# 中華民國第60屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

國中組　數學科

030408

## 拈系列數學遊戲的研究

學校名稱：花蓮縣慈濟大學附屬高級中學(附設國中)

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國二 周奕含<br>國二 鄭采瑜<br>國二 鄭文盛 | 江炳宏<br>鄧汶 |


關鍵詞：拈、數列、遞迴式

# 摘要

我們整理了拈的最基本問題。並對拈的變形問題「k 倍拈」(有 n 顆子，n>1，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後兩人每次拈最多為對手前次拈的 k 倍，拈最後一子勝 )，得到了完全解答，令$a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots, a_k = k+1$，且(對於$n > k$，令$a_n = a_{n-1} + a_{m(k,n)}$，其中$a_{m(k,n)}$是$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$中最小的滿足≥ $\left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$的項，此處$\lceil x \rceil$是 x 的天花板函數，亦即，不小於 x 的最小整數)，則當開始時的全部子數為$a_1, a_2, \ldots a_n$中的任何一項時，後拈者有必勝策略，否則先拈者有必勝策略。特別地，當$k = 2,3,4,5$ 時，k=2,3,4,5 時，$< a_n >$的遞迴式相當簡單。


# 壹、 研究動機

從小玩過 20 顆棋子輪流拿，1 人至多拿 3 顆，拿最後 1 顆的人輸，直到再次接觸此遊戲，我們對這個遊戲也有興趣，想找找看這種遊戲是否有必勝攻略，以及如果將拈遊戲變形，又會如何？

# 貳、 研究目的

希望能從科展活動中，學習嚴格研究數學的方法，及找到一些規律。

# 參、 研究設備及器材

白板、紙、筆、白板筆、電腦、圍棋子

# 肆、 研究過程或方法

先分配主題，各自去找解法、資料，約定時間共同討論。

# 伍、 研究結果

我們整理了拈的最基本問題。並對拈的變形問題「k 倍拈」(有 n 顆子，n>1，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後兩人每次拈最多為對手前次拈的 k 倍，拈最後一子勝)，得到了完全解答，令$a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots, a_k = k+1$，且(對於 n>k，令$a_n = a_{n-1} + a_{m(k,n)}$，其中$a_{m(k,n)}$是$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$中最小的滿足≥ $\left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$的項，此處$\lceil x \rceil$是 x 的天花板函數，亦即，不小於 x 的最小整數)，則當開始時的全部子數為$a_1, a_2, \ldots a_n$中的任何一項時，後拈者有必勝策略，否則先拈者有必勝策略。特別地，當$k = 2,3,4,5$ 時，k=2,3,4,5 時，$< a_n >$的遞迴式相當簡單。

## 陸、 討論(參見補充說明一、二、三、四)

我們一開始時討論了三個拈系列的問題：

1. n 顆子，A、B 輪流拈，A 先，每次最多b顆，拈最後一子者勝。

2. n 顆子，A、B 輪流拈，A 先，每次最多b顆，拈最後一子者負。

3. n 顆子，n > 1，A、B 輪流拈，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的兩倍，拈最後一子者勝。

然後我們將上面問題 3. 中的2倍改為 k 倍，且其他規則不變。

## 柒、 結論(參見補充說明一、二、三、四)

1. n 顆子，A、B 輪流拈，A 先，每次最多b 顆，拈最後一子者勝。

結論為：若b+ 1 | n，則B 勝。其他情況為A 勝。(證明見補充說明一)

2. n 顆子，A、B 輪流拈，A 先，每次最多b 顆，拈最後一子者負。

結論為：若b+ 1 | n − 1，則B 勝。其他情況為A 勝。(證明見補充說明二)

3. n 顆子，n>1，A、B 輪流拈，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的2倍，拈最後一子者勝。(證明見補充說明三)

結論為：B 有必勝策略若且唯若開始全部子數是以 2,3 開頭的費波納西數列.

4. 若將上面問題 3. 中的兩倍改為k 倍，且其他規則不變時，則

- 當 k = 3 時，B 有必勝的策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 6,$ 且對於 $n \geq 5, a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$

- 當 k = 4 時，B 有必勝的策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 9, a_7 = 12,$ 且對 $n \geq 8, a_n = a_{n-1} + a_{n-6}$

- 當 k = 5 時，B 有必勝的策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 10, a_8 = 12, a_9 = 15,$

  而且對於 $n \geq 10, a_n = a_{n-1} + a_{n-8}$

- 對於 k≥6，沒有如 k=2,3,4,5 時一樣的簡單遞迴式。但我們得到了對一般的 k (包含 k=2,3,4,5 的情況)的完全解答。令 $a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots, a_k = k + 1$，且對於 $n > k$，令 $a_n =$

$a_{n-1}+a_{m(k,n)}$，其中$a_{m(k,n)}$是$a_1,a_2,\dots a_{n-1}$中最小的滿足≥$\left\lceil\frac{a_{n-1}}{k}\right\rceil$的項，此處$\lceil x\rceil$是x的天花板函數，亦即，不小於x的最小整數)，則當開始時的全部子數為$a_1,a_2,\dots a_n$中的任何一項時，後拈者有必勝策略，否則先拈者有必勝策略。特別地，當$k=$ 2,3,4,5時，k=2,3,4,5時，$\langle a_n\rangle$的遞迴式相當簡單。(證明見補充說明四)

