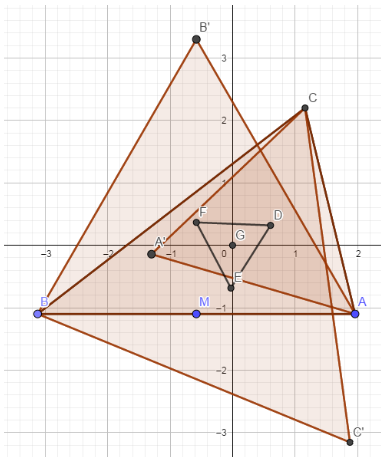


圖3-1

任意三角形各邊向內作相似三角形，分順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°作圖。

(一)順時針旋轉向內作圖(圖3-2)

$$A_8\left(-a+3b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}，-c+\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}\right)，$$

$$D_8\left(\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}，\frac{\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)，$$

$$B_8\left(-a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}，-c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}\right)，$$

$$E_8\left(\frac{-3a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}，\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}\right)，$$

$$C_8\left(-a-3b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}，-c-\frac{3ac}{b}\right)，$$

$$F_8\left(\frac{-6b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}，\frac{-\frac{3ac}{b}}{3}\right)，$$

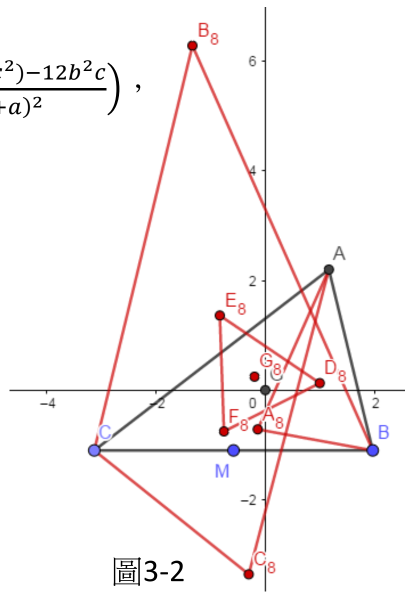


圖3-2

$$G_8\left(\frac{\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}}{3}，\frac{\frac{\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-\frac{3ac}{b}}{3}}{3}\right)$$

(二)逆時針旋轉向內作圖(圖3-3)

$$A_7\left(-a+3b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}\ ,\ -c+\frac{3ac}{b}\right),\ D_7\left(\frac{6b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}\ ,\ \frac{\frac{3ac}{b}}{3}\right)$$

$$B_7\left(-a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}\ ,\ -c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}\right),\ E_7\left(\frac{-3a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}\ ,\ \frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)$$

$$C_7\left(-a+3b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)\ ,\ -c-\frac{3c((c^2+(b-a)^2)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}\right),$$

$$F_7\left(\frac{-6b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}\ ,\ \frac{\frac{3c((c^2+(b-a)^2)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}\right)$$

$$G_7\left(\frac{\frac{6b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}\ ,\ \frac{\frac{\frac{3ac}{b}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c((c^2+(b-a)^2)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$$

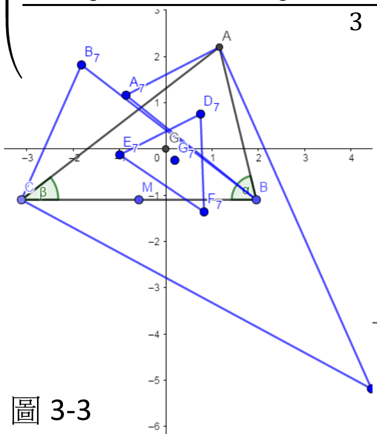


圖 3-3

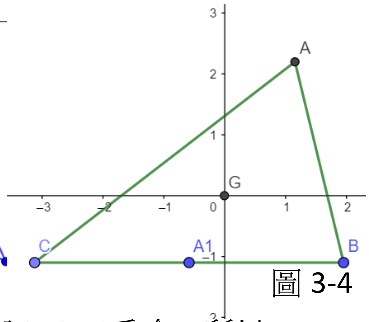


圖 3-4

(三) 旋轉180°向內作圖，會完全與△ ABC重合，所以
重心是同一點(圖3-4)

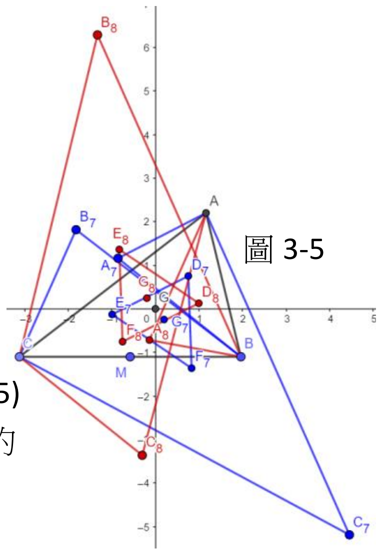


圖 3-5

(四) 將順時針旋轉向內作圖與逆時針旋轉向內作圖合併(圖3-5)
發現順時針向內作圖得到的重心G_8與逆時針作圖得到的
重心G_7中點與原三角形的重心一樣。

$$\frac{G_{7+}G_8}{2}=$$

$$\left(\frac{\frac{\frac{6b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}}{3}}{2}\ ,\ \frac{\frac{\frac{\frac{3ac}{b}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c(\left(c^2+(b-a)^2\right)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-\frac{3ac}{b}}{3}}{3}}{2}\right)=(0\ ,0)$$

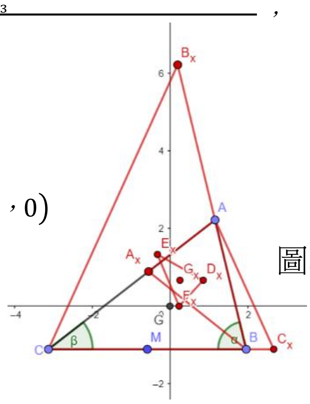


圖3-6

任意三角形各邊向內作相似三角形，順時針旋轉、
逆時針旋轉和旋轉180°作圖後再鏡像旋轉。

(五)順時針向內鏡像作圖(圖3-6)

$$A_x\left(-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}-a+3b\ ,\ \frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}-c\right)，D_x\left(\frac{6b-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}\ ,\ \frac{\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}\right)$$

$$B_x\left(-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}-a+3b\ ,\ \frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}-c\right)，E_x\left(\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}\ ,\ \frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}-3c}{3}\right)$$

$$C_x\left(\frac{9((b+a)^2+c^2)}{6b}-a-3b\ ,\ -c\right)，F_x\left(\frac{-6b+\frac{9((b+a)^2+c^2)}{6b}}{3}\ ,\ 0\right)$$

$$G_x\left(\frac{\frac{6b-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{3a-3b+\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}}{3}\ ,\ \frac{\frac{\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}-3c}{3}+0}{3}\right)$$

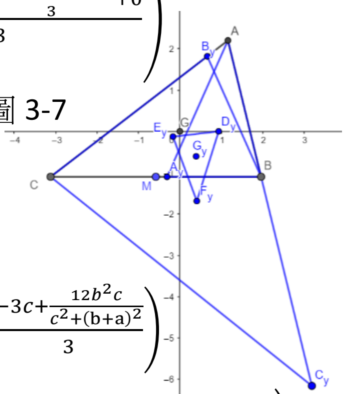


圖 3-7

(六)逆時針向內鏡像作圖(圖3-7)

$$A_y\left(-a+3b-\frac{9((b-a)^2+c^2)}{6b}\ ,\ -c\right)，D_y\left(\frac{6b-\frac{9((b-a)^2+c^2)}{6b}}{3}\ ,\ 0\right)$$

$$B_y\left(\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}-a-3b\ ,\ \frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}-c\right)，E_y\left(\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}\ ,\ \frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)$$

$$C_y\left(\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b-a)^2)}-a-3b\ ,\ -\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}-c\right)，F_y\left(\frac{-6b+\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b-a)^2)}}{3}\ ,\ \frac{-\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}\right)$$

$$G_y\left(\frac{\frac{6b-\frac{9((b-a)^2+c^2)}{6b}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b-a)^2)}}{3}}{3}\ ,\ \frac{0+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}}{3}\right)$$

(七)旋轉180°向內鏡像作圖(圖3-8)

$$A_Z\left(-a+3b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\ ,\ -c+\frac{-3c(3b^2-2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}\right),$$

$$D_Z\left(\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b-a)^2}}{3}\ ,\ \frac{\frac{-3c(3b^2-2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}\right),$$

$$B_Z(-4a\ ,2c)，E_Z\left(\frac{-6a}{3}\ ,0\right)$$

$$C_Z\left(-\frac{3(a+b)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}-a-3b\ ,\ -c-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}\right)$$

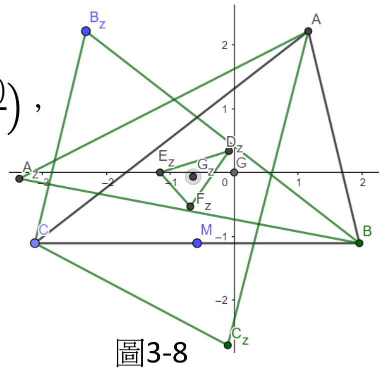


圖3-8

$$F_Z\left(\frac{-6b-\frac{3(a+b)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}\ ,\ \frac{-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right),$$

$$G_Z\left(\frac{\frac{6b-\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-2ac^2}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{-6b+\frac{(a+b)(a^2-b^2+c^2)+2bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}\ ,\ \frac{\frac{\frac{3c(-b^2-2ab+3a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}\right)$$

(八) 將順時針旋轉向內作圖、逆時針旋轉向內作圖和旋轉180°向內作圖後再鏡像旋轉，三張圖合併後得到的重心G_x、G_y、G_z連線得△$G_xG_yG_z$，△$G_xG_yG_z$重心恰為原三角形的重心G(圖3-9、圖3-10)。

$$G\left(\frac{\frac{\frac{6b-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{3a-3b+\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}}{3}+\frac{\frac{3a-3b-\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b-a)^2)}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b-\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-2ac^2}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{-6b+\frac{(a+b)(a^2-b^2+c^2)+2bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}}{3},\right.$$

$$\left.\frac{\frac{\frac{\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}-3c}{3}+0}{3}+\frac{0+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c(-b^2-2ab+3a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}}{3}\right)=(0，0)$$

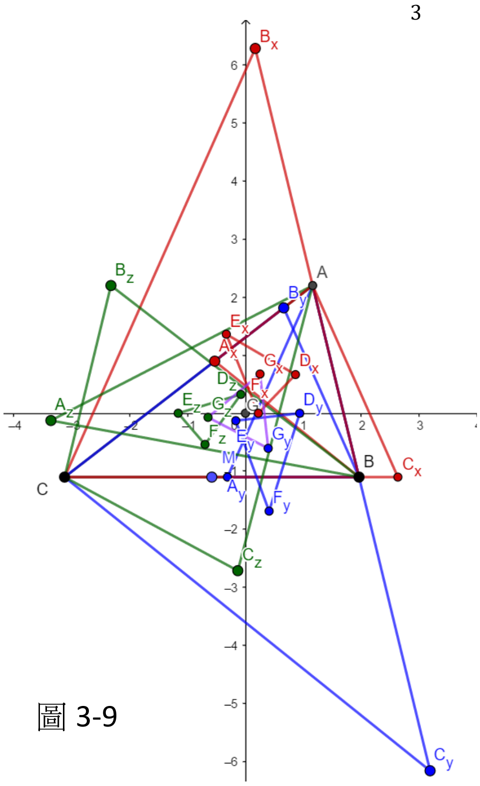


圖 3-9

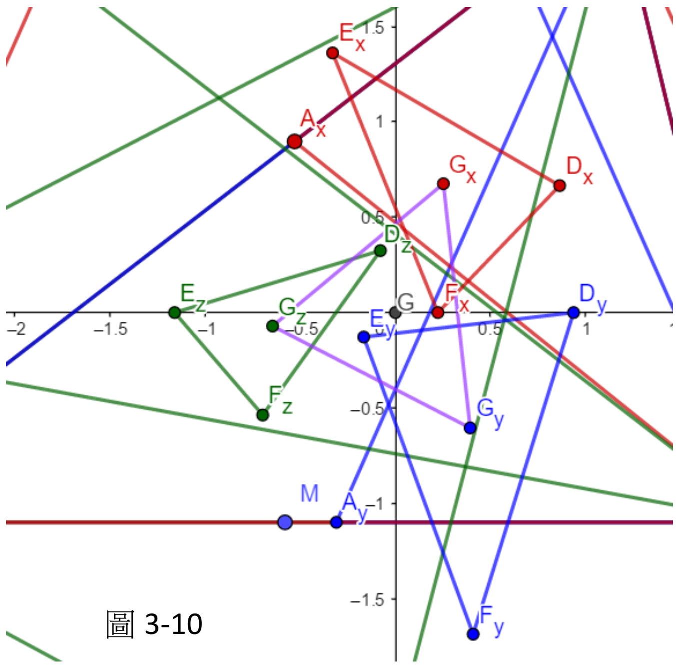
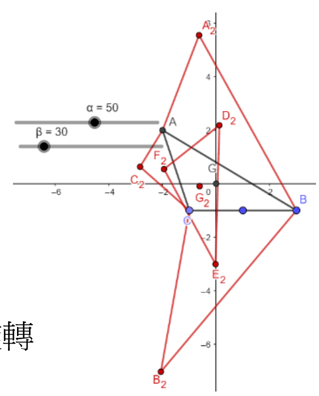


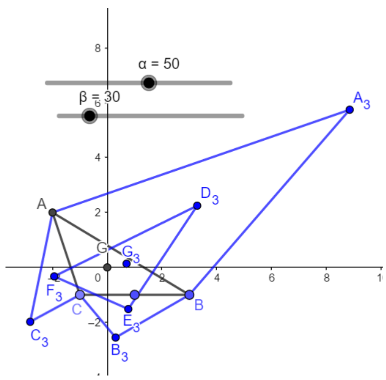
圖 3-10

四、 如果作外面的三個三角形不與原三角形相似，但這三個三角形彼此互相相似。以三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形：

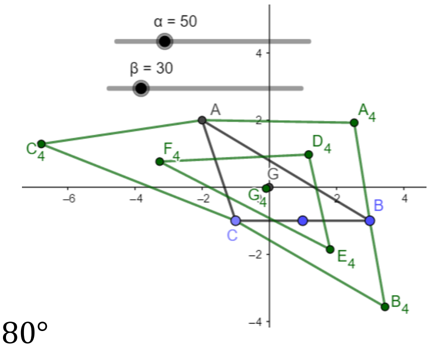
(一)順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖的任意三角形，發現順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°作圖得到△$D_2E_2F_2$、△$D_3E_3F_3$和△$D_4E_4F_4$與向外作的任意三角形相似。重心G_2、G_3、G_4，連線得△$G_2G_3G_4$，且△$G_2G_3G_4$的重心恰為原△ABC的重心。



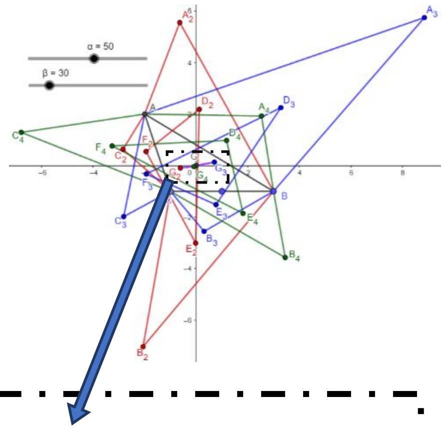
順時針旋轉



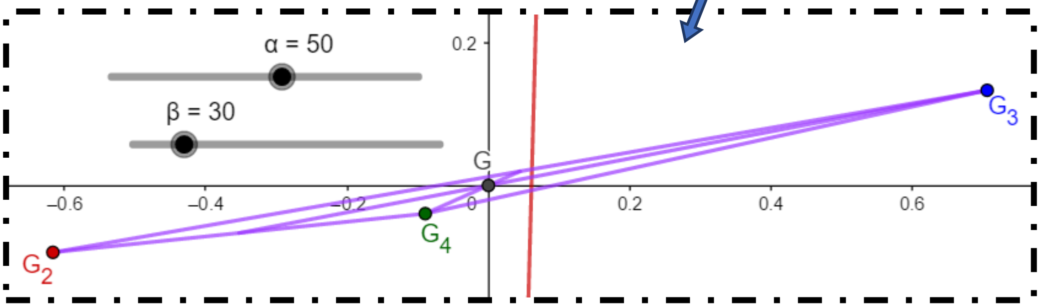
逆時針旋轉



旋轉180°

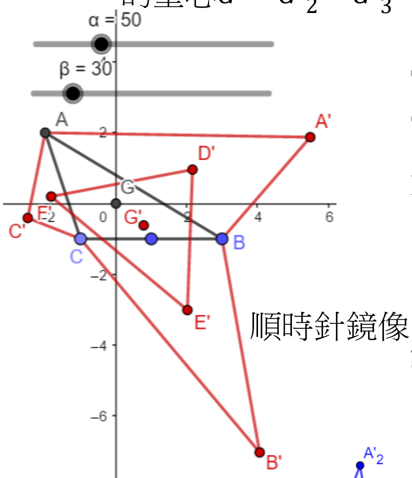


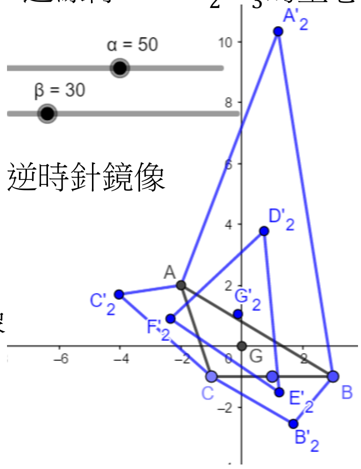
合併

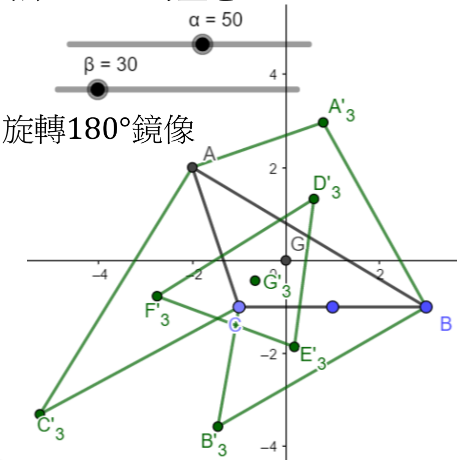


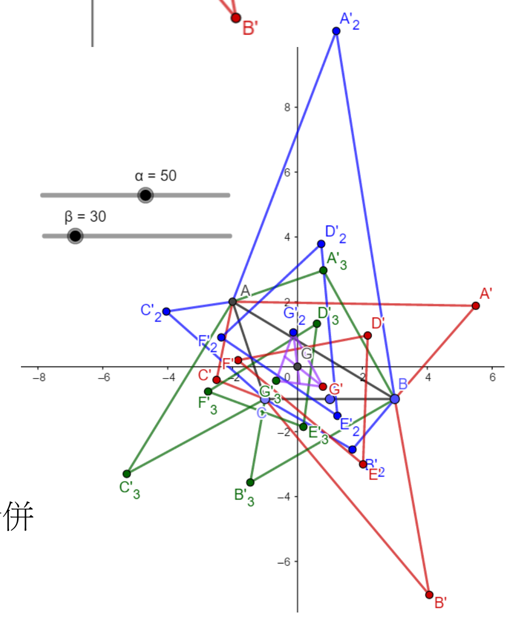
放大

(二)以三邊向外作順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180°鏡像的任意三角形，發現時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180°鏡像作圖得到的重心G'、G'_2、G'_3，連線得$\triangle G'G'_2G'_3$的重心恰為原$\triangle$ ABC的重心。