## 捌、 參考資料及其他

參考資料：


1. 基礎數學，周君彥，民105.02，作者自行出版，ISBN 978-957-43-3320-2
2. 維基百科上的網頁 https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_nim


其他(待延伸問題)：

1. 我們有了拈的基本型規則，也就是每人至多拈 b 子的必勝策略；也有拈的變形規則，也就是至多拈前次的 k 倍之必勝策略，可嘗試延伸線性組合，也就是除了第一次外，每次至多拈前次的 k 倍加 b 子。
2. 可嘗試用「動態規劃」程式 dynamic programming 作為數列的檢驗。

## (補充說明一：拈的最基本問題 1 的證明)

當規則為n 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多b 顆，拈最後一子者勝。

最原始為 20 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多3 顆，拈最後一子者勝。

此遊戲中，每次不管A 拈多少，B 都可做到(該次A 與B 拈的子數和為4)，隨之，每回合都被拈走 4 子，最後一回合開始剩$20-4*4=20-16=4$ 子，則A 不管怎麼拈，B 都能確定可拈到最後一顆子。

我們發現到，3+1=4 整除20 是關鍵，亦即，數學式寫成$3+1|20$。

於是我們猜想：是不是只要b+1 | n，也會有類似的情形呢？

的確，每次不管A 拈多少，B 都可做到(該次A 與B 拈的子數和為$n+1$)，隨之，每回合都被拈走 b+ 1 子，最後一個回合開始剩$n-(b+1)\left(\frac{n}{b+1}-1\right)=b+1$子，則 A 不管怎麼拈，

B 都能確定可拈到最後一顆子。

所以我們發現: 若 $b+1|n$，則 B 勝, 亦即, 後拈的人勝。

那麼其他情況呢？我們發現，只要b+1 不整除n，那麼由除法可知，$n=(b+1)q+r$ 式子中的餘數 r 一定會小於b+1，也就是說，正數r 會小於等於b，所以A 一開始是可以拈走 r 顆子的。

這樣一來，如果A 一開始就拈走r 顆子，則剩下$n-r$ 顆子，此時$b+1$ 整除$n-r$，而且 A 和 B 的先拈後拈的角色互換，變成A 是後拈的人，故 A 會勝！

所以我們整理了「有 n 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多 b 顆，拈最後一子者勝」的問題，結論是： 若 $b+1|n$，則 B 勝。其他情況為 A 勝。

## (補充說明二 ： 拈的最基本問題 2 的證明)

當規則為 n 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多 b 顆，拈最後一子者負。

我們觀察到：如果 B 有辦法保證可以拈到最後第2 顆子，那麼剩下最後一子不就是 A 拿嗎？

所以，先想像成「把 n 顆子中的任何 1 顆子放在拈不到的地方，則剩下 $n-1$ 顆子可以拈」。

這樣一來，不就變成「$n-1$ 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多b 顆，拈最後一子者勝」的情況了嗎？

由(補充說明一)，我們知道，當 $b+1|n-1$ 時是 B 勝，其他情況是 A 勝。所以我們也整理了「m 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，每次最多n 顆，拈最後一子者負」的問題，結論是： 若 $b+1|n-1$，則 B 勝。其他情況為 A 勝。

我們從補充說明一、二當中發現到如果我們可以掌握拈最後一子勝的規則，則當規則改為拈最後一子負時，也能有簡單的推導方式，故之後的討論規則皆可假設為拈最後一子勝。

## (補充說明三 ：「2 倍拈」(費波納西數列)的證明)

當規則為有 n 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的兩倍，拈最後一子者勝。

我們以一個一個的「開始時的子數」依由小到大的順序去討論如下。

1 顆子的情況不可玩，因為 A 不能全拈。

2 顆子的情況：B 後拈勝。理由：因為 A 不能全拈，且當 A 拈 1 顆使 B 拈最後 1 顆，因此 2 顆子時 B 後拈勝。

3 顆子的情況：B 後拈勝。理由：因為 A 不能全拈，且當 A 拈 1 顆或2顆能使 B 拈最後 1 顆，因此 3 顆子時 B 後拈勝。

特別地，有以下引理。

引理1：若留 3 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

4 顆子的情況：A 先拈 1 顆則勝。理由：A 先拈 1 顆，此時留 3 顆子且換成 B 先拈且無法全部拈，故由引理 1 知A 勝。

5 顆子的情況：B 後拈勝。理由：若 A 先拈大於等於 2 顆，B 便能全部拈，故 A 只能先拈 1 顆。當A 拈 1 顆子時，B 再拈 1 顆，此時留 3 顆且換成 A 先拈且無法全部拈，故由引理1 知 B 勝。

特別地，有以下引理。

引理2：若留 5 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

6 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：若 A 先拈 1 顆子，此時剩 5 顆且換成 B 先拈又無法全拈，故由引理2 知 A 勝。

7 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：若 A 先拈 2 顆子，此時剩 5 顆且換成 B 先拈又無法全拈，故由引理2 知 A 勝。

8 顆子的情況：B 後拈勝。理由：若 A 拈多於 2 顆則 B 全拈勝，故 A 最多拈 2 顆。若 A 拈 1 顆，B 拈 2 顆剩 5 顆回到引理2，(此時 A 先拈又不能全拈，) 故 B 勝。若 A 拈 2 顆，B 拈 1 顆剩 5 顆回到引理2，(此時 A 先拈又不能全拈，) 故 B 勝。

特別地，有以下引理。

引理3：若留 8 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

9 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：若 A 先拈 1 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。

10 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：若 A 先拈 2 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。

11 顆子的情況：A 先拈 3 顆勝。理由：若A 先拈 3 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。

12 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：由引理3，在 12 顆子時只要 A 確保自己能成為剩 8 顆的後拈者且對手不能全拈即勝，因此前面的 4 顆是關鍵。若A 拈 1 顆，則此 4 顆子剩 3 顆且 B 不能全拈，由引理1 知，A 會拈到此 4 顆子的最後 1 顆，且能換成後拈剩 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。

13 顆子的情況：B 後拈勝。理由：由引理3，在 13 顆子時只要確保自己能成為剩 8 顆的後拈者且對手不能全拈即勝，因此前面5 顆是關鍵。5 顆子後拈勝，而 A 又不能拈大於等於 5 顆(A 也不能 13 顆全拈故有剩)，否則 B 可全拈剩下的子，但無論 A 拈小於等於 4 顆子，由引理2，知 B 可拈到前面 5 顆子的最後 1 顆而換成剩 8 顆的後拈者，而 A 為先拈又不能全拈。因此 13 顆子時 B 後拈勝。

特別地，有以下引理。

引理4：若留 13 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

討論至此，我們發現到一個規則，若已知「當留下 i 顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，則對於子的數目 p 大於 i 且小於等於 $i+\frac{i-1}{2}$ 的情形，先拈的人只要拈 p-i 顆子，就能留下 i 顆子換成後拈且輪到先拈的人(至多只能拈 i-1 顆) 而不能全拈，故先拈的人拈 p-i 顆勝。

亦即，有以下引理。

引理5：若已知「當留下i 顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，則對於開始時子的數目$\mathrm{i} < \mathrm{p} \leq \mathrm{i}+\frac{i-1}{2}$ 的情形，先拈的人只要拈 $\mathrm{p}-\mathrm{i}$ 顆子會勝。

14 至19 顆子的情況：A 分別對應先拈 1 至 6 顆勝。理由：因為 14 至 19 滿足大於 13 且小於等於 13+6=19，故由引理4 與引理5 得證。

20 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：由引理4，對於 20 顆子時，前面的 7 顆子是關鍵。由引理2 知，對於前面的 7 顆子，A 先拈 2 顆剩 5顆，此時 B 換成先拈者且不能全拈，故 A 必可恰拈到此 7 顆中的最後 1 顆且原先 20 顆剩 13 顆。而此時換成 B 先拈且不能全拈，故由引理4 知 A 勝。

21 顆子的情況：B 後拈勝。理由：由引理4，對於 21 顆子，前面 8 顆是關鍵。若 A 先拈大於等於 7 顆(A 首次不可全拈 21 顆)，則 B 可全拈剩下的子。如此迫使遊戲可以看成 8 顆子的情況且 A 先拈且不能全拈，由引理3 知，B 可恰拈到前 8 顆子的最後 1 顆為止且該次 B 不會拈超過 5 顆子(B 若該次拈 6 顆子，則必為A 拈大於等於 3 顆子，而 3+6>8，不可能)。此時換成剩 13 顆且A 先拈又不能全拈。由引理4 知 B 勝。

特別地，有以下引理。

引理6：若留 21 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

22 至 31 顆子的情況：A 分別先拈 1 至 10 顆勝。理由：因為 22 至 31滿足大於 21 且小於等於 21+10=31，故由引理6 與引理5 得證。

32 顆子的情況：A 先拈 3 顆勝。理由：由引理6，對於 32 顆子，前面 11 顆是關鍵。若 A 先拈 3 顆，此時 11 顆剩 8 顆且換成 B 先拈又不能全拈 8 顆，由引理3，A 能確保恰拈到前面 11 顆中的最後 1 顆為止，此時剩21 顆且換成 B 先拈又不能全拈。由引理6，A 勝。

33 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：由引理6，對於 33 顆子，前面 12 顆子是關鍵。若A 先拈 1 顆，則B 只可拈 1 或 2 顆，此時 A 分別對應再拈 2 或 1 顆，這前面的 12 顆就只剩 8 顆且換成 B 先拈又不能全拈，由引理3，A 能確保恰拈到前面 12 顆中的最後 1 顆為止，此時剩 21 顆且換成 B 先拈又不能全拈。由引理6，A 勝。

34 顆子的情況：B 後拈勝。理由：由引理6，對於 34 顆子，前面 13 顆是關鍵。若A 先拈大於等於 12 顆(A 首次不可全拈 34 顆)，則 B 可全拈剩下的子。如此迫使遊戲可以看成是先看前面 13 顆子的情況且 A 先拈且不能全拈，由引理4 知，B 可恰拈到前 13 顆子

的最後 1 顆為止且該次 B 不會拈超過 9 顆子(B 若該次拈 10 顆子，則必為 A 拈大於等於 5 顆子，而 5+10>13，不可能)。此時換成剩 21 顆且 A 先拈又不能全拈。由引理6 知 B 勝。