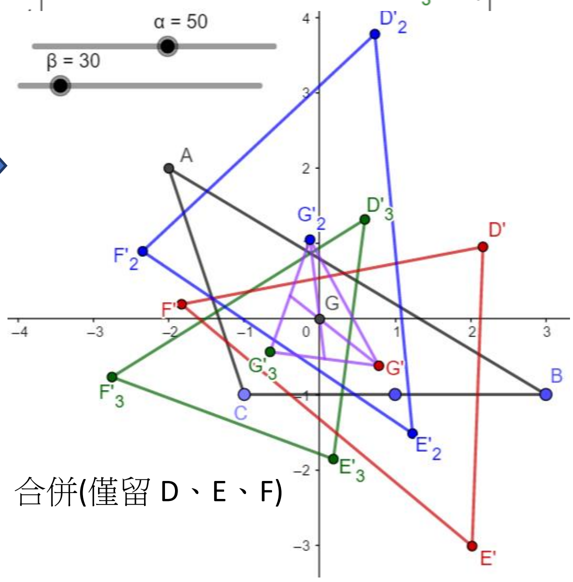








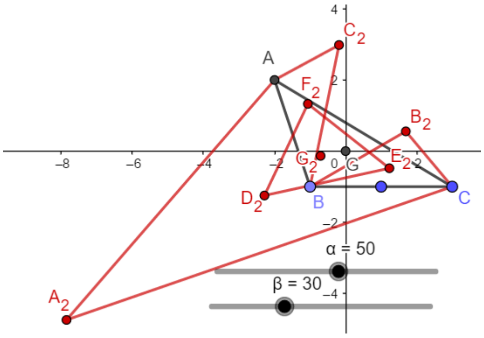
合併



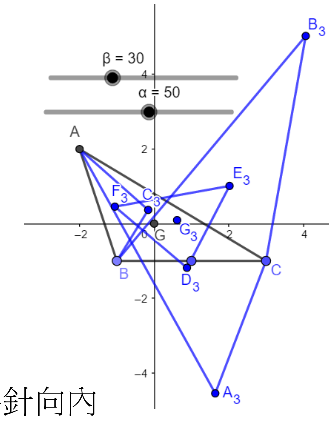
合併(僅留 D、E、F)

同樣向內作圖也是一樣的情形：

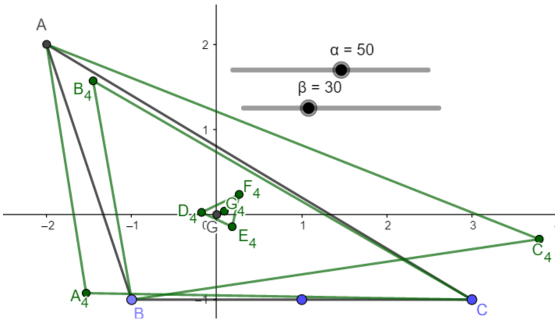
(一)三邊向內作任意三角形，順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖得到△ $D_2E_2F_2$ 、△ $D_3E_3F_3$和△ $D_4E_4F_4$的重心G_2 、G_3 、G_4 ，連線得△ $G_2G_3G_4$的重心恰為原△ ABC的重心。



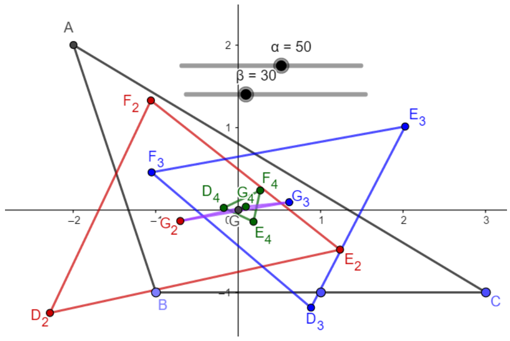
順時針向內



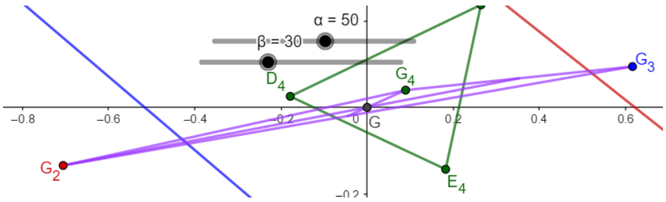
逆時針向內



旋轉180°向內

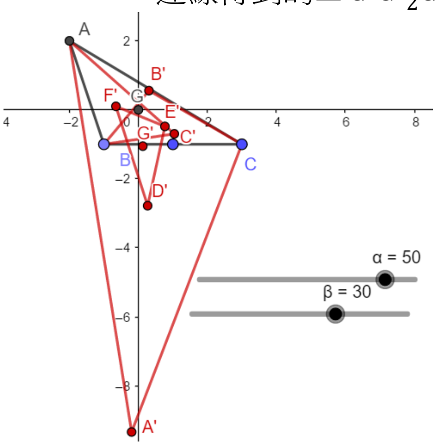


合併(僅保留 D、E、F)

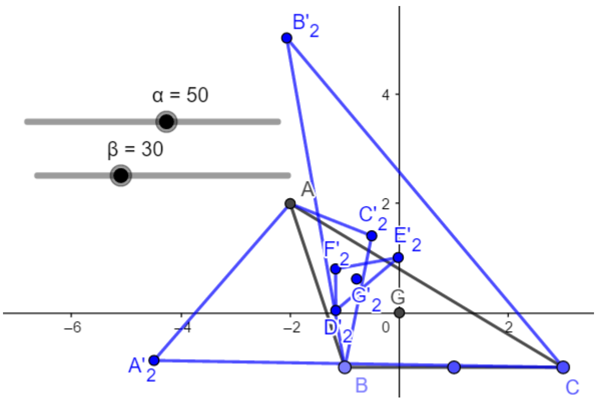


放大

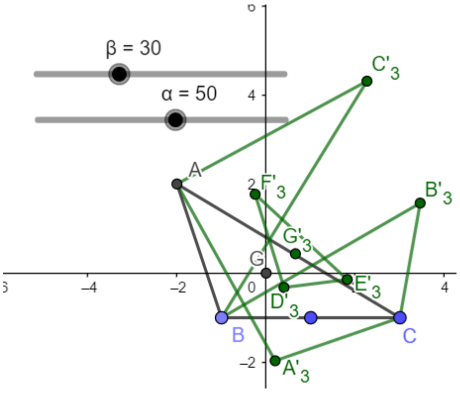
(二)三邊向內作順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180°鏡像的任意三角形，得到△ $D'E'F'$ 、△ $D'_2E'_2F'_2$和△ $D'_3E'_3F'_3$的重心 G' 、G'_2 、G'_3 ，連線得到的△ $G'G'_2G'_3$的重心為原點。

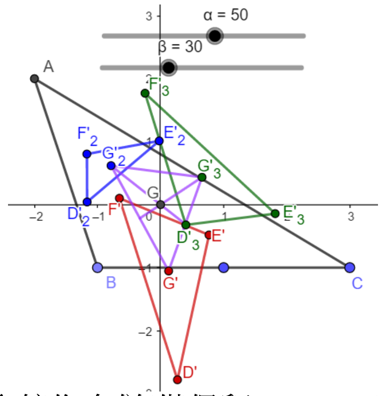


順時針向內鏡像



逆時針向內鏡像

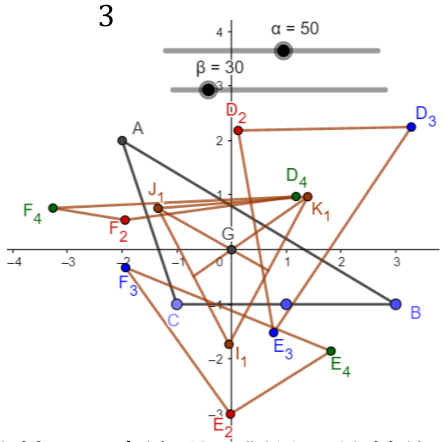




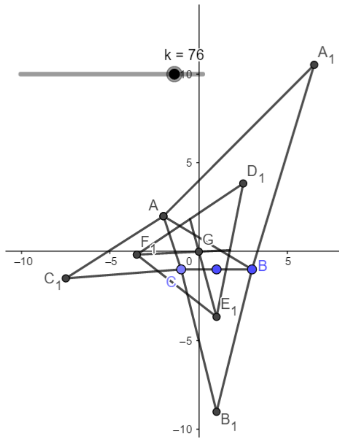
旋轉180°　　　　　　　　　　　　　　向內鏡像合併(僅保留 D、E、F)

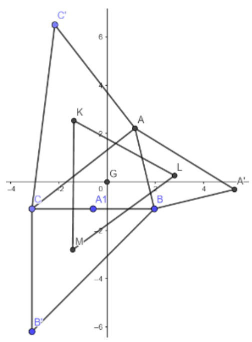
五、這是以三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形，只留 D、E、F，任意選三點為一組，共分三組，但不重複選，各組連線形成三角形的重心再連線，形成中間三角形的重心必與原三角形重心重合。

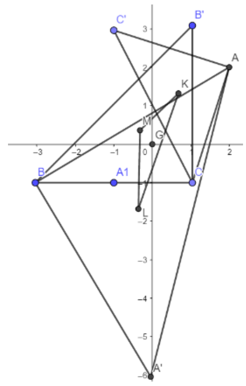
$$G=\frac{I+J+K}{3}=\frac{\frac{E_2+E_4+F_3}{3}+\frac{D_4+F_2+F_4}{3}+\frac{D_2+D_3+E_3}{3}}{3}=\frac{\frac{D_2+D_3+D_4}{3}+\frac{E_2+E_3+E_4}{3}+\frac{F_2+F_3+F_4}{3}}{3}$$



六、文獻中探討作對應旋轉、正多邊形，對於不旋轉的三角形，無相關討論。

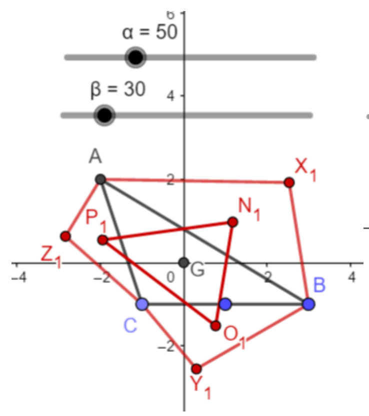


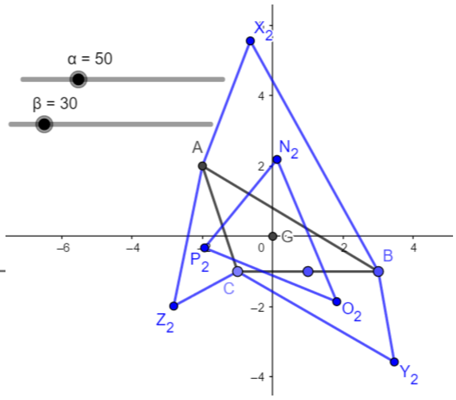


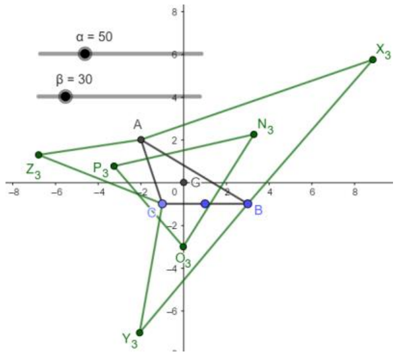


嘗試在任意三角形的三邊向外作等腰三角形、向外作等腰直角三角形和向內作等腰直角三角形，作圖所得的中間三角形重心皆與原三角形重合，但中間三角形與三邊所作的三角形均不相似，接下來針對不旋轉的部分，以任意三角形來實驗。

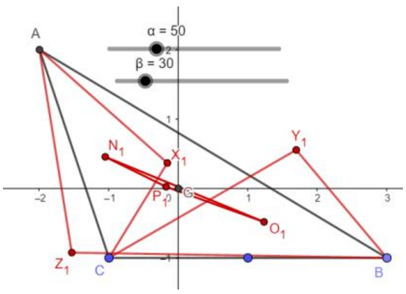
三邊向外作任意三角形不旋轉作圖，但三個三角形相似且方向相同，有三種圖，作圖得到的$\triangle N_1O_1P_1$、$\triangle N_2O_2P_2$和$\triangle N_3O_3P_3$的重心皆與$\triangle ABC$的重心相同。

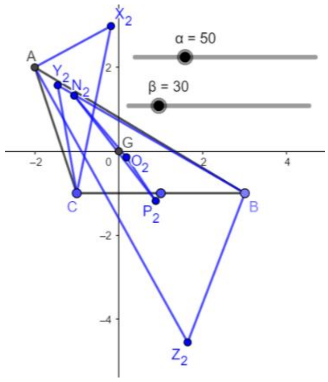


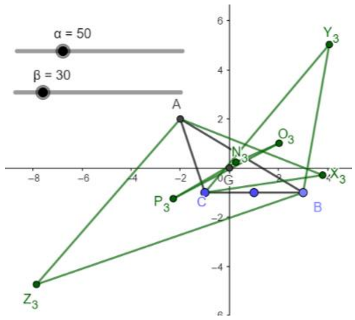




三邊向內作任意三角形不旋轉作圖，有三種圖，作圖得到的$\triangle N_1O_1P_1$、$\triangle N_2O_2P_2$和$\triangle N_3O_3P_3$的重心皆與$\triangle ABC$的重心相同。



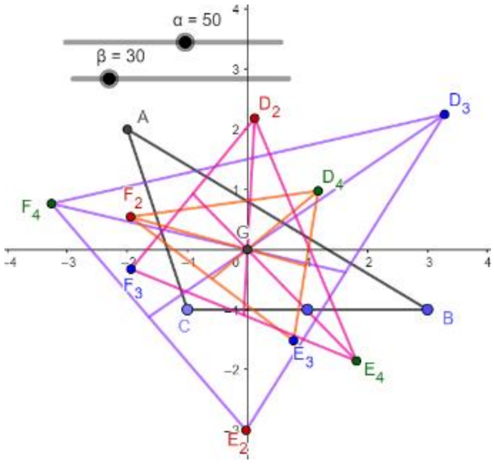




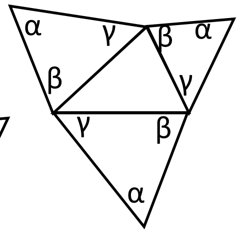
任意三角形作不旋轉，得到的中間三角形重心不偏移，中間三角形和三邊所作的三角形、原三角形不相似。

但將三邊所作的三角形以不同方向作圖時，所產生的中間三角形彼此會相似。

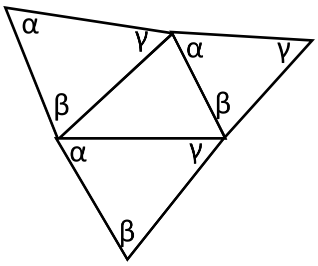
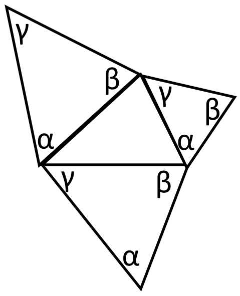
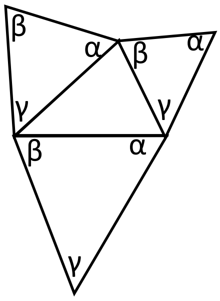
七、在第五點中任取三點一組的情況中取$D_2E_4F_3$或$D_3E_2F_4$或$D_4E_3F_2$則此三角形的重心與原三角形重合，此情況等於上述第六點的情況。