特別地，有以下引理。

引理7：若留 34 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

35 至 50 顆子的情況：A 分別先拈 1 至 16 顆勝。理由：因 35 至 50 滿足大於 34 且小於等於 34+16.5=50.5，故由引理7 與引理5 得證。

51 顆子的情況：A 先拈 4 顆勝。理由：由引理7，對於 51 顆子，前面 17 顆是關鍵。A 先拈 4 顆剩 13 顆，由引理4 知A 此時能確保自己拈到前面 17 顆的剩下的 13 顆最後一顆為止，然而此時剩下 34 顆且換成 B 先拈又不能全拈，故由引理7 知 A 勝。

52 顆子的情況：A 先拈 5 顆勝。理由：跟上面的論證一樣，由引理7，對於 52 顆子，前面 18 顆是關鍵。A 先拈 5 顆剩 13 顆，由引理4 知 A 此時能確保自己拈到前面 18 顆的剩下的 13 顆最後一顆為止，此時剩下 34 顆且換成 B 先拈又不能全拈，故由引理7 知 A 勝。

53 顆子的情況：A 先拈 6 顆勝。理由：跟上面的論證一樣，由引理7，對於 53 顆子，前面 19 顆是關鍵。A 先拈 6 顆剩 13 顆，由引理4 知 A 此時能確保自己拈到前面 19 顆的剩下的 13 顆最後一顆為止，此時剩下 34 顆且換成 B 先拈又不能全拈，故由引理7 知 A 勝。

54 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：由引理7，對於 54 顆子，前面 20 顆是關鍵。此外，由引理4，對於 20 顆子，前面7 顆是關鍵。對於前面的7 顆子，A 先拈 2 顆剩 5 顆，此時換成 B 先拈且不能全拈剩下的 5 顆，故由引理2 知，A 必可恰拈到此 7 顆中的最後 1 顆為止，此時原先的 20 顆剩下 13 顆且換成 B 先拈且不能全拈這 13 顆，故由引理4 知 A 必可恰拈到這剩下的 13 顆中的最後 1 顆為止。此時剩下 34 顆且換成 B 先拈且不能全拈，故由引理7 知 A 勝。

55 顆子的情況：B 後拈勝。理由：若A 先拈大於等於 19 顆(A 首次不可全拈 55 顆)，則 B 可全拈剩下的子。如此迫使遊戲可以看成是先看前面 21 顆子的情況且 A 先拈且不能全

拈，由引理6 知，B 可恰拈到前 21 顆的最後 1 顆為止且該次 B 不會拈超過 15 顆(B 若該次拈 16 顆，則必為 A 拈大於等於 8 顆子，而 16+8>21，不可能)。此時剩 34 顆且換成 A 先拈又不能全拈。由引理7 知 B 勝。

特別地，有以下引理。

引理8：若留 55 顆子且先拈的人不能全拈，則後拈者勝。

我們討論到這裡，突然發現到B 後拈勝的拈的開始的全部子數依序分別是2，3，5，8，13，21，34，55，竟然有一個規則，2+3=5，3+5=8，5+8=13，8+13=21，13+21=34，21+34=55。我們去請教東華大學應用數學系周君彥教授，他告訴我們說：這些數字剛好是原始「費波納西數列(Fibonacci Sequence)」的前面幾項，數列最開頭是1，1，然後接下來的每一項都是前面兩項的和！想不到拈這個遊戲竟然還有這個玄機！接下來我們猜，是不是34+55=89 顆子時也是B後拈勝呢？

若 A 先拈大於等於 30 顆(A 首次不可全拈 89 顆)，則 B 可全拈剩下的子。如此迫使遊戲可以看成 34 顆子的情況且 A 先拈且不能全拈，由引理7 知，B 可恰拈到前 34 顆的最後 1 顆為止且該次 B 不會超過 27 顆(B 若可拈 28 顆，則必為 A 拈大於等於 14 顆子，而 28+14>34，不可能)。此時剩下 55 顆且換成 A 先拈又不能全拈。由引理8 知 B 勝。

89 顆子時也是B勝！這使我們進一步猜想，是不是原始的費波納西數列中從 2 開始的每個項的數字，若當成拈的開始的全部子數時，都一定是 B 後拈勝呢？

下面證明: 若 $a_1=2$，$a_2=3$, 且$\forall n\geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ，則($\forall n\in N$, 對於 $a_n$ 顆子，(A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的2倍，拈最後一子者勝)的拈，後拈者勝).

先觀察到 ($\forall n\in N$, $a_n < a_{n+1}$).

再用數學歸納法證明($\forall n\in N$, $4a_n < 3a_{n+1}$)： ($4a_1 = 8 < 9 = 3a_2$,，設當n = t 時成立. 則當 n = t+1 時, $4a_{t+1} = 3a_{t+1} + (a_t + a_{t-1}) < 3a_{t+1} + 3a_t = 3a_{t+2}$

然後對 n 用數學歸納法證明如下.

前面已證n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 時成立. (實際上只需證明 n = 1, 2 時成立.)

設當 n = t 與 n = t − 1 時成立.