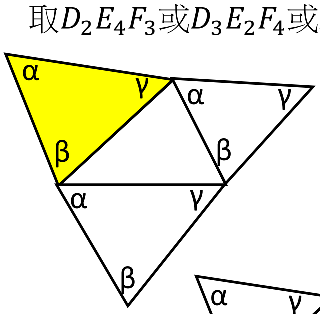
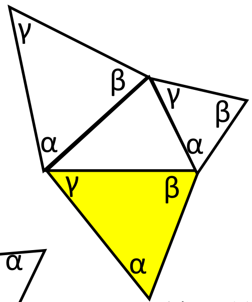
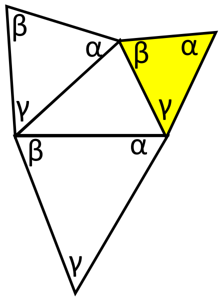
若三邊不旋轉作圖的三角形角度為α、β、γ，則三邊不旋轉作圖應如右圖。

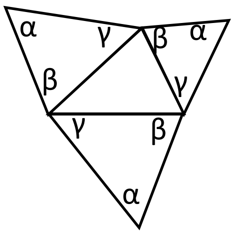


則順時針旋轉、逆時針旋轉、旋轉180°作圖應如下圖。

取$D_2E_4F_3$或$D_3E_2F_4$或$D_4E_3F_2$的情況即為下圖。

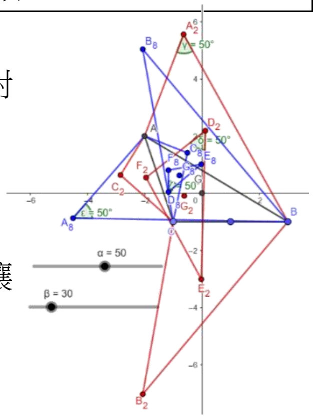
此時形成  即三邊不旋轉狀態，故最後重心不偏移。

	作圖方法	中間三角形	重心重合	特例
原拿破崙定理	三邊向外做正三角形的重心連線得到的三角形	正三角形	三邊向外做正三角形的重心連線得到的三角形重心與原三角形重合。	
向外做相似三角形	將順時針、逆時針、旋轉180°與不旋轉作圖得到的重心再連線後得到的三角形。	1.順時針、逆時針與旋轉180°作圖彼此相似。 2.除了鏡像作圖和不旋轉作圖外，其餘中間三角形皆與三邊作的三角形相似。	順時針、逆時針與旋轉180°作圖得到的重心再連線後得到的三角形，此三角形的重心會與原三角形重合。	1.向外、向內作相似三角形，向外旋轉180°與向內180°得到的重心會直接與原三角形重心重合 2.不旋轉作圖的重心會直接與原三角形重心重合
向外作任意三角形				
向內做相似三角形	順時針、逆時針、旋轉180°與不旋轉向內作圖得到的重心再連線後得到的三角形	1.順時針、逆時針與旋轉180°作圖彼此相似 2.除了鏡像作圖與三邊作的三角形相似，其餘中間三角形皆與三邊作的三角形不相似。		
向內作任意三角形				

伍、討論

在上述幾點研究中，都有一致關於中間三角形的結論，向外作圖(非鏡像)的中間三角形均與作圖的三角形相似，但鏡像作圖時中間三角形與三邊作圖的三角形不相似，向內作圖則是鏡像作圖的中間三角形與作圖的三角形相似。

中間三角形與三邊作圖	正常(沒鏡像)	鏡像
向外作圖	相似	沒相似
向內作圖	沒相似	相似



順時針向外與逆時針向內鏡像互為對稱，其對應頂點及對應三角形的重心皆為相同角度例如：

$\angle A_2$、$\angle D_2$、$\angle A_8$、$\angle D_8$皆相等，

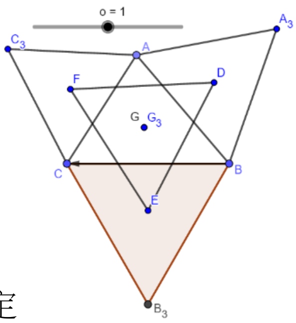
兩圖所畫出的中間三角形會產生對應相似。

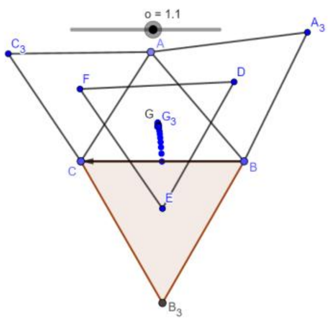
對於重心的偏移，我們鎖定其中一個邊仍做正三角形，讓剩下的兩邊改變，觀察最後重心的變化。

一、維持60度角向外延伸

$\triangle ABC$的$\overline{AC_3}$為$\overline{AC} \times o$，$\overline{AA_3}$為$\overline{AB} \times o$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線。維持60度三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle DEF$重心為G_3。

只有在$o = 1$時，就是三邊做正三角形的情況，G_3會跟G重合。

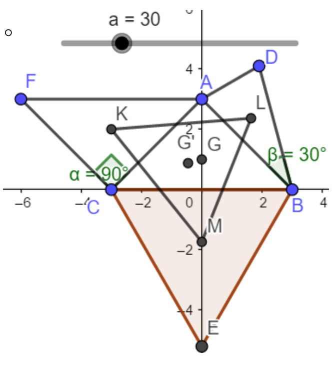


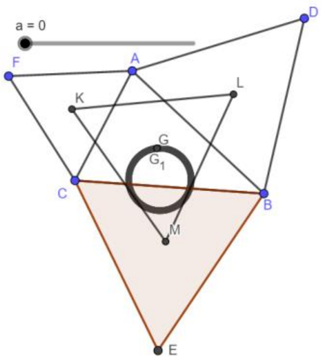


二、兩邊旋轉總和固定

$\triangle ABC$的$\overline{AB}$旋轉$(60-a)°$，$\overline{AC}$旋轉$(60+a)°$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle LMK$重心為G_1。

變數 a 為$0 \sim 360$，觀察改變 a 值後的G_1位置，發現G_1位置形成一圓圈，且在$a = 0$時，就是三邊做正三角形的情況，原三角形的重心G會與G_1重合，其餘情形重心皆偏移。

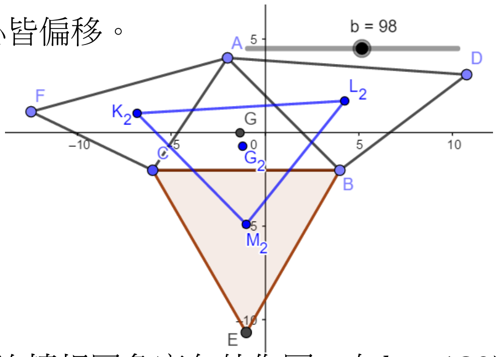


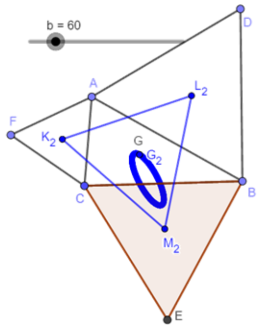


三、兩邊向外旋轉相同角度

$\triangle ABC$的$\overline{AB}$，$\overline{AC}$旋轉$b°$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線。三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle L_2M_2K_2$重心為G_2。

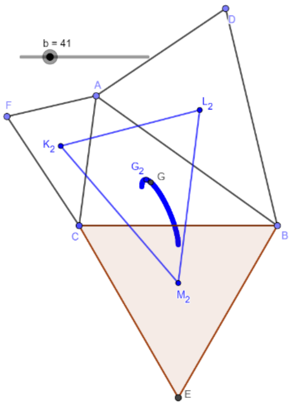
變數 b 為$0 \sim 360$，觀察改變 b 值後的G_2位置，發現G_2位置形成一橢圓，且在$b = 60$時，就是三邊做正三角形的情況，原三角形的重心G會與G_2重合，其餘情形重心皆偏移。

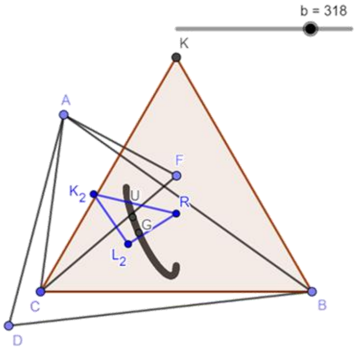


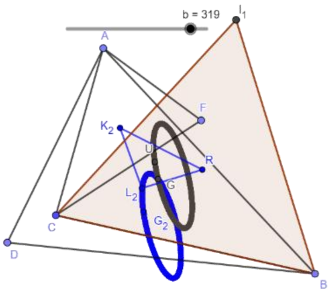


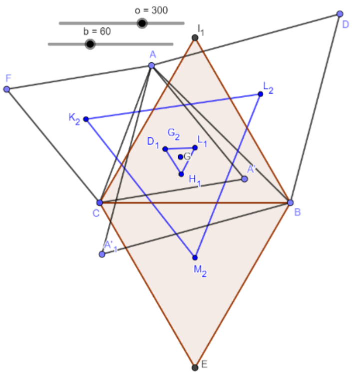
$\overline{AB}$，$\overline{AC}$旋轉旋轉相同角度向外作圖，在$b > 180$時$\overline{AB}$、$\overline{AC}$會變向內作圖，但正三角形仍是向外做，把正三角形向內與向外皆做一個，將兩個正三角形的重心分別與L_2、M_2連線，向外作圖得到的重心為G_2軌跡為藍色，向內作圖得到的重心為U軌跡為黑色。而兩橢圓的兩交點分別為在$b = 60$，$o = 300$、(回到原重心)

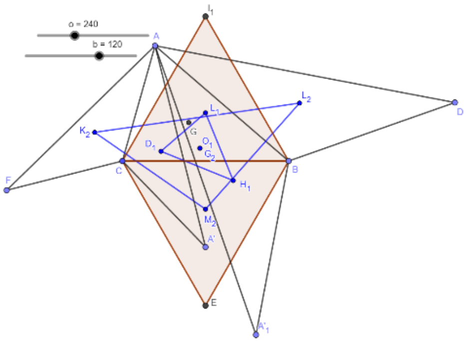
兩軌跡重疊時有另一交點 $b = 120$，$o = 240$會相交。







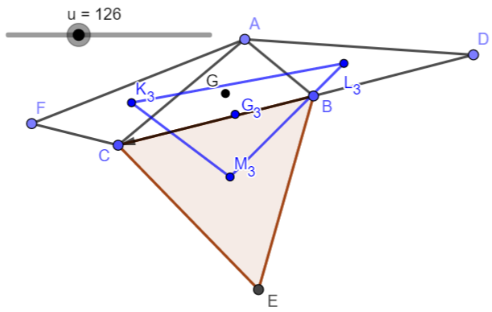


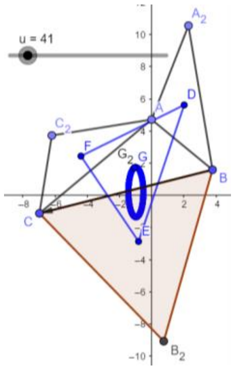


四、兩邊以原邊長做全等三角形

$\triangle ABC$的$\overline{AB}$，$\overline{AC}$做全等三角形，$\overline{BC}$作正三角形，將三個三角形的重心連線得到$\triangle DEF$的重心為G_3。

變數 u 為$0 \sim 360$，觀察改變 u 值後的G_3位置，發現G_3位置形成一橢圓，且在u大約等於41時，原三角形的重心G會與G_3重合，為何是這個角度?





從圖中觀察，作圖得到的重心要回到$\triangle ABC$的重心也就是 N=>F，D=>U，需要移動相同距離且方向相反，因為底部是做正三角形，所以重心E_2不偏移，但兩邊從 N=>F，D=>U 移動，所以重心P 、Q會移動。如果移動相同距離且方向相反則視為不偏移，即距離抵銷，則$\triangle QE_2P$的重心T會與G重合。

1.長度要相等=>全等

$\because \triangle FAC \cong \triangle ADB \therefore \angle FCA = \angle ABD$

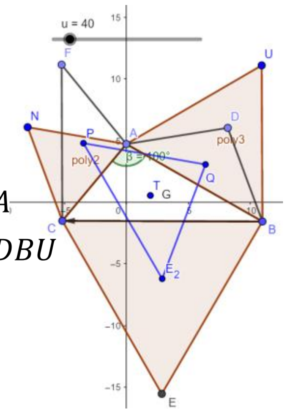
$\because \overline{UB} = \overline{AB} = \overline{FC}, \overline{NC} = \overline{AC} = \overline{DB},$

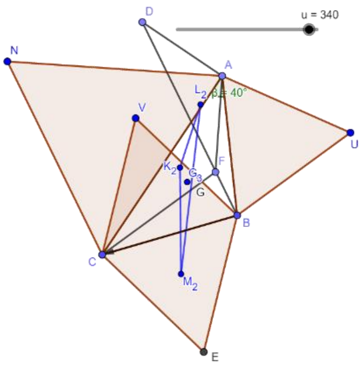
$\angle NCF = \angle NCA - \angle FCA = 60° - \angle FCA$

$= 60° - \angle ABD = \angle ABU - \angle ABD = \angle DBU$

$\therefore \triangle FNC \cong \triangle UDB(SAS)$

$\therefore \overline{NF} = \overline{DU}$。





2.方向要剛好相反=>平行

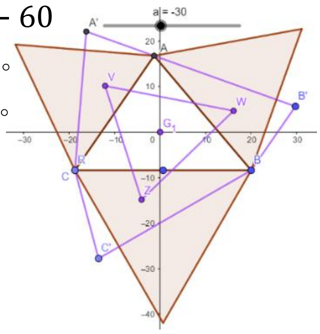
$\angle FCA = u°$,而$\angle BAC = \beta°$,則$\angle ACB + \angle ABC = (180 - \beta)°$,且 $\angle ABU = 60°$

假設$\overline{FC} \parallel \overline{UB}$，則$u° + (180 - \beta)° + 60° = 180°$，$u = \beta - 60$

在$u = \beta - 60$時，$\overline{NF}$與$\overline{DU}$平行且等長重心G_3會與G重合。

若$\beta < 60$時，則$u = 360 - (60 - \beta)$時，G_3才會與G重合。

=>結論角度



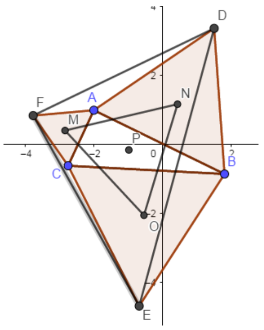
五、三邊長各自向外旋轉同度數

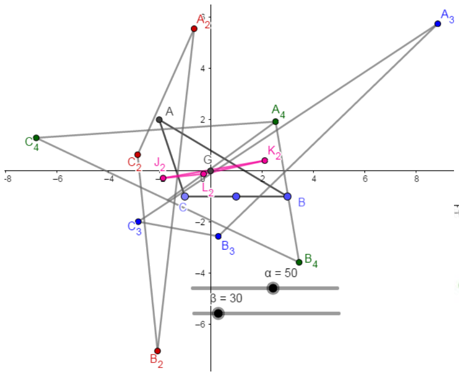
$\triangle ABC$的$\overline{AB}$、$\overline{AC}$和$\overline{BC}$旋轉$(60 + a)°$，發現三邊旋轉相同角度後得到的三個三角形，重心連線後得到$\triangle WZV$的重心會與$\triangle ABC$的重心位置重合。

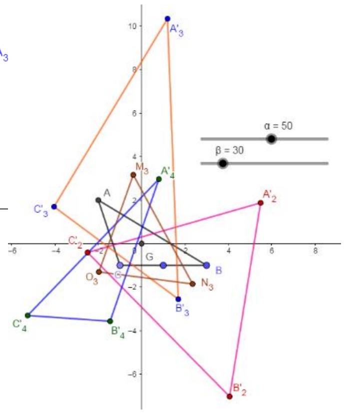
(和我們的三邊相似不旋轉是一樣的結果)

六、在拿破崙定理中，發現將三邊向外作的正三角形最外面的頂點連線，得到的三角形的重心會與原三角形重心重合。如果改以三邊向外做任意三角形時的情況如下。

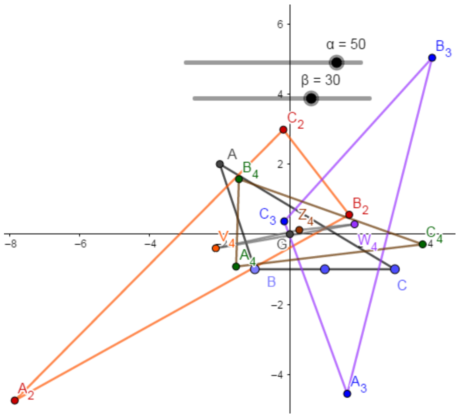
向外做圖，三邊向外做的三個三角形的頂點(A、B、C)連線後，得到的三角形的重心，順時針、逆時針得到的三角形的重心與旋轉180°做圖的重心，連線後得到的三角形的重心與原三角形重心重合。