則當 n = t + 1 時, 因為 $a_{t+1} = a_t + a_{t-1} = (a_{t-1} + a_{t-2}) + a_{t-1} < 3a_{t-1}$, 所以 A 的首次必拈少於$a_{t-1}$ 顆子. 故遊戲可先看成是先看前面的 $a_{t-1}$ 顆子的遊戲, 由假設知 B 有必可拈到第 $a_{k-1}$ 顆子為止的策略, 且 B 當次所拈的子數必小於 $\left\lceil\frac{a_t+1}{2}\right\rceil$ 。(否則, 由歸謬法, 若 B 當次所拈的子數不少於 $\left\lceil\frac{a_t+1}{2}\right\rceil$ , 則 A 前次所拈的子數不少於 $\left\lceil\frac{a_t+1}{4}\right\rceil$ , 隨之, A 與 B 至少拈走 $\left\lceil\frac{a_t+1}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{a_t+1}{2}\right\rceil$ 顆子. 而對$a_k$= 4t, 4t + 1, 4t + 2, 4t + 3 分別考慮都會得到 $\left\lceil\frac{a_t+1}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{a_t+1}{2}\right\rceil > a_{t-1}$ , 這與 B 恰拈到第 $a_{t-1}$ 顆子為止相矛盾). 此時剩 $a_{t+1} - a_{t-1} = a_t$ 顆子, 且輪到 A 先拈且不可全拈, 故由假設知 B 可必勝

## (補充說明四 ：「k倍拈」的證明)

當規則為有n 顆子，n > 1，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的 k 倍，拈最後一子者勝。

當 k = 3, 4, 5時，有結論如下。

- 當 k=3 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：
  $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, 且對於 n ≥ 5, $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$.
- 當 k=4 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：
  $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$, $a_6 = 9$, $a_7 = 12$, 且對於 n ≥ 8, $a_n = a_{n-1} + a_{n-6}$.
- 當 k=5 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：
  $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 8$, $a_7 = 10$, $a_8 = 12$, $a_9 = 15$, 且對於 n ≥ 10, $a_n = a_{n-1} + a_{n-8}$.

**當k = 3 時**

我們先用以下表格來表示k=3 的情形.

| 開始的全部子數 | 誰有必贏的策略?先(拈)或後(拈) | 先拈勝時先拈多少?<br>後拈時對應的數列項號 |
|---|---|---|
| 2 | 後 | 1 |
| 3 | 後 | 2 |
| 4 | 後 | 3 |
| 5 | 先 | 1 |
| 6 | 後 | 4 |
| 7 | 先 | 1 |
| 8 | 後 | 5 |
| 9 | 先 | 1 |
| 10 | 先 | 2 |
| 11 | 後 | 6 |
| 12 | 先 | 1 |
| 13 | 先 | 2 |
| 14 | 先 | 3 |
| 15 | 後 | 7 |
| 16 | 先 | 1 |
| 17 | 先 | 2 |
| 18 | 先 | 3 |
| 19 | 先 | 4 |
| 20 | 先 | 1 |
| 21 | 後 | 8 |
| 22 | 先 | 1 |
| 23 | 先 | 2 |
| 24 | 先 | 3 |
| 25 | 先 | 4 |
| 26 | 先 | 5 |
| 27 | 先 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 先 | 1 |
| 29 | 後 | 9 |
| 30 | 先 | 1 |
| 31 | 先 | 2 |
| 32 | 先 | 3 |
| 33 | 先 | 4 |
| 34 | 先 | 5 |
| 35 | 先 | 6 |
| 36 | 先 | 7 |
| 37 | 先 | 8 |
| 38 | 先 | 9 |
| 39 | 先 | 2 |
| 40 | 後 | 10 |
| 41 | 先 | 1 |
| 42 | 先 | 2 |
| 43 | 先 | 3 |
| 44 | 先 | 4 |
| 45 | 先 | 5 |
| 46 | 先 | 6 |
| 47 | 先 | 7 |
| 48 | 先 | 8 |
| 49 | 先 | 9 |
| 50 | 先 | 10 |
| 51 | 先 | 11 |
| 52 | 先 | 12 |
| 53 | 先 | 13 |
| 54 | 先 | 3 |
| 55 | 後 | 11 |

隨之，對於k=3, B 有必勝策略的數列為2,3,4,6,8,11,15,21,29,40,55, . . . . . . . . .

我們發現到從第 5 項開始，每一項都是它的前面第一項與第四項的和：

8 = 6 + 2, 11 = 8 + 3, 15 = 11 + 4, 21 = 15 + 6, 29 = 21 + 8, 40 = 29 + 11,5 5 = 40 + 15, . . . . . . . . . ,

亦即，$a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$.

此式並不是巧合，而是在討論時我們發現到：常常後面的情況的一開始時，會降階為前面的情況的討論. 例如，開始全部子數為 8 子, A 只能拿 1 顆子，所以降階為只看前面 2 子的情況，而 2 子的情況 B 有必勝策略且當次 B 只拿 1 子.所以剩下 8-2=6 子的情況就與開始全部子數為 6 的情況是相同的！

(若子數為 $a_1$=2，$a_2$=3，$a_3$=4，$a_4$=6 且其他 $a_n$= $a_{n-1}$+ $a_{n-4}$，則B 有必勝策略) 證明如下.

(引理一) ($\forall$n ∈ N, $a_{n+3} \leq 3a_n$).