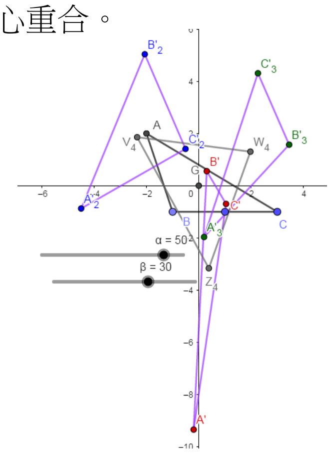






向外鏡向做圖，三邊向外做的三個三角形的頂點(A、B、C)連線後，得到的三角形的重心，順時針、逆時針得到的三角形的重心與旋轉180°做圖的重心，連線後得到的三角形的重心與原三角形重心重合。





向內做圖，三邊向內做的三個三角形的頂點(A、B、C)連線後，得到的三角形的重心，順時針、逆時針得到的三角形的重心與旋轉180°做圖的重心，連線後得到的三角形的重心與原三角形重心重合。

向內鏡向做圖，三邊向外做的三個三角形的頂點(A、B、C)連線後，得到的三角形的重心，順時針、逆時針得到的三角形的重心與旋轉180°做圖的重心，連線後得到的三角形的重心與原三角形重心重合。

若三邊向外作的三角形的重心連線後得到的三角形的重心與原三角形重心重合，則三邊向外做的三個三角形的頂點(A、B、C)連線後，得到的三角形的重心也必定與原三角形重心重合，反之，則不重合。

在向外順時針做圖(圖 4-1)中，

$$G_2=\frac{D_2+E_2+F_2}{3}=\frac{\frac{A+A_2+B}{3}+\frac{C+B+B_2}{3}+\frac{A+C+C_2}{3}}{3}$$

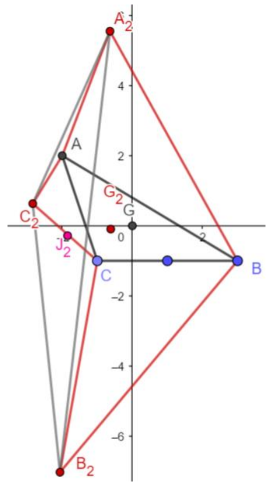


圖4-1

在G_2的算式中，其中 A、B、C 各出現兩次，其座標平均就是原三角形重心 G，A_2、B_2、C_2在九個點中佔 1/3，所以$\overrightarrow{GG_2}$為$\overrightarrow{GJ_2}$的 1/3，所以當剩下的A_2、B_2、C_2的平均J_2和 G 重合時，那G_2就會與原三角形重心重合(圖 4-2)，反之則否(圖 4-1)。

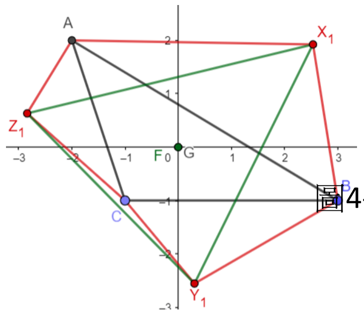


圖4-2

以向量的觀點看，將向外作圖的三角形頂點與原三角形的距離做成頂點偏移的向量(圖 4-3)，若向外做的三頂點平均要和原重心重合，也就是說三個偏移向量的總和必須為 0，以原拿破崙定理來說(圖 4-4)，這三個頂點偏移的向量恰好可以組成一個與原三角形全等(逆時針旋轉 60°)的三角形(圖 4-5)，所以其重心偏移量恰好為 0。

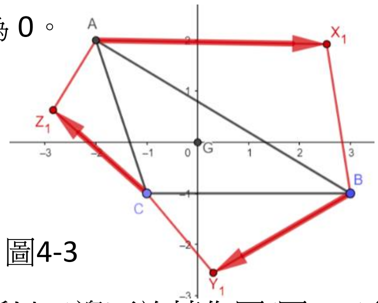


圖4-3

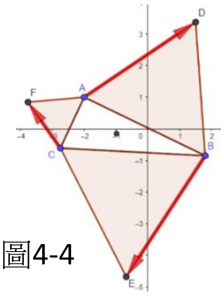


圖4-4

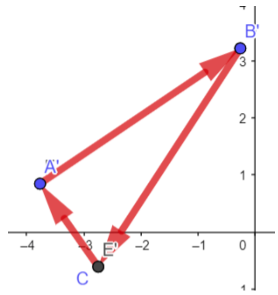


圖4-5

所以三邊不旋轉作圖(圖 4-3)與拿破崙定理同理，都是原三角形的邊長旋轉相同角度縮小，所以它的三個偏移向量也剛好可以組成與原三角形相似的三角形，所以偏移量總和也為 0

三邊作相似旋轉$180°$的圖形(圖 4-6)，三個偏移向量也剛好可以組成與原三角形全等的三角形，所以偏移量總和也為 0，但情形和上面所說的並不一樣，並非原三角形邊長旋轉相同角度，而是可以看成是對邊平移，所以仍然是形成與原三角形全等的三角形(圖 4-7)。

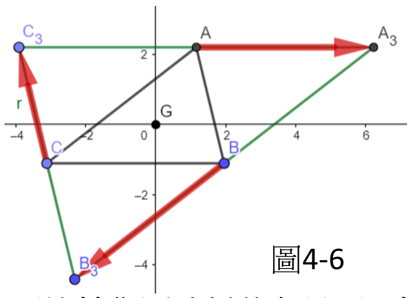


圖4-6

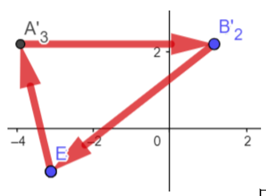


圖4-7

在不旋轉作圖時偏移向量可以轉換為原三角形的三邊向量向外旋轉$\alpha°$，所以偏移向量總和可由原三角形三邊向量總和相同，也就是說總和必為0，

$$\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\alpha\left(\vec{X}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)+\alpha\left(\vec{Y}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)+\alpha\left(\vec{Z}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\times\alpha\left(\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}\right)=0$$

所以三邊的偏移量和為 0，且偏移量組成的三角形為原三角形縮小$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$倍逆時針旋轉α°。(圖 4-8)

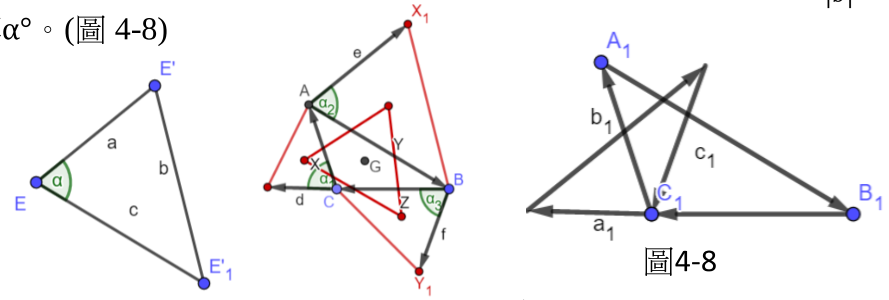
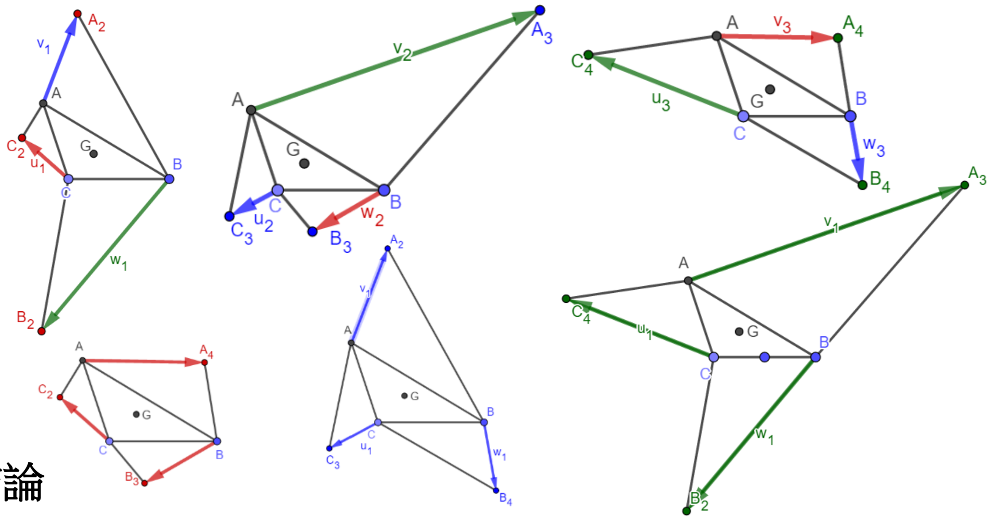


圖4-8

由向外作順時針、逆時針和180°旋轉的重心會受三頂點的偏移向量影響，而九個偏移向量重新分組恰好會組成三張不旋轉作圖，所以偏移量為 0。所以順時針、逆時針和180°旋轉得到的重心G_2、G_3、G_4再平均就會回到原重心



陸、結論

(一) 拿破崙定理改用$30°-60°-90°$直角三角形三邊向外作圖且原三角形也為$30°-60°-90°$直角三角形

1. 用不旋轉得到中間三角形的重心會是原三角形的重心。
2. 順時針、逆時針中間三角形的重心中點為原三角形重心，旋轉180°的中間三角形重心不偏移。
3. 鏡像旋轉後順時針、逆時針和旋轉180°的中間三角形重心連線，得到的三角形中心與原三角形重心重合。
4. 順時針、逆時針和旋轉180°得到中間的三角形一定是$30°-60°-90°$直角三角形。
5. 鏡像旋轉後中間三角形不是$30°-60°-90°$直角三角形，但順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像的中間三角形相似。

(二) 改用相似三角形向外作圖

1. 順時針、逆時針中間三角形的重心中點為原三角形重心，旋轉180°的中間三角形重心不偏移。

2. 鏡像旋轉後順時針、逆時針和旋轉180°的中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針、逆時針和旋轉180°得到中間的三角形與原三角形相似。
4. 鏡像旋轉後中間三角形與原三角形不相似，但順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像的中間三角形相似。

(三) 改用相似三角形向內作圖

1. 以相似三角形向內順時針、逆時針和旋轉180°，順時針與逆時針的中間三角形的重心中點，為原三角形重心。
2. 以相似三角形向內順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像的中間三角形的重心連線得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針、逆時針和旋轉180°得到的中間三角形與原三角形不相似，但鏡像旋轉後中間三角形與原三角形相似，與向外作圖結果相反。

(四) 三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形

1. 順時針、逆時針和旋轉180°中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
2. 順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針、逆時針和旋轉180°得到中間的三角形與原三角形相似。
4. 鏡像旋轉後中間三角形與原三角形不相似，但順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像的中間三角形相似。

(五) 三邊向內作與原三角形不相似的任意三角形

1. 向內順時針、逆時針和旋轉180°，順時針、逆時針與旋轉180°的中間三角形的重心連線，得到的三角形重心為原三角形重心。
2. 順時針鏡像、逆時針鏡像和旋轉180°鏡像中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針、逆時針和旋轉180°得到的中間三角形與向外作的三角形不相似，但鏡像旋轉後中間三角形與原三角形相似，與向外作圖結果相反。

(六) 三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形，只留 D、E、F

1. 任三點一組連線，共三組，形成的三角形重心連線，得到的三角形重心與原三角性重心重合。
2. 多種連線方式中只有 3 種連線的三角形重心會直接與原三角形重心重合。

(七) 三邊向外作不旋轉的三角形

以$30° - 60° - 90°$直角三角形、原三角形相似的三角形和原三角形不相似的任意三角形，向外作不旋轉的三角形，三邊所作的三角形的三個重心連線的三角形的重心與原三角形的重心重合。

(八) 向外作圖(非鏡像)的中間三角形均與作圖的三角形相似，向內作圖則是鏡像作圖的中間三角形與作圖的三角形相似。

中間三角形與三邊作圖	正常(沒鏡像)	鏡像
向外作圖	相似	沒相似
向內作圖	沒相似	相似

(九) 三角形三邊向外作圖，將三邊作的頂點連線得到三角形。將順時針、逆時針和旋轉180°作圖得到的頂點連線三角形的重心再連線得到三角形，此三角形的重心會與原三角形重心重合。

(十) 如果頂點連線的三角形的重心與原三角形重心會重合，則三邊所做的三角形的重心連線三角形重心也會與原三角形重心重合。

(十一) 三個頂點的位移量和為 0，也就是三個頂點的位移量可以組合成三角形，則三邊所做的三角形的重心連線三角形重心也會與原三角形重心重合。

(十二) 順時針、逆時針及旋轉 180°的偏移向量組成的三角形會與原三角形相似，包含拿破崙定理也是。

柒、未來展望

1. 因研究的圖形過多，初期還可以算出每一個座標，後期只能透過電腦與圖形作驗證，期望能夠將所優圖形確實以數學式呈現。
2. 驗證過程只採用三角函數，如果能夠套用向量，或許會更簡單。
3. 能夠進一步地找出使偏移量為0的規律

捌、參考資料

一、Sgod，拿破崙定理，心裡有數 https://mathmind.idv.tw/main/index.php/2012-04-10-04-51-42/9-math/8-napoleon-thm

二、陳致安、朱建威、陳揚叡(2006)。拿破崙三角形與畢氏定理的聯想。第 46 屆全國中小學科展國中數學科作品。

三、許翰翔(2013)拿破崙的四角戀-----將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討。第 53 屆全國中小學科展國中數學科作品。

四、徐啓惇、楊宗諺、吳承諺(2018)。從零開始 -初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討。第 58 屆全國中小學科展國中數學科作品。

五、黃家冠(2015)。拿破崙定理對多邊形之推廣。第 55 屆全國中小學科展國中高中數學科作品。

六、Weisstein, Eric W.，Napoleon's Theorem，https://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html

【評語】030409

此作品考慮以給定的三角形的三邊為縮放比例，向外（或內）作與原三角形相似的三組三角形，所得出的三組三角形的重心連線所得出的三個三角形的重心，與原三角形的重心間的關連性。想法很有趣，且能夠針對設定的問題，透過計算給予論證，計算的過程繁複，研究精神佳。可惜的是沒有夠漂亮的結論，且結果稍微薄弱，用向量或複數也許可以有新的處理方式。

作品海報

摘要

以類似拿破崙定理的方式，先作一個任意三角形，順時針或逆時針在每一邊各作一個與原三角形相似的三角形，再把三個相似三角形的重心連線，成為新三 角形，探討原三角形與新三角形的關聯。

壹、研究動機

在瀏覽過去的科展作品時，無意間看到拿破崙定理，覺得原理很特別，難道拿破崙定理的三邊只能作正三角形，不能作其他圖形嗎?其關連又是什麼?

貳、研究目的

一. 將拿破崙定理中的三邊作向外和向內正三角形替換為與30˚ – 60˚ – 90˚直角三角形時的情況
二. 三角形的三邊以順時針旋轉、逆時針旋轉及180˚旋轉向外和向內作與原三角形相似的三角形時的比較
三. 三角形的三邊以順時針旋轉、逆時針旋轉及180˚旋轉向外和向內作與原三角形不相似但互相相似的任意三角形的比較

參、研究設備及器材

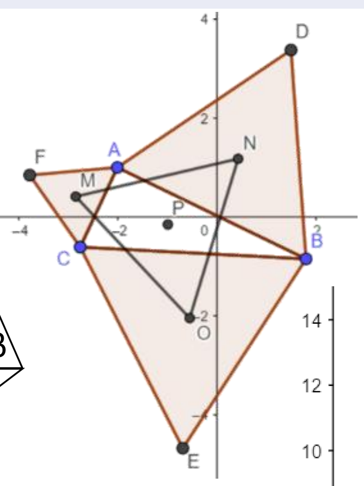
GGB 繪圖軟體、電腦

肆、研究過程或方法

參考過去科展與拿破崙定理相關的科展作品之重點摘要

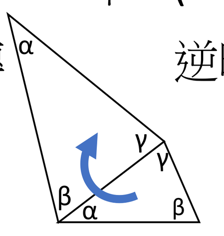
作品名稱	作者	摘要
拿破崙的四角戀 –將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討	國二 許翰翔	(1)對象：特定四邊形(平行四邊形、等腰梯形、菱形、矩形、鳶形) (2)構造法：原四邊形的邊向外或向內作相似三角形及特殊四邊形
拿破崙三角形與畢氏定理的聯想	國三 陳致安 國三 朱建威 國三 陳揚叡	(1) 對象:任意三角形 (2) 構造法:以原三角形三邊向外(內)作半圓，取特定圓心角，而得外切三角形
拿破崙定理對多邊形之推廣	高一 黃家冠	(1) 對象:任意n邊形 (2) 構造法:n邊形各邊向外作正n邊形
從零開始 -初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討	國二 徐啓惇 國二 楊宗諺 國二 吳承諺	(1) 對象:n邊形 (2) 構造法: 以各邊分別向外作正n邊形連接相鄰兩正n邊形中心，形成一個新的n邊形

●拿破崙定理：任意三角形，以三邊各作一個正三角形，把三個正三角形的重心連線，必成為一個新正三角形，且新正三角形的重心會與 原正三角形的重心重合，如圖(一)。

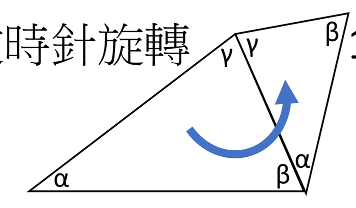


將拿破崙定理中三邊改為向外作與原三角形相似的三角形，
先以原三角形為30° − 60° − 90°直角三角形操作， $\triangle ABC$中A (0，$4\sqrt{3}$)、 B (4，0)、 C (0，0) 。