證:用數學歸納法證明. $a_4 = 6 \leq 6 = 3a_1$ , $a_5 = 8 \leq 9 = 3a_2$ , $a_6 = 11 \leq 12 = 3a_3$ , $a_7 = 15 \leq 18 = 3a_4$. 設當 n ≤ t 時成立. 則當n=t+1 時, $a_{t+4} = a_{t+3} + a_t \leq 3a_t + 3a_{t-3} = 3a_{t+1}$ . 故由數學歸納法得證.

(引理二) ($\forall$n ∈ N, $4a_{n+3} > 9a_n$).

證:用數學歸納法證明. $4a_4=24>18=9a_1$, $4a_5=32>27=9a_2$ , $4a_6=44>36=9a_3$ , $4a_7=60>54=9a_4$ . 設當 n ≤ t 時成立. 則當n=t+1 時, $4a_{t+4}=4a_{t+3}+4a_t>9a_t+9a_{t-3}=9a_{t+1}$ . 故由數學歸納法得證.

(若子數為 $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=6$ 且其他 $a_n=a_{n-1}+a_{n-4}$, 則B有必勝策略)證明主要部份如下.

n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 時由實際檢查知成立. (實際上只需證明 n = 1, 2, 3, 4, 5 時成立.)

設當 n = t 與 n = t − 3 時成立.

則當 n=t+1 時, 因 $a_t \leq 3a_{t-3}$ (引理一) 故 A 首次必拈少於 $a_{t-3}$ 顆子.故遊戲可看成是先看前面的 $a_{t-3}$ 顆子的遊戲, 由假設知 B 有必可拈到第 $a_{t-3}$ 顆子為止的策略, 且 B 當次所拈的子數必小於 $\lceil \frac{a_t}{3} \rceil$。(否則, 由歸謬法, 若 B 當次所拈的子數不小於 $\lceil \frac{a_t}{3} \rceil$, 則 A 前次所拈的子數不小於 $\lceil \frac{a_t}{9} \rceil$, 隨之, A 與B 至少拈走 $\lceil \frac{a_t}{3} \rceil + \lceil \frac{a_t}{9} \rceil \geq \lceil \frac{4a_t}{9} \rceil > a_{t-3}$ 顆子為止相矛盾(引理二: $4a_t > 9a_{t-3}$). 此時剩 $a_{t+1} - a_{t-3} = a_t$ 顆子, 且此時輪到 A 先拈且不可全拈, 故由假設知 B 可必勝.

隨之, 由數學歸納法得證.

又, 若已知「當留下 i 顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，則對於開始時子的數目 $i < p \leq i + \frac{i-1}{3}$ 的情形，先拈的人只要拈 p − i 顆子會勝。隨之, 對於在上面的數列相鄰兩項 $a_t$ , $a_{t+1}$ 之間的數 n, 後拈者都沒有必勝的策略, 否則會因為後拈者在子數為 i 時有必勝策略的關係, 反而讓子數為 $a_t + a_{t-3}$ 時是先拈者勝, 與上面的結果矛盾.

**當 k = 4 ,5 時**

k=4,5 時的證明與 k=3 時的證明類似，故礙於篇幅，此處省略。我們從 k=2,3,4,5 的情況自然地猜想 k=6 的情況: 當 n 夠大時，$a_n = a_{n-1} + a_{n-10}$，但結果發現竟然不對。

**柳暗花明又一村！**

雖然我們從 k = 6 開始就暫時沒有進展, 但是在審視之前的 k = 2, 3, 4, 5 的證明之後, 指導老師跟我們說, 是否不要堅持: 對於 k 倍時, 夠後面的項會有 $a_n = a_{n-1} + a_{n-f(k)}$, 亦即, 夠後面的 $a_n$ 都是它前面的第一項 $a_{n-1}$ 與第 f(k) 項 $a_{n-f(k)}$ 的和呢? 也就是說, 不要堅持一定會有一個由 k 所固定的 f(k). 因為只需要(可以將後面的情況拆解成前面已經解過的兩種情況) 就可以了, 並不需要有一個由 k 所固定的 f(k). 所以指導老師帶我們從論證中自然地猜想:

**引理一：若$a_1 = 2, a_2 = 3, . . . , a_k = k + 1$, 其他$a_n=a_{n-1}+a_{m(k,n)}$, 其中m(k, n) 是最小的整數使得$a_{m(k,n)} \geq \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$, 則, 對於開始時全部子數是$a_n$ 的k 倍拈遊戲(A, B 輪流拈,A 先且A 首次不可全拈, 之後每次拈最多為對手前次的k 倍, 拈最後一子勝),後拈者有必勝策略, 且對$a_n=a_{n-1}+a_{m(k,n)}$的情況, 若A 首次拈少於 $a_{m(k,n)}$ 子, 則遊戲可看成是分成兩階段的方式完成.**

證明：顯然, 對 $a_1 = 2, a_2 = 3, . . . , a_k = k + 1$, $a_{k+1} = k + 3 = a_k + a_1$ 而言, 敘述成立.

設對 n≤t 時, 上面的敘述成立. 則當 n=t+1 時, 因為 $a_{t+1}=a_t+a_{m(k,t+1)}$ 且 m(k, t+1) 是最小的整數使得$a_{m(k,t+1)} \geq \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$, 則A 首次必拈少於 $a_{m(k,t+1)}$ 子.