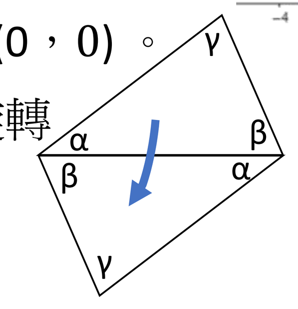
為了使用需求，先定義旋轉方式及名稱： 順時針旋轉



逆時針旋轉



180旋轉



一. 向外作順時針、逆時針和旋轉180°的圖：

1. 順時針旋轉作圖(圖1-1)：

以B點為中心以順時針旋轉，找出$\triangle AA_1B$、$\triangle CBB_1$、$\triangle ACC_1$的重心D_1、E_1、F_1，並且連線得$\triangle D_1E_1F_1$。

由$\overline{AB}$=8可推得A_1 (12，$8\sqrt{3}$)，所以$\triangle AA_1B$的重心D_1 $(\frac{0+12+4}{3}，\frac{4\sqrt{3}+8\sqrt{3}+0}{3})=(\frac{16}{3}，4\sqrt{3})$。

由$\overline{BC}$=4可推得$B_1(0，\frac{-4}{3}\sqrt{3})$，所以$\triangle CBB_1$的重心$E_1(\frac{4}{3}，\frac{-4}{9}\sqrt{3})$。

由$\overline{AC}=4\sqrt{3}$可推得C_1 $(-3，\sqrt{3})$，所以$\triangle ACC_1$的重心$F_1(-1，\frac{5}{3}\sqrt{3})$。

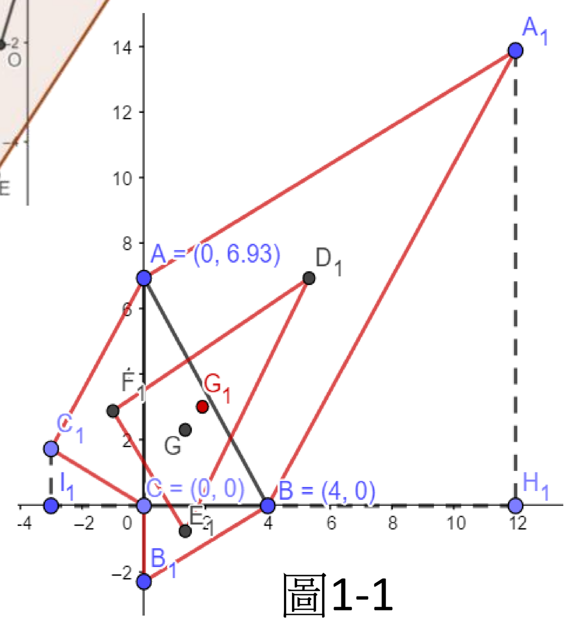


圖1-1

$\triangle D_1E_1F_1$的重心為$G_1(\frac{-1+\frac{16}{3}+\frac{4}{3}}{3}，\frac{\frac{5}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\frac{-4}{9}\sqrt{3}}{3})=(\frac{17}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$。

$\overline{D_1E_1}:\overline{E_1F_1}:\overline{D_1F_1}=\sqrt{\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}-\frac{-4}{9}\sqrt{3}\right)^2}:\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\sqrt{3}-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2}:\sqrt{\left(-1-\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)^2}$ =2:1: $\sqrt{3}$，的確也是30°60°90°直角三角形

2. 逆時針旋轉作圖(圖1-2)：

以A點為中心逆時針旋轉，找出$\triangle AA_2B$、$\triangle CBB_2$、$\triangle ACC_2$的重心D_2、E_2、F_2，並且連線得$\triangle D_2E_2F_2$。

$\triangle D_2E_2F_2$的重心為$G_2(\frac{4-4+\frac{7}{3}}{3}，\frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{16}{9}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{3})=(\frac{7}{9}，\frac{25}{27}\sqrt{3})$。

$\triangle D_2E_2F_2$的邊長比$\overline{D_2E_2}:\overline{E_2F_2}:\overline{D_2F_2}$也是2:1:$\sqrt{3}$，也是30°60°90°直角三角形。

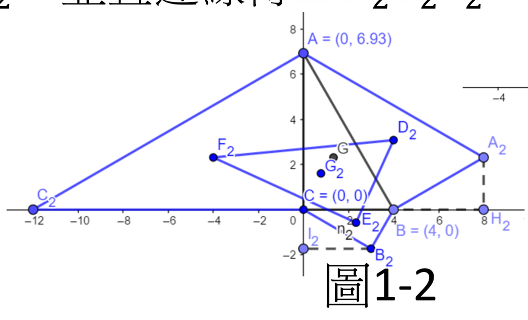


圖1-2

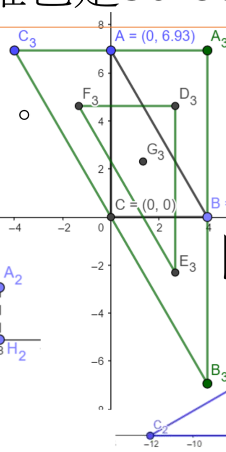


圖1-3

3. 旋轉180°作圖(圖1-3)：

找出$\triangle AA_3B$、$\triangle CBB_3$、$\triangle C_3AC$的重心D_3、E_3、F_3，並且連線得$\triangle D_3E_3F_3$。

$\triangle D_3E_3F_3$的重心為$G_3\left(\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}}{3}，\frac{\frac{8}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$，與$\triangle$ ABC的重心位置一樣。

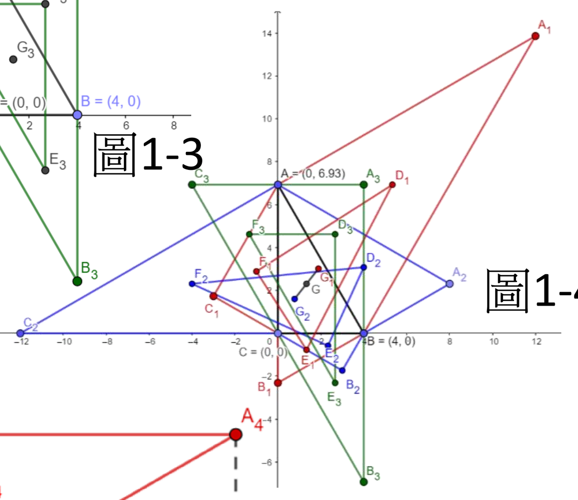


圖1-4

4. 三張圖合併後(圖1-4)，發現順時針作圖得到的$G_1(\frac{17}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$與逆時針作圖得到的$G_2(\frac{7}{9}，\frac{25}{27}\sqrt{3})$，

中點座標$(\frac{\frac{17}{9}+\frac{7}{9}}{2}，\frac{\frac{47}{27}\sqrt{3}+\frac{25}{27}\sqrt{3}}{2})=(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3})$恰好為原本△ABC的重心$G(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3})$，順時針、逆時針和旋轉180°三張圖的重心$G_1$ 、G_2 、G_3，是一直線且成等距離。

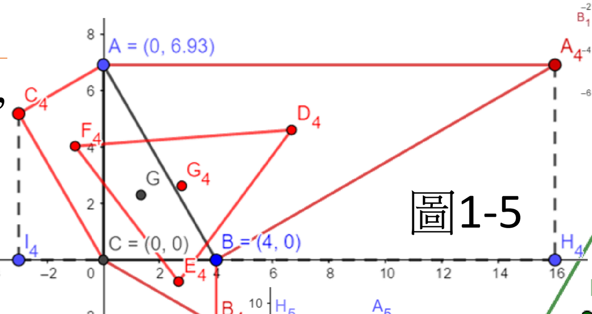


圖1-5

5. 順時針旋轉鏡像作圖(圖1-5) ：$\triangle D_4E_4F_4$的重心為$G_4(\frac{-1+\frac{8}{3}+\frac{20}{3}}{3}，\frac{\frac{7}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\frac{-4}{9}\sqrt{3}}{3})=(\frac{25}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$。

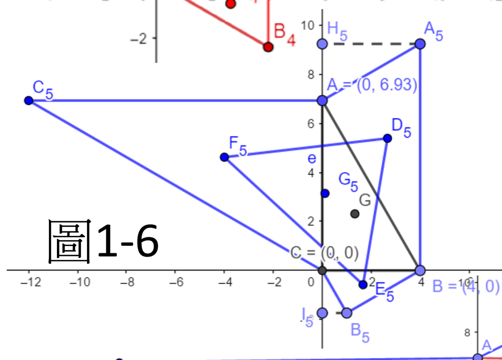


圖1-6

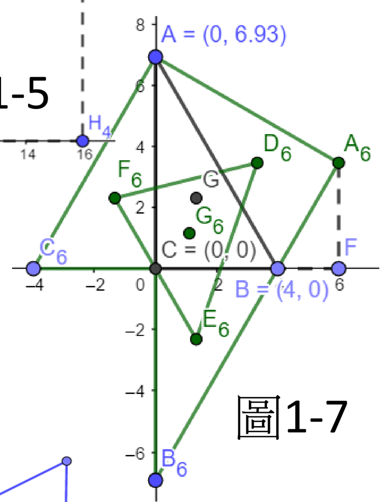


圖1-7

6. 逆時針旋轉鏡像作圖 (圖1-6) ：$\triangle D_5E_5F_5$的重心為$G_5(\frac{\frac{8}{3}+\frac{5}{3}-4}{3}，\frac{\frac{28}{9}\sqrt{3}+\frac{-1}{3}\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{3}}{3})=(\frac{1}{9}，\frac{49}{27}\sqrt{3})$。

7. 旋轉180°鏡像作圖(圖1-7)：$\triangle D_6E_6F_6$的重心為$G_6(\frac{\frac{10}{3}+\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)}{3}，\frac{2\sqrt{3}+\frac{-4}{3}\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}}{3})=(\frac{10}{9}，\frac{2}{3}\sqrt{3})$ 。

8. 三張圖合併後(圖1-8)，發現順時針鏡像作圖得到的$G_4(\frac{25}{9}，\frac{47}{27}\sqrt{3})$

與逆時針鏡像作圖得到的$G_5(\frac{1}{9}，\frac{49}{27}\sqrt{3})$，以及旋轉180°鏡像作圖得到的$G_6(\frac{10}{9}，\frac{2}{3}\sqrt{3})$，三點連線得$\triangle G_4G_5G_6$，

$\triangle G_4G_5G_6$的重心恰好為原本△ABC的重心$G\left(\frac{\frac{25}{9}+\frac{1}{9}+\frac{10}{9}}{3}，\frac{\frac{47}{27}\sqrt{3}+\frac{49}{27}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\frac{36}{9}}{3}，\frac{\frac{108}{27}}{3}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{4}{3}，\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$。

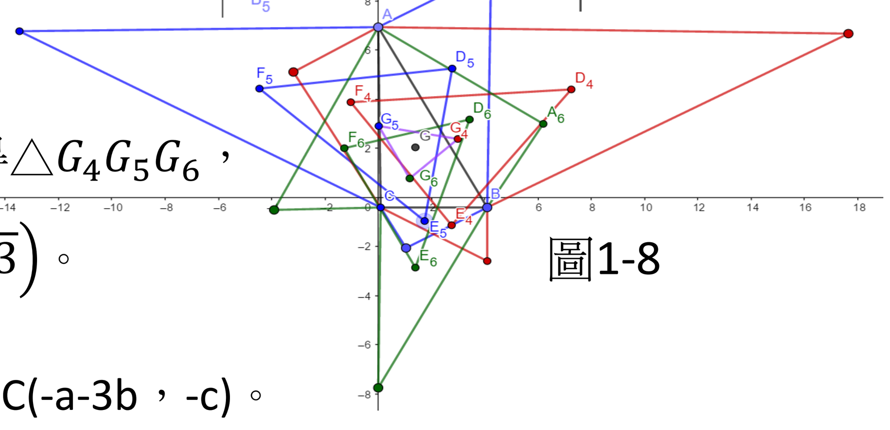


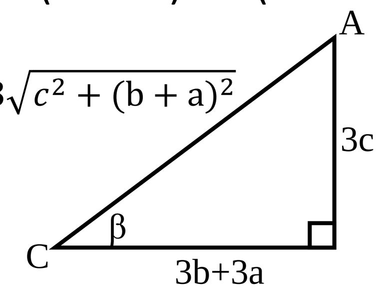
圖1-8

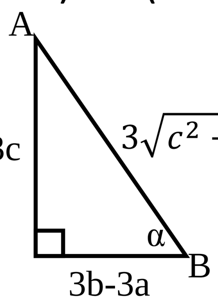
二. 由30°60°90°的直角三角形的結論，推廣到任意三角形，將結果一般化：

為了計算方便，假設$\triangle ABC$的重心G為(0，0)，A(2a，2c)、(底邊中點)M(-a，-c)、B(-a+3b，-c)、C(-a-3b，-c)。
計算過程會用到三角函數，所以先定義α、β兩角的sin 、cos 函數值。

$\sin\alpha=\frac{3c}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}$，$\sin\beta=\frac{3c}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}$

$\cos\alpha=\frac{3b-3a}{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}=\frac{b-a}{\sqrt{c^2+(b-a)^2}}$，$\cos\beta=\frac{3b+3a}{3\sqrt{c^2+(b+a)^2}}=\frac{b+a}{\sqrt{c^2+(b+a)^2}}$





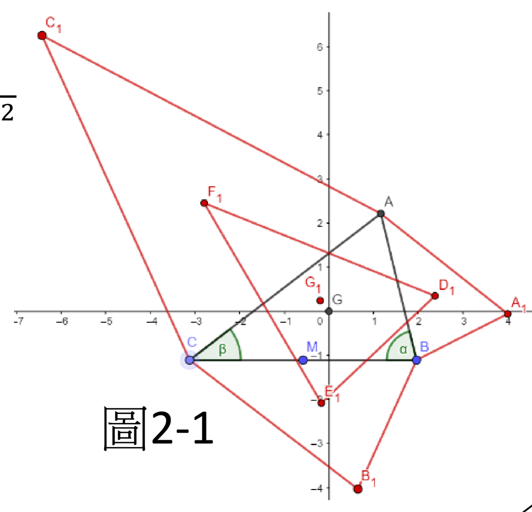


圖2-1

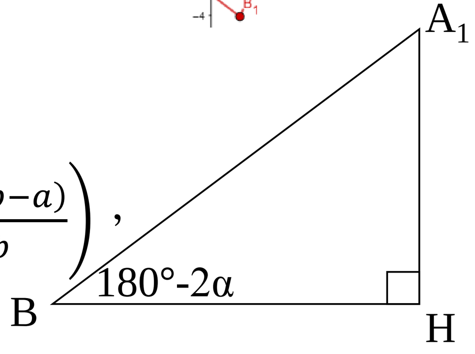
1. 順時針旋轉作圖(圖2-1)：

以B點為中心以順時針旋轉，因為要與$\triangle ABC$相似，比例以$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$放大得點$A_1$，依此類推點$B_1$、$C_1$。
找出$\triangle AA_1B$、$\triangle CBB_1$、$\triangle ACC_1$的重心，點D_1、E_1、F_1，並且連線得$\triangle D_1E_1F_1$。

(1)$\angle ABA_1=\angle\alpha$，$\angle A_1BH$ =180°-2α，$\overline{A_1B}=3\sqrt{c^2+(b-a)^2}\times\frac{3\sqrt{c^2+(b-a)^2}}{6b}=\frac{3[c^2+(b-a)^2]}{2b}$

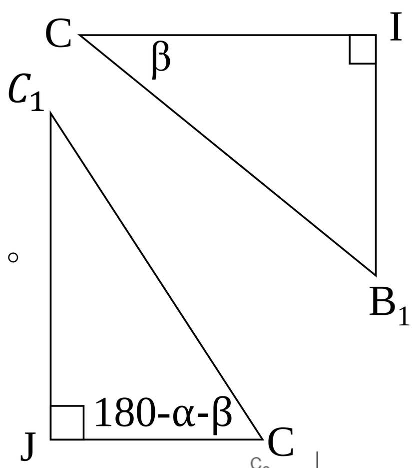
$\sin(180°-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2c(b-a)}{c^2+(b-a)^2}$，$\cos(180°-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=\frac{c^2-(b-a)^2}{c^2+(b-a)^2}$

$A_1\left(\overline{A_1B}\times\cos(180°-2\alpha)+(-a+3b)，\overline{A_1B}\times\sin(180°-2\alpha)+(-c)\right)=\left((-a+3b)+\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}，(-c)+\frac{3c(b-a)}{b}\right)$，



由A、A_1、B求得$D_1=\left(\frac{2a+\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}+(-a+3b)+(-a+3b)}{3}，\frac{2c+\frac{3c(b-a)}{b}+(-c)+(-c)}{3}\right)=\left(\frac{\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}+6b}{3}，\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}\right)$。

(2)同理求得$B_1\left((-a-3b)+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}，(-c)-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}\right)$，



由B、B_1、C求得$E_1\left(\frac{(-a-3b)+(-a+3b)+(-a-3b)+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}，\frac{(-c)+(-c)+(-c)-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)=\left(\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}，\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}\right)$。

(3) 同理求得 $C_1\left((-a-3b)-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}，(-c)+6b\times\frac{2cb}{c^2+(b-a)^2}\right)$，