(若A 拈至少 $a_{m(k,t+1)}$子, B 可拈剩下至多 $a_{t+1} - a_{m(k,t+1)} = a_t \leq k\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil \leq ka_{m(k,t+1)}$子.)故遊戲可被視為是先看開始的全部子數是前面的 $a_{m(k,t+1)}$ 顆子的 k 倍拈遊戲, 故 B 有策略必可恰拈到第 $a_{m(k,t+1)}$ 顆子為止且該次所拈子數必小於 $\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ (證明如下), 隨之, 剩下 $a_t$ 顆子, 輪到 A 拈但不可將剩下的全拈, 故 B 有策略可拈到剩下的 $a_t$ 顆子的最後一子, 也是一開始的 $a_{t+1}$ 顆子的最後一子, 亦即, B 有必勝策略.

「B 有策略必可恰拿到第$a_{m(k,t+1)}$ 顆子為止且該次必拈少於$\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 顆」的證明如下.

若 $a_{m(k,t+1)} = \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$, 則 B 拈至多 $a_{m(k,t+1)} - 1 < \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 成立.

若 $a_{m(k,t+1)} > \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 且 $a_{m(k,t+1)} \le a_k$, 則 $a_{m(k,t+1)}-1=a_{m(k,t+1)-1}<\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil<a_{m(k,t+1)}$, 得連續整數之間竟然有第三個整數, 矛盾. 隨之, 若 $a_{m(k,t+1)} > \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 則必為 $a_{m(k,t+1)} > a_k$，故$a_{m(k,t+1)}$ 為 $a_s = a_{s-1} + a_{m(k,s)}$ 的形式, 其中 $s = m(k, t+1)$. 但是, 因為$s = m(k, t+1)$ 是最小的整數使得 $a_s = a_{m(k,t+1)} \ge \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$, 所以 $a_{s-1} < \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$. 隨之, 若 A 拈至少 $a_{m(k,s)}$ 子, 則 B 可拈剩下的全部少於 $a_{s-1} <\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 顆子, 亦即, B 在恰拈到第 $a_{m(k,t+1)}$ 顆子為止的該次所拈子數必小於 $\left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$. 若 A 拈少於 $a_{m(k,s)}$ 子, 則, 可看成是整個遊戲前面的$a_{m(k,t+1)}$ 顆子的前面 $a_{m(k,s)}$ 顆子的拈遊戲, 而對整個遊戲的前面的$a_{m(k,t+1)}$ 顆子的拈遊戲而言, 而由假設(遊戲可看成是分成兩階段的方式完成)知, B 有策略可拈到最後一顆子且該次 B 拈少於 $a_{s-1} = a_{m(k,t+1)-1} < \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ (因為是在第二階段拈). 隨之, 回到整個敘述(若$a_1 = 2, a_2 = 3, . . . , a_k = k + 1$, 其他 $a_n = a_{n-1}+a_{m(k,n)}$, 其中 $m(k, n)$ 是最小的整數使得 $a_{m(k,n)}\ge \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$, 則, 對於開始時全部子數是 $a_n$ 的 k 倍拈遊戲, 後拈者有必勝的策略, 且對 $a_n =a_{n-1}+a_{m(k,n)}$ 的情況, 若 A 首次拈少於 $a_{m(k,n)}$ 子, 則遊戲可看成是分成兩階段的方式完成.), 得到數學歸納法的證明! □

**引理一的自然推論:**

**對於k倍拈的遊戲，令 $a_1=2, a_2=3,..., a_k=k+1$，且(對於 $n>k$，令 $a_n=a_{n-1}+a_{m(k,n)}$，其中 $a_{m(k,n)}a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$中最小的滿足 $\ge \left\lceil \frac{a_t}{k} \right\rceil$ 的項)，則當開始時的全部子數為 $a_1,a_2\ldots,a_n,\ldots$中的任何一項時，後拈者有必勝策略。**

請注意: $a_{k+1}=k+3$，且$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$是一個遞增數列。

**引理二:**

**對於 k 倍拈遊戲，若開始時的全部子數 b 不為 $a_1,a_2,...,a_n,...$ 中的任何一項時，則先拈者有必勝策略，且遊戲必可看成分兩個階段完成如下:**

> **若 $a_n<b<a_{n+1}=a_n+a_{m(k,n)}$，則遊戲可看成第一階段是先拈者恰取到第 $(b-a_n)$顆子(不排除首次就拈這麼多)與第二階段是原先的先拈者(在第一階段結束時反而變成第二階段開始時的後拈者)拈最後一子。**

證明: 因為 $a_1=2, a_2=3,\ldots, a_k=k+1$，所以若開始時的全部子數 b 不為 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$中的任何一項時，必存在 $n\geq k$ 使得 $a_n<b<a_{n+1}=a_n+a_{m(k,n)}$。

當 $a_k<b<a_{k+1}$，亦即 $k+1<b<k+3$，故$b=k+2$。

若先拈者只拈 1 子，則剩下 k+1 子，且先拈者此時成為第二階段的後拈者，而對手此時又不能全拈剩下的子，故原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段的完成如上。

假設已證到了 $a_n<b<a_{n+1}$ 的情況，都是先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段完成如上。