由A、C_1、C求得$F_1\left(\frac{2a+(-a-3b)+\left(-a-3b-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}，\frac{2c+(-c)+\left(-c+6b\times\frac{2cb}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}\right)=\left(\frac{-6b+\left(-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}，\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}\right)$。

(4)由D_1、E_1、F_1找出$G_1\left(\frac{\frac{\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}+6b}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}，\frac{\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$。

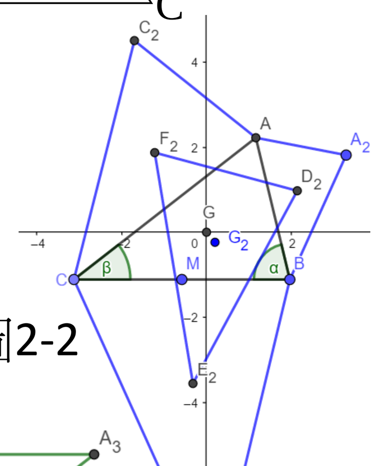


圖2-2

2. 逆時針旋轉作圖(圖2-2)：

找出$\triangle AA_2B$、$\triangle CBB_2$、$\triangle ACC_2$的重心，點D_2、E_2、F_2，並且連線得$\triangle D_2E_2F_2$。

由D_2、E_2、F_2找出$G_2\left(\frac{\frac{6b+6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(-c^2+(b+a)^2)}{2b}}{3}}{3}，\frac{\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c(b+a)}{b}}{3}}{3}\right)$。

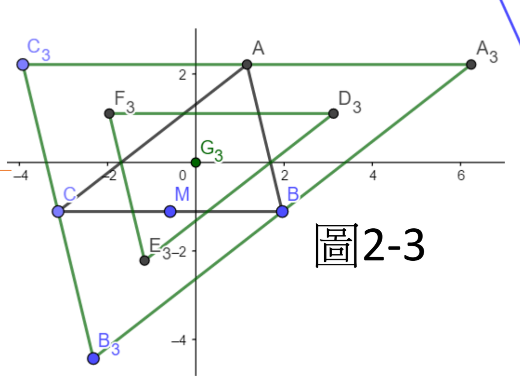


圖2-3

3. 旋轉180°作圖(圖2-3)由D_3、E_3、F_3找出$G_3\left(\frac{\frac{3a+9b}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{3a-9b}{3}}{3}，\frac{\frac{3c}{3}+\frac{-6c}{3}+\frac{3c}{3}}{3}\right)=(0，0)$

4. 三張圖合在一起比較(圖2-4)，發現G_1與G_2的中點和△ABC的重心G恰好位置一樣，旋轉180°作圖得到的重心G_3，與G是同一點。

$$\frac{G_1+G_2}{2}=\left(\frac{\frac{\frac{\frac{3(c^2-(b-a)^2)}{2b}+6b}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(-6b\times\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+6b\times\frac{-(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(-c^2+(b+a)^2)}{2b}}{3}}{3}}{2},\frac{\frac{\frac{\frac{3c(b-a)}{b}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c(b+a)}{b}}{3}}{3}}{2}\right)=(0，0)$$

5. 順時針旋轉鏡像作圖(圖2-5)，

由D_4、E_4、F_4找出G_4 $\left(\frac{\frac{6b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{3(c^2+(b+a)^2)(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3},\frac{3c+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c(c^2+(b+a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$

6. 逆時針旋轉鏡像作圖(圖2-6)

由D_5、E_5、F_5找出G_5 $\left(\frac{\frac{6b+\frac{3(c^2+(b-a)^2)(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{3c(c^2+(b-a)^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+c}{3}\right)$

7. 相似三角形旋轉180°，外面的三個三角形再鏡像旋轉(圖2-7)

由D_6、E_6、F_6找出G_6 $\left(\frac{\frac{6b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-6b+\frac{6b(c^2-(b-a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{6b(c^2-(b-a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+-2c+\frac{\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$

8. 把三張圖合併觀察(圖2-8、圖2-9)，發現順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉與轉180°鏡像旋轉得到的重心G_4、G_5、G_6連線得到的△$G_4G_5G_6$的重心與△ABC的重心位置一樣。

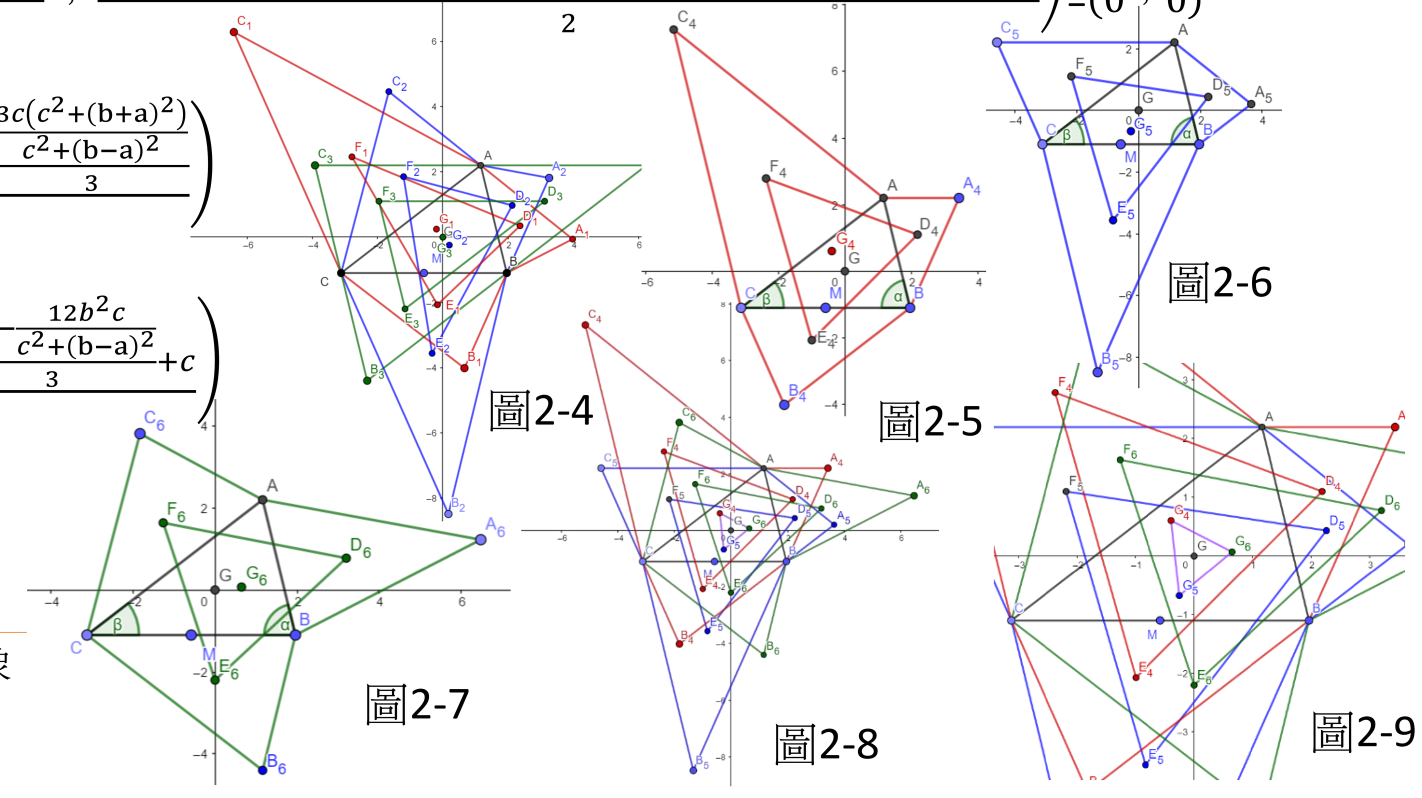


圖2-4 圖2-5 圖2-6 圖2-7 圖2-8 圖2-9

$$\frac{G_4+G_5+G_6}{3}=\left(\frac{\frac{\frac{6b+\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{3(c^2+(b+a)^2)(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{3(c^2+(b-a)^2)(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b-\frac{-3(b^2-a^2-c^2)}{2b}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-6b+\frac{6b(c^2-(b-a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}}{3},\frac{\frac{3c+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c(c^2+(b+a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c(c^2+(b-a)^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c-\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+c}{3}+\frac{\frac{\frac{6b(c^2-(b-a)^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+-2c+\frac{\frac{12bc(b-a)}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}}{3}\right)=(0，0)$$

三. 在拿破崙定理中也可以向內作圖(圖3-1)，在原拿破崙定理中，各邊向內作正三角形，其三個正三角形的重心連線，得到的正三角形的重心與原三角形的重心位置一樣。

任意三角形各邊向內作相似三角形，分順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°作圖。

1.順時針旋轉向內作圖，圖3-2，G_8 $\left(\frac{\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-\frac{3ac}{b}}{3}}{3}\right)$

2. 逆時針旋轉向內作圖，圖3-3，G_7 $\left(\frac{\frac{6b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{3ac}{b}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c((c^2+(b-a)^2)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}\right)$

3. 旋轉180 ̊向內作圖，會完全與△ABC重合，所以重心是同一點，圖3-4。

4. 將順時針旋轉向內作圖與逆時針旋轉向內作圖合併(圖3-5)，發現順時針向內作圖的重心G_8與逆時針作圖的重心G_7中點與原三角形的重心一樣。

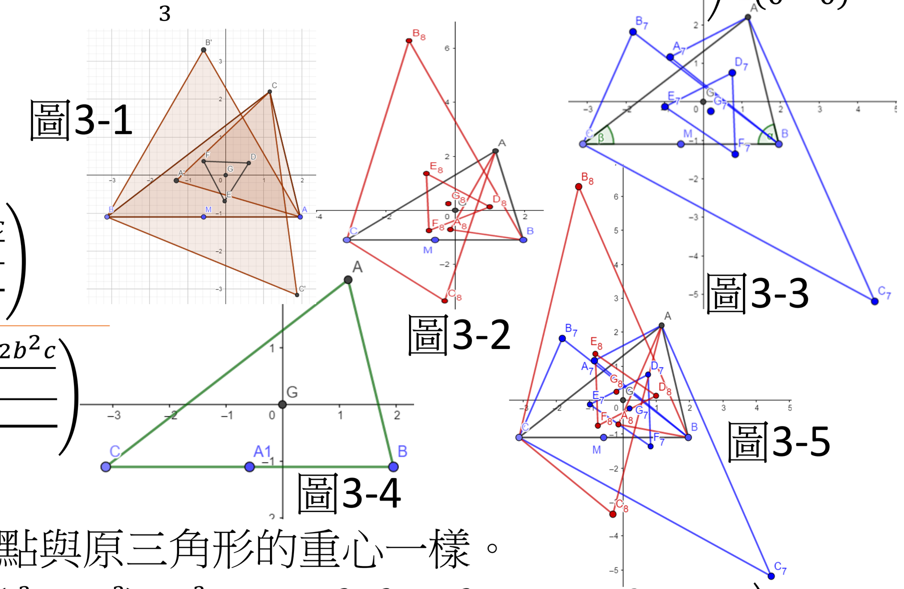


圖3-1 圖3-2 圖3-3 圖3-4 圖3-5

$$\frac{G_7+G_8}{2}=\left(\frac{\frac{\frac{6b-\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}+\frac{-3a-3b-\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\left(\frac{-3(a+b)(b^2-a^2-c^2)+6bc^2}{c^2+(b-a)^2}\right)}{3}}{3}+\frac{\frac{6b+\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-6bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3a+3b+\frac{6b(b^2-a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{3(b^2-a^2+c^2)}{2b}}{3}}{3}}{2},\frac{\frac{\frac{\frac{3ac}{b}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{\frac{3c((c^2+(b-a)^2)-12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c((b+a)^2+c^2)-12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-\frac{3ac}{b}}{3}}{3}}{2}\right)=(0，0)$$

任意三角形各邊向內作相似三角形，順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°作圖後再鏡像旋轉。

5. 順時針向內鏡像作圖(圖3-6) G_x $\left(\frac{\frac{6b-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{3a-3b+\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}-3c}{3}+0}{3}\right)$

6. 逆時針向內鏡像作圖(圖3-7) G_y $\left(\frac{\frac{6b-\frac{9((b-a)^2+c^2)}{6b}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b-a)^2)}}{3}}{3},\frac{0+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}}{3}\right)$

7. 旋轉180°向內鏡像作圖(圖3-8) G_z $\left(\frac{\frac{6b-\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-2ac^2}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{-6b+\frac{(a+b)(a^2-b^2+c^2)+2bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{3c(-b^2-2ab+3a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}\right)$

8. 將順時針旋轉向內鏡像作圖、逆時針旋轉向內鏡像作圖和旋轉180°向內鏡像作圖，三張圖合併後得到的重心G_x、G_y、G_z連線得△$G_xG_yG_z$，△$G_xG_yG_z$重心恰為原三角形的重心G(圖3-9、圖3-10)。

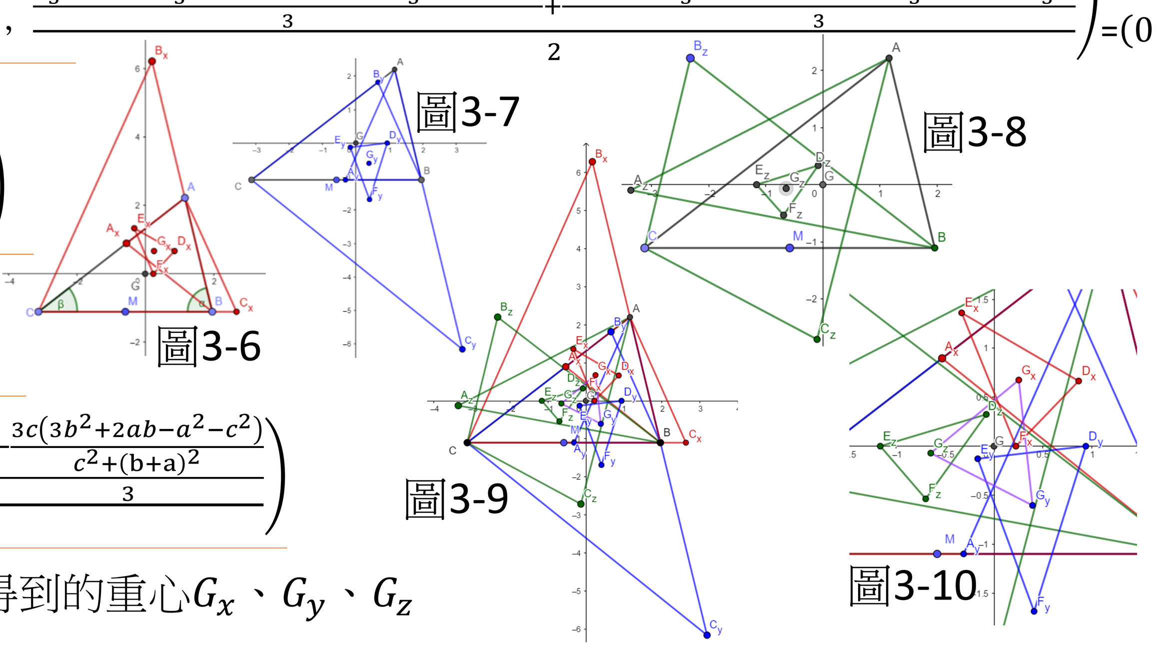
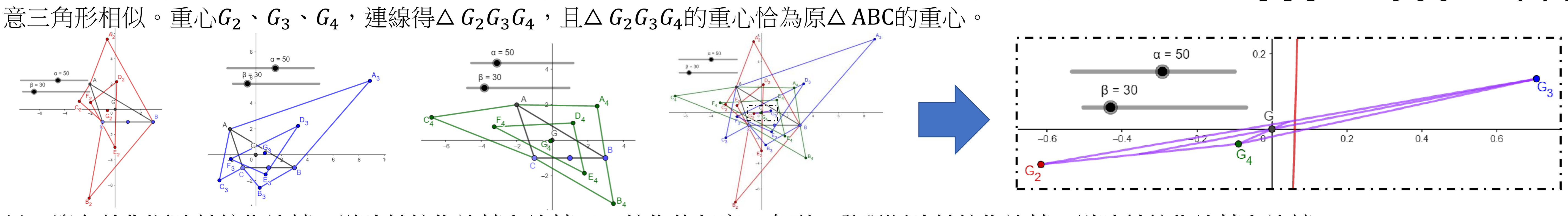


圖3-6 圖3-7 圖3-8 圖3-9 圖3-10

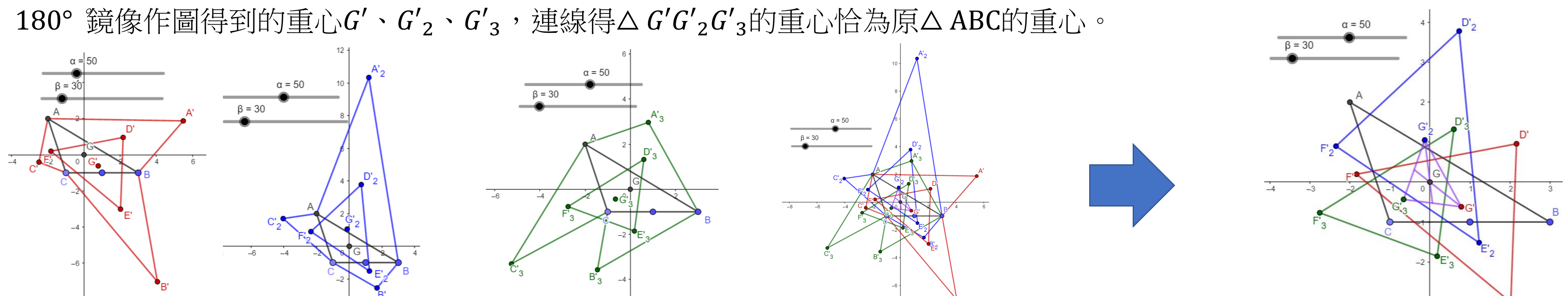
$$G\left(\frac{\frac{\frac{6b-\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{-3a+3b-\frac{12b^2(b-a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{3a-3b+\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}}{3}+\frac{\frac{3a-3b-\frac{-9(b^2-a^2-c^2)}{6b}}{3}+\frac{-3a-3b+\frac{12b^2(b+a)}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-6b+\frac{6b(c^2+b^2-a^2)}{(c^2-(b-a)^2)}}{3}}{3}+\frac{\frac{6b-\frac{3(b-a)(b^2-a^2-c^2)-2ac^2}{c^2+(b-a)^2}}{3}+\frac{-6a}{3}+\frac{-6b+\frac{(a+b)(a^2-b^2+c^2)+2bc^2}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}}{3},\frac{\frac{\frac{\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}+\frac{\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}-3c}{3}+0}{3}+\frac{0+\frac{-3c+\frac{12b^2c}{c^2+(b+a)^2}}{3}+\frac{-\frac{6b(2ac)}{(c^2+(b+a)^2)}}{3}}{3}+\frac{\frac{\frac{3c(-b^2-2ab+3a^2-c^2)}{c^2+(b-a)^2}}{3}+0+\frac{-\frac{3c(3b^2+2ab-a^2-c^2)}{c^2+(b+a)^2}}{3}}{3}}{3}\right)=(0，0)$$

四.如果作外面的三個三角形不與原三角形相似，但這三個三角形彼此互相相似。以三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形：

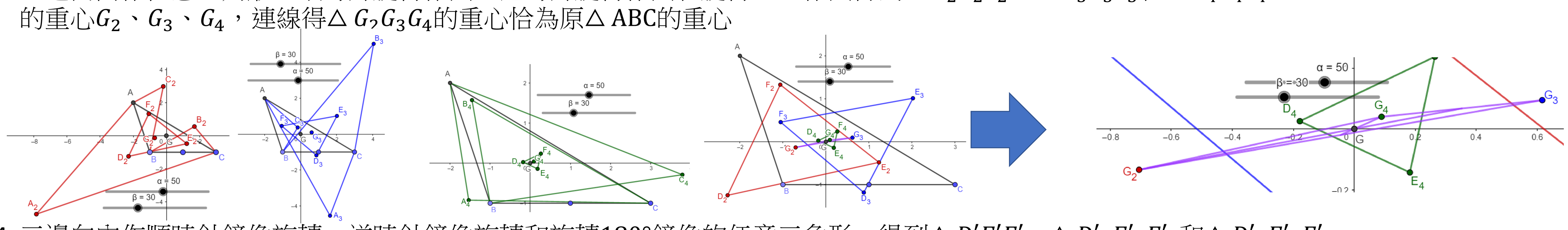
1. 順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖的任意三角形，發現順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°作圖得到△$D_2E_2F_2$、 △$D_3E_3F_3$和△$D_4E_4F_4$與向外作的任意三角形相似。重心G_2、G_3、G_4，連線得△$G_2G_3G_4$，且△$G_2G_3G_4$的重心恰為原△ABC的重心。



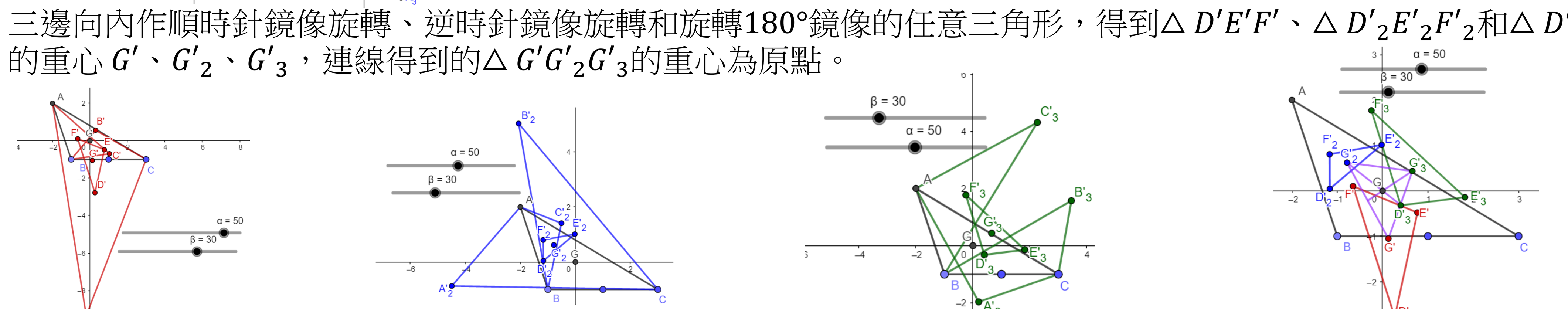
2. 以三邊向外作順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180°鏡像的任意三角形，發現順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180° 鏡像作圖得到的重心G'、G'_2、G'_3，連線得△$G'G'_2G'_3$的重心恰為原△ABC的重心。



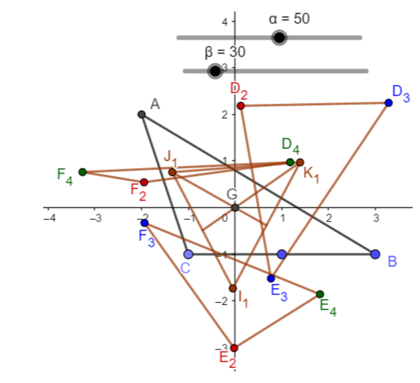
3. 三邊向內作任意三角形，順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖得到△$D_2E_2F_2$、△$D_3E_3F_3$和△$D_4E_4F_4$的重心G_2、G_3、G_4，連線得△$G_2G_3G_4$的重心恰為原△ABC的重心



4. 三邊向內作順時針鏡像旋轉、逆時針鏡像旋轉和旋轉180°鏡像的任意三角形，得到△$D'E'F'$、△$D'_2E'_2F'_2$和△$D'_3E'_3F'_3$的重心G'、G'_2、G'_3，連線得到的△$G'G'_2G'_3$的重心為原點。



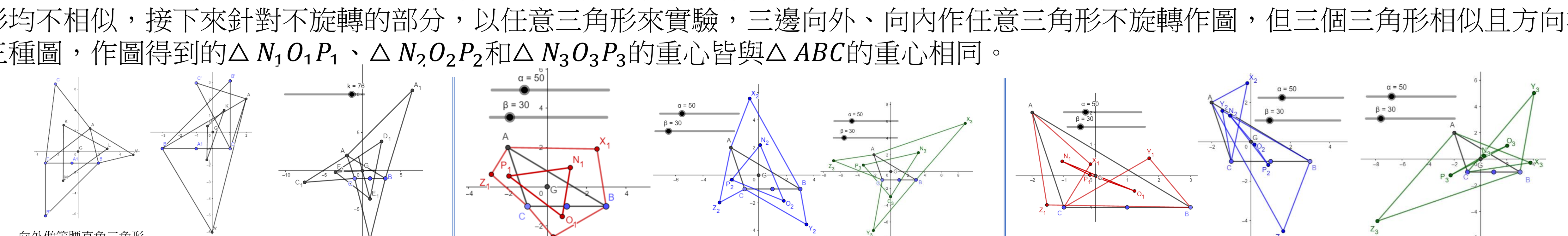
5. 這是以三邊向外作與原三角形不相似的任意三角形，順時針、逆時針、180°旋轉，只留D、E、F共計九點，任意選三點為一組，共分三組，但不重複選，各組連線形成三角形的重心再連線，形成中間三角形重心必與原三角形重心重合。



$$G=\frac{I+J+K}{3}=\frac{\frac{E_2+E_4+F_3}{3}+\frac{D_4+F_2+F_4}{3}+\frac{D_2+D_3+E_3}{3}}{3}=\frac{\frac{D_2+D_3+D_4}{3}+\frac{E_2+E_3+E_4}{3}+\frac{F_2+F_3+F_4}{3}}{3}$$

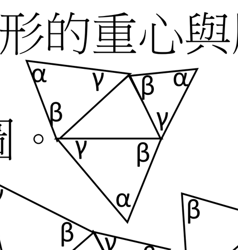
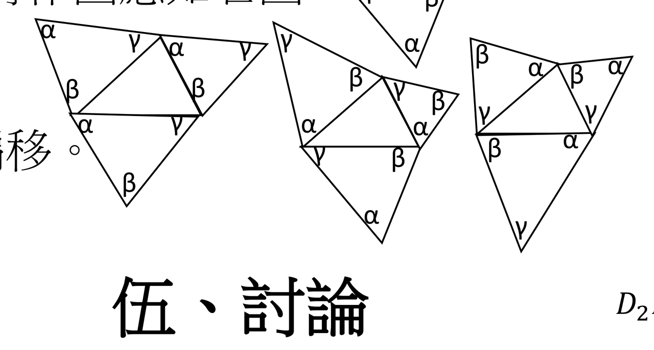
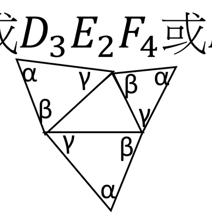
6. 文獻中探討作對應旋轉、正多邊形，但對於不旋轉的三角形，無相關討論。

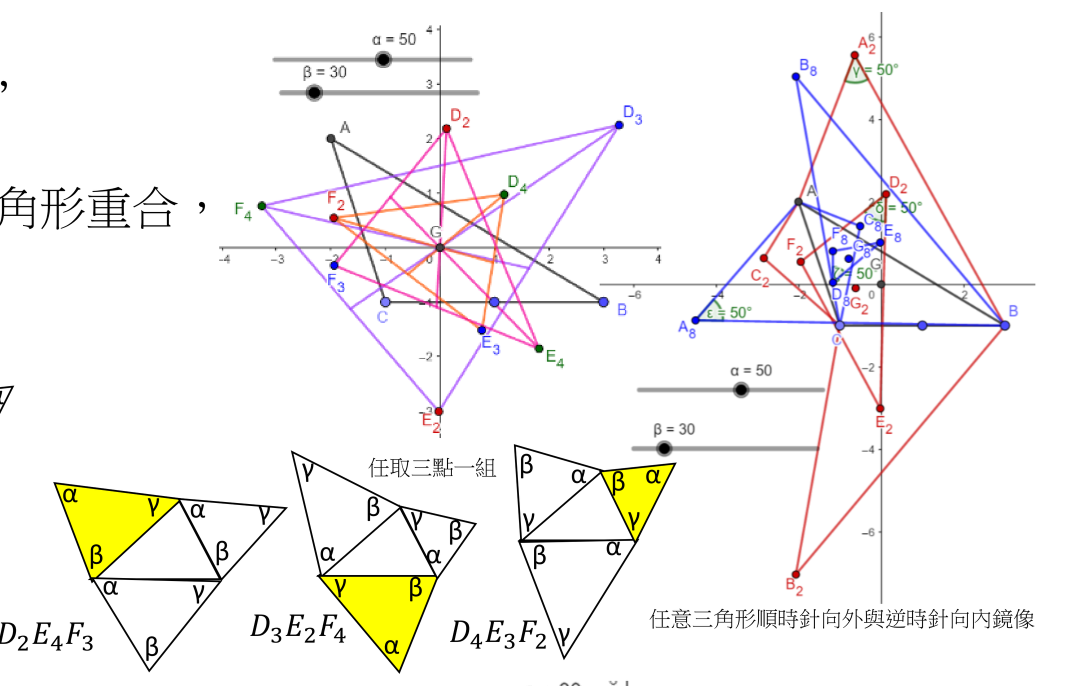
嘗試在任意三角形的三邊向外作等腰三角形、等腰直角三角形和向內作等腰直角三角形，作圖所得的中間三角形重心皆與原三角形重合，但中間三角形與三邊所作的三角形均不相似，接下來針對不旋轉的部分，以任意三角形來實驗，三邊向外、向內作任意三角形不旋轉作圖，但三個三角形相似且方向相同，此作圖向外及向內各有三種圖，作圖得到的△$N_1O_1P_1$、△$N_2O_2P_2$和△$N_3O_3P_3$的重心皆與△ABC的重心相同。



向外做等腰直角三角形 向內做等腰直角三角形 向外做等腰三角形

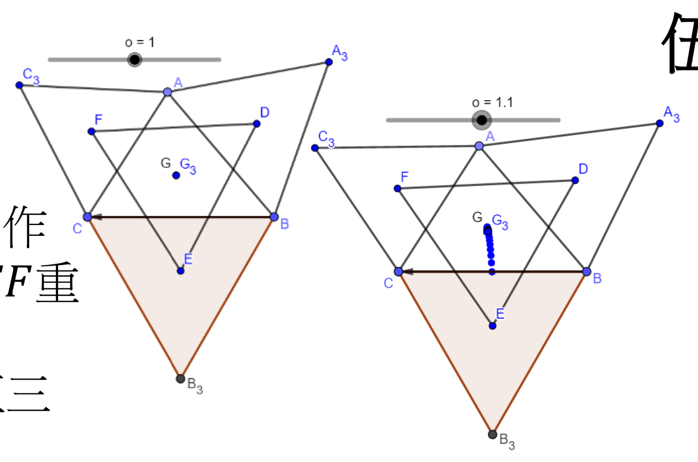
7. 順時針向外與逆時針向內鏡像互為對稱，其對應頂點及對應三角形的重心皆為相同角度，例如：$\angle A_2$、$\angle D_2$、$\angle A_8$、$\angle D_8$皆相等，且兩圖所畫出的中間三角形會產生對應相似。

8. 在第五點中任取三點一組的情況中取$D_2E_4F_3$或$D_3E_2F_4$或$D_4E_3F_2$則此三角形的重心與原三角形重合，此情況等於上述第六點的情況。
若三邊不旋轉作圖的三角形角度為α、β、γ，則三邊不旋轉作圖應如右圖。

則順時針旋轉、逆時針旋轉、旋轉180°作圖應如右圖。

取$D_2E_4F_3$或$D_3E_2F_4$或$D_4E_3F_2$的情況即為最右圖。
此時形成  即三邊不旋轉狀態，故最後重心不偏移。

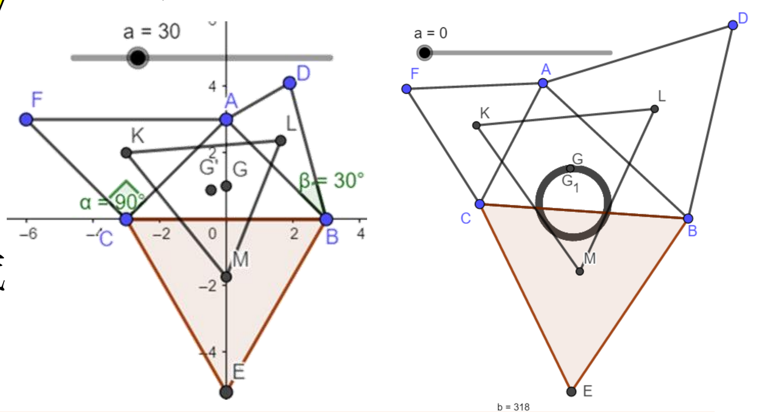


伍、討論

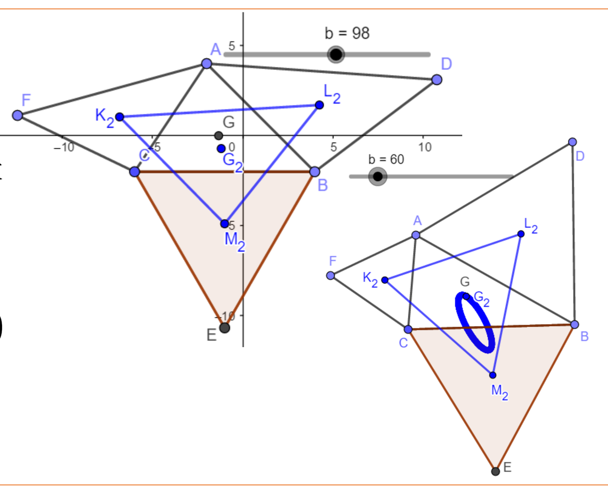
一、維持60度角向外延伸
$\triangle ABC$的$\overline{AC_3}$為$\overline{AC}\times o$，$\overline{AA_3}$為$\overline{AB}\times o$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle DEF$重心為G_3。
只有在$o=1$時，就是三邊做正三角形的情況，G_3會跟G重合。



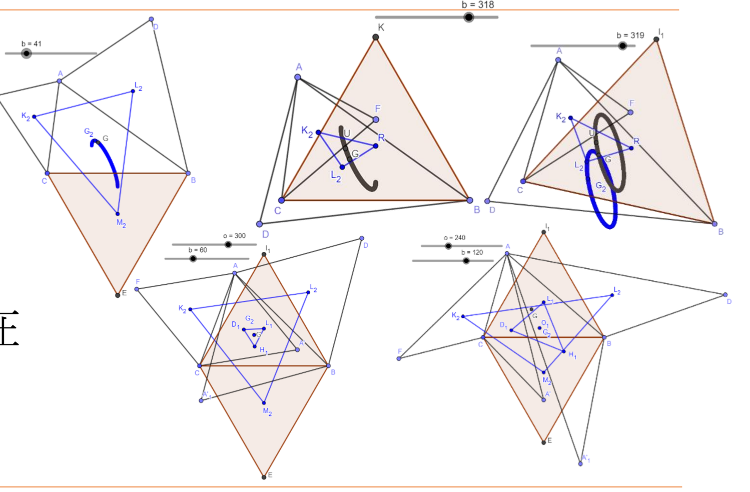
二、兩邊旋轉總和固定
$\triangle ABC$的$\overline{AB}$旋轉$(60-a)°$，$\overline{AC}$旋轉$(60+a)°$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle LMK$重心為G_1。
變數a為0 ~ 360，觀察改變a值後的G_1形成一圓圈，且在a = 0時，就是三邊做正三角形的情況重心G會與G_1重合。



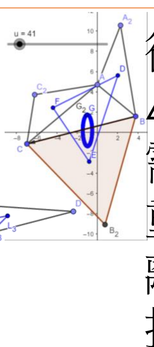
三、兩邊向外旋轉相同角度
$\triangle ABC$的$\overline{AB}$，$\overline{AC}$旋轉$b°$，$\overline{BC}$作正三角形。三邊作的三角形重心連線得到的$\triangle L_2M_2K_2$重心為G_2。
變數b為0 ~ 360，觀察改變b值後的G_2位置形成一橢圓，且在b = 60時，就是三邊做正三角形的情況，原三角形的重心G會與G_2重合



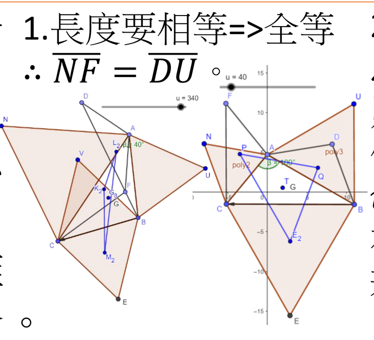
$\overline{AB}$，$\overline{AC}$旋轉旋轉相同角度向外作圖，在$b>180$時$\overline{AB}$、$\overline{AC}$會變向內作圖，把正三角形向內與向外皆做一個，將兩個正三角形的重心分別與L_2、M_2連線，向外作圖得到的重心為G_2軌跡為藍色，向內作圖得到的重心為U軌跡為黑色。而兩橢圓的兩交點分別為在b = 60，o = 300、(回到原重心)兩軌跡重疊時有另一交點 b = 120，o = 240會相交。



四、兩邊以原邊長做全等三角形$\triangle ABC$的$\overline{AB}$，$\overline{AC}$做全等三角形，$\overline{BC}$作正三角形，將三個三角形的重心連線得到$\triangle DEF$的重心為G_3。觀察改變u值後的G_3位置形成一橢圓，且在u大約等於41時，原三角形的重心G會與G_3重合。



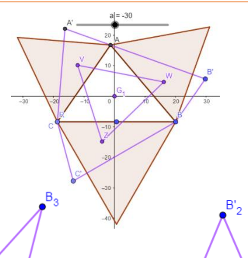
從圖中觀察，作圖得到的重心要回到$\triangle ABC$的重心也就是N=>F，D=>U，需要移動相同距離且方向相反，所以重心P、Q會移動。如果移動相同距離且方向相反則視為不偏移，即距離抵銷，則$\triangle QE_2P$的重心T會與G重合。



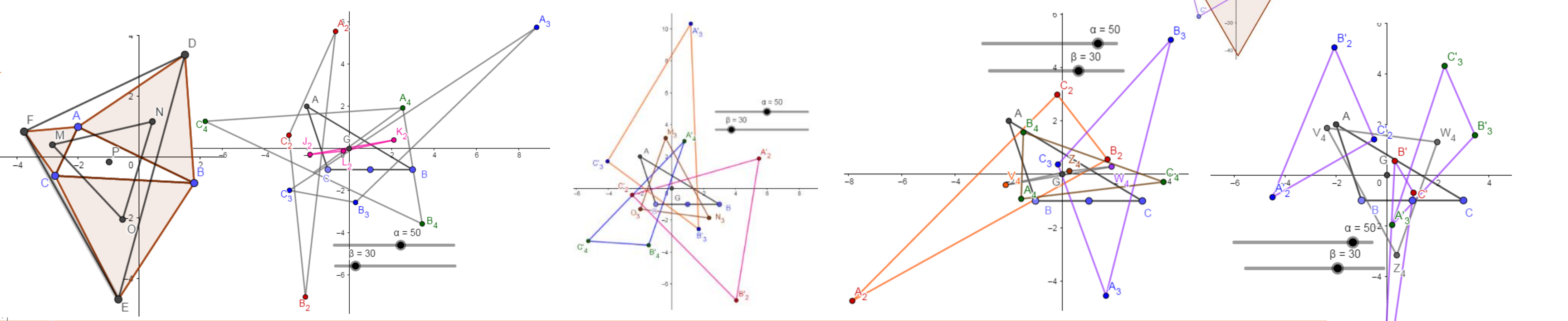
1.長度要相等=>全等
$\therefore \overline{NF}=\overline{DU}$。

2.方向要剛好相反=>平行，
$\angle FCA=u°$，而$\angle BAC=\beta°$，
則$\angle ACB+\angle ABC=(180-\beta)°$，且$\angle ABU=60°$
假設$\overline{FC}\parallel\overline{UB}$，則$u°+(180-\beta)°+60°=180°$，
$u=\beta-60$。
在$u=\beta-60$時，$\overline{NF}$與$\overline{DU}$平行且等長，重心G_3與G重合。
若$\beta<60$時，則$u=360-(60-\beta)$時，G_3才與G重合。

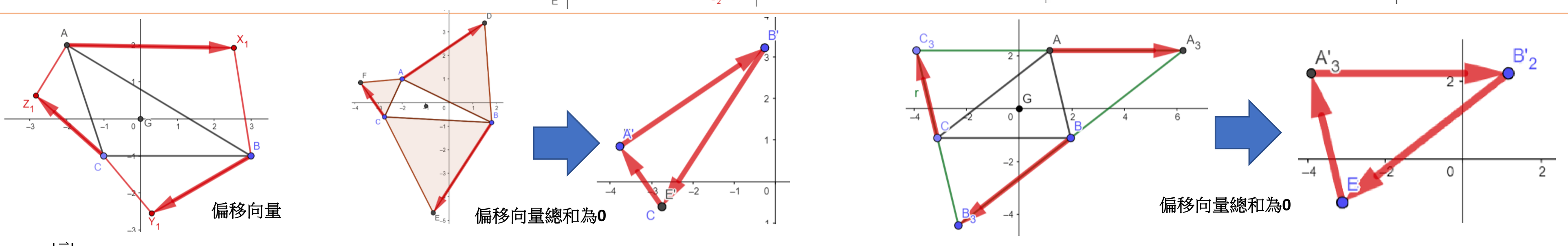
五、三邊長各自向外旋轉同度數
$\triangle ABC$的$\overline{AB}$、$\overline{AC}$和$\overline{BC}$旋轉$(60+a)°$，發現三邊旋轉相同角度後得到的三個三角形，重心連線後得到$\triangle WZV$的重心會與$\triangle ABC$的重心位置重合。
(和我們的三邊相似不旋轉是一樣的結果)



六、在拿破崙定理中，發現將三邊向外作的正三角形最外面的頂點連線，得到的三角形的重心會與原三角形重心重合。如果改以三邊向外做任意三角形時，順時針、逆時針得到的三角形的重心與旋轉180°做圖的重心，連線後得到的三角形的重心與原三角形的重心重合。

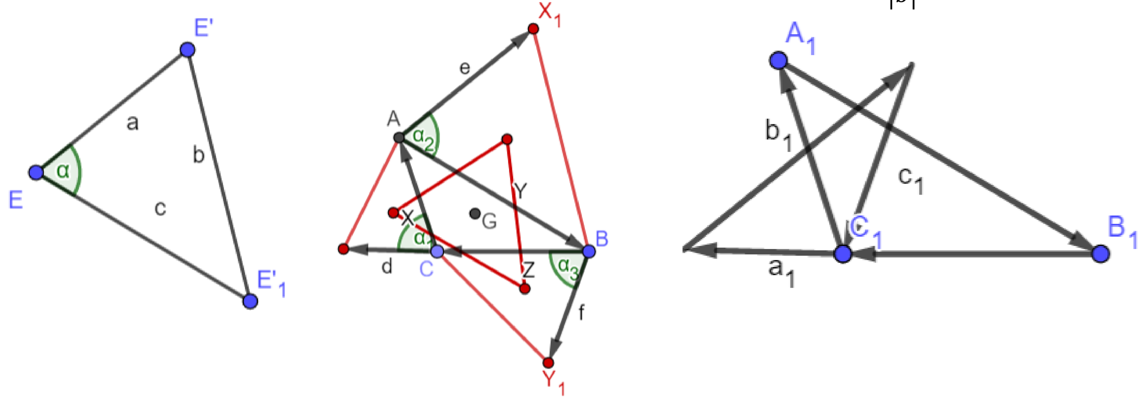


七、將向外作圖的三角形頂點與原三角形的距離做成頂點偏移的向量，若向外做的三頂點平均要和原重心重合，也就是說三個偏移向量的總和必須為0。

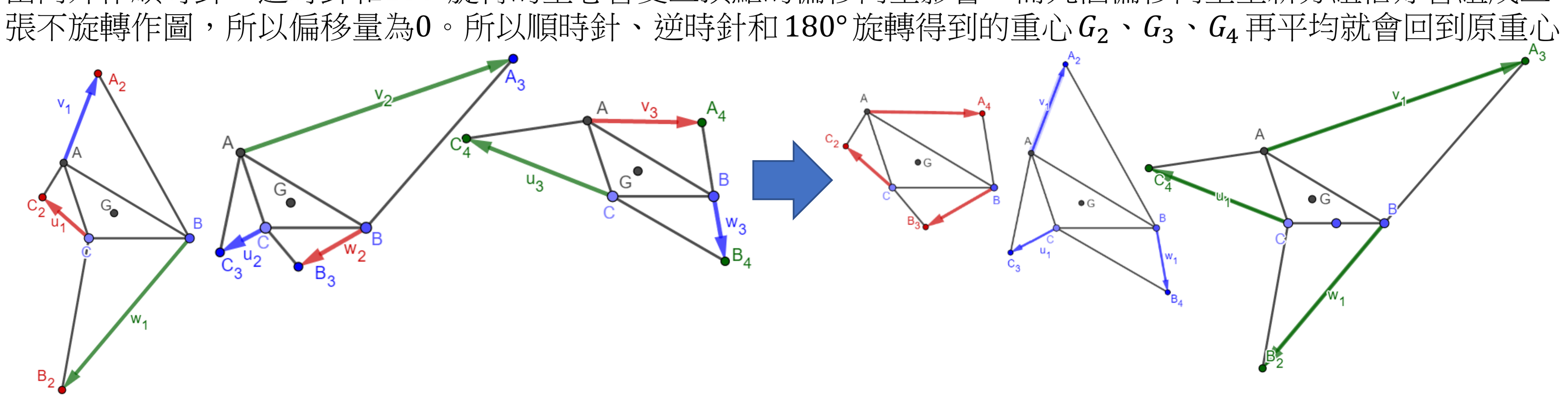


$$\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\alpha\left(\vec{X}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)+\alpha\left(\vec{Y}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)+\alpha\left(\vec{Z}\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)=\alpha\times\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\left(\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}\right)=0$$

所以三邊的偏移量和為0，且偏移量組成的三角形為原三角形縮小$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$倍逆時針旋轉α°。



由向外作順時針、逆時針和180°旋轉的重心會受三頂點的偏移向量影響，而九個偏移向量重新分組恰好會組成三張不旋轉作圖，所以偏移量為0。所以順時針、逆時針和 180° 旋轉得到的重心G_2、G_3、G_4再平均就會回到原重心。



	作圖方法	中間三角形	重心重合	特例
原拿破崙定理	三邊向外做正三角形的重心連線得到的三角形	正三角形	三邊向外做正三角形的重心連線得到的三角形重心與原三角形重合。	
向外做相似三角形 向外作任意三角形	將順時針、逆時針、旋轉180°與不旋轉作圖得到的重心再連線後得到的三角形。	1. 順時針、逆時針與旋轉180°作圖彼此相似。 2. 除了鏡像作圖和不旋轉作圖外，其餘中間三角形皆與三邊作的三角形相似。	順時針、逆時針與旋轉180°作圖得到的重心再連線後得到的三角形，此三角形的重心會與原三角形重合。	1.向外、向內作相似三角形，向外旋轉180°與向內180°得到的重心會直接與原三角形重心重合 2.不旋轉作圖的重心會直接與原三角形重心重合
向內做相似三角形 向內作任意三角形	順時針、逆時針、旋轉180°與不旋轉向內作圖得到的重心再連線後得到的三角形	1. 順時針、逆時針與旋轉180°作圖彼此相似 2. 除了鏡像作圖與三邊作的三角形相似，其餘中間三角形皆與三邊作的三角形不相似。		

陸、結論

一. 拿破崙定理改用30°–60°–90°直角三角形三邊向外作圖且原三角形也為30°–60°–90°直角三角形
1. 用不旋轉作圖得到中間三角形的重心會是原三角形的重心。
2. 順時針旋轉作圖與逆時針旋轉作圖的中間三角形的重心連線中點為原三角形重心，旋轉180°作圖的中間三角形重心不偏移。
3. 順時針旋轉鏡像作圖、逆時針旋轉鏡像作圖和旋轉180°鏡像作圖的中間三角形重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
4. 順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖得到中間的三角形一定是30°–60°–90°直角三角形。
5. 鏡像後中間三角形均不是30°–60°–90°直角三角形，但順時針旋轉鏡像作圖、逆時針旋轉鏡像作圖和旋轉180°鏡像作圖的中間三角形彼此相似。

二. 改用任意三角形三邊向外和向內作原三角形的相似三角形作圖
1. 順時針旋轉作圖與逆時針旋轉作圖的中間三角形的重心連線中點為原三角形重心，旋轉180°作圖的中間三角形重心不偏移。
2. 順時針旋轉鏡像作圖、逆時針旋轉鏡像作圖和旋轉180°鏡像作圖的中間三角形重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°向外作圖得到的中間三角形與原三角形相似，但向外鏡像作圖的中間三角形與原三角形不相似。
4. 順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°向內作圖得到的中間三角形與原三角形不相似，但向內鏡像作圖的中間三角形與原三角形相似。

三. 三邊向外和向內作與原三角形不相似的任意三角形
1. 順時針旋轉作圖、逆時針旋轉作圖和旋轉180°作圖的中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
2. 順時針旋轉鏡像作圖、逆時針旋轉鏡像作圖和旋轉180°鏡像作圖的中間三角形的重心連線，得到的三角形重心與原三角形重心重合。
3. 順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°向外作圖得到中間的三角形與向外作的任意三角形相似，但向外鏡像作圖不相似。
4. 順時針旋轉、逆時針旋轉和旋轉180°向內作圖得到的中間三角形與向內作的任意三角形不相似，但向內鏡像作圖相似。

四. 三邊向外作相似的任意三角形(與原三角形不一定相似)，分別得到三個三角形的重心。
1. 任取三點一組連線，共三組，形成的三角形重心再連線，得到的三角形重心與原三角性重心重合。
2. 在多種連線方式中只有3種連線的三角形的重心會直接與原三角形重心重合。

五. 三邊向外作不旋轉的任意三角形
1. 三邊所作的三角形的重心連線得到的三角形重心與原三角形重心重合。

六. 向外作圖(非鏡像)的中間三角形均與作圖的三角形相似，向內作圖則是鏡像作圖的中間三角形與作圖的三角形相似。

中間三角形與三邊作圖	正常(沒鏡像)	鏡像
向外作圖	相似	沒相似
向內作圖	沒相似	相似

七. 任意三角形作不旋轉，得到的中間三角形重心不偏移，中間三角形和三邊所作的三角形、原三角形不相似。
但將三邊所作的三角形以不同方向作圖時，所產生的中間三角形彼此會相似。

八. 如果頂點連線的三角形的重心與原三角形重心會重合，則三邊所做的三角形的重心連線三角形重心也會與原三角形重心重合。

九. 三個頂點的位移量和為0，也就是三個頂點的位移量可以組合成三角形，則三邊所做的三角形的重心連線三角形重心也會與原三角形重心重合。
當不旋轉作圖時的偏移向量組成的三角形會與原三角形相似，包含拿破崙定理也是。

柒、未來展望

一. 由不定角α與邊長推算單一偏移向量並延伸到重心偏移量。
二. 將所作的所有圖形皆以數學式呈現。
三. 將偏移向量的概念延伸到與拿破崙多邊形結合。

參考資料

•Sgod，拿破崙定理，心裡有數https://mathmind.idv.tw/main/index.php/2012-04-10-04-51-42/9-math/8-napoleon-thm
•陳致安、朱建威、陳揚叡(2006)。拿破崙三角形與畢氏定理的聯想。第 46 屆全國中小學科展國中數學科作品。
•許翰翔(2013)拿破崙的四角戀-----將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討。第53屆全國中小學科展國中數學科作品。
•徐啓惇、楊宗諺、吳承諺(2018)。從零開始 -初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討。第58屆全國中小學科展國中數學科作品。
•黃家冠(2015)。拿破崙定理對多邊形之推廣。第55屆全國中小學科展國中高中數學科作品。
•Weisstein, Eric W.，Napoleon's Theorem，https://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html