則當 $a_{n+1}<b<a_{n+2}$ 時，考慮 $b-a_{n+1}$。

注意: $0<b-a_{n+1}<a_{n+2}-a_{n+1}=a_{m(k,n+2)}$，其中 $a_{m(k,n+2)}$ 是 $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$中最小的滿足$\geq \left\lceil \frac{a_{n+1}}{k} \right\rceil$ 的項。

情況一: 若 $b-a_{n+1}<\left\lceil \frac{a_{n+1}}{k} \right\rceil$，則 $k(b-a_{n+1})<a_{n+1}$。

故若先拈者首次就恰拈 $(b-a_{n+1})$ 顆子，則剩下的子數為 $a_{n+1}$ 顆，且先拈者此時成為第二階段開始的後拈者，而對手此時又不能全拈，故由引理一知，原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分成兩階段的完成如上。

情況二: 當 $\left\lceil \frac{a_{n+1}}{k} \right\rceil \leq b-a_{n+1}<a_{m(k,n+2)}$ 時，因為 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$是一個遞增數列且 $a_{m(k,n+2)}$ 是 $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$中最小的滿足$\geq\left\lceil \frac{a_{n+1}}{k} \right\rceil$ 的項，所以 $a_{m(k,n+2)-1}<b-a_{n+1}<a_{m(k,n+2)}\leq a_{n+1}$ 。故由假設知先拈者有恰取到第 $(b-a_{n+1})$ 顆子的策略，且取到第 $(b-a_{n+1})$ 顆子的過程可分成兩階段完成: 第一階段是先拈者恰取到第 $[(b-a_{n+1})-a_{m(k,n+2)-1}]$ 顆子的最後一顆子，因為 $ka_{m(k,n+2)-1}<a_{n+1}$ ，所以當先拈者恰取到第 $(b-a_{n+1})$ 顆子時當次所拈的子數小於 $a_{m(k,n+2)-1}$，故此時，原先的先拈者不但成為「開始要拈剩下的 $a_{n+1}$ 顆子」的後拈者，且對手此時又不能全拈剩下的 $a_{n+1}$ 顆子，故原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段完成如上。

故由數學歸納法得證。□

**引理二的自然推論:**

**對於k倍拈遊戲，令 $a_1=2, a_2=3,\ldots, a_k=k+1$，且(對於 $n>k$，令 $a_n=a_{n-1}+a_{m(k,n)}$，其中 $a_{m(k,n)}$ 是$a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$中最小的滿足$\geq\left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$ 的項)，則當開始時的全部子數不為 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$中的任何一項時，先拈者有必勝策略。**

合併 k=2,3,4,5 的情況與引理一的自然推論與引理二的自然推論, 我們得到結論如下.

**對於 k 倍拈遊戲(有 n 顆子，n>1，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後兩人每次拈最多為對手前次拈的 k 倍，拈最後一子勝)而言，令 $a_1=2,a_2=3,\ldots,a_k=k+1$，且(對於 n>k，令 $a_n=a_{n-1}+a_{m(k,n)}$，其中 $a_{m(k,n)}$是 $a_1, a_2,\ldots,a_{n-1}$ 中最小的滿足$\geq\left\lceil\frac{a_{n-1}}{k}\right\rceil$的項，此處$\lceil x\rceil$是 x 的天花板函數，亦即，不小於 x 的最小整數)，則當開始時的全部子數為 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$中的任何一項時，後拈者有必勝策略，否則先拈者有必勝策略。特別地，當 k=2,3,4,5 時，$a_n$ 的遞迴式相當簡單。**

- 當 k=2 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3$, 且對於 n 大於等於3, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. 亦即, 以 2,3 開頭的費波納西數列.
- 當 k=3 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 6$, 且對於 n 大於等於5, $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$.
- 當 k=4 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 9, a_7 = 12$, 且對於 n 大於等於8, $a_n = a_{n-1} + a_{n-6}$.
- 當 k=5 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 =10, a_8 = 12, a_9 = 15$, 而且對於 n 大於等於10, $a_n = a_{n-1} + a_{n-8}$.

## 【評語】030408

1. 此作品研究拈的變形數學遊戲，考慮有 n 顆棋子，由 A 和 B 輪流拈子，A 先拈但首次不可全拈，之後每人每次可拈棋子數至多為對手前次所拈棋子數的 k 倍，拈最後一子者勝。作者得到的結論之一，當 k=2 時，B 有必勝策略若且唯若開始的棋子數是費波那西數，這是已知的結果，參閱維基百科 Fibonacci Nim，參考文獻 Whinihan, Michael J. (1963), "Fibonacci Nim", Fibonacci Quarterly, 1 (4)：9–13。作者在不知道相關文獻的情形下得到這個結論是不錯的表現。

2. 此作品主題屬賽局問題探討，與組合數列相關，為中學所學數列關係的延伸，是一有趣的科展題目，整體而言，儘管有一些情形的論述方式頗為類似，如果能進一步加強相關的歸納論證會更好。

## 作品海報

**一、摘要：**我們整理了拈的最基本問題。並對拈的變形問題「k倍拈」(規則：有n顆子，n>1，A、B輪流拈子，A先，A首次不可全拈，之後兩人每次拈至多為對手前次拈的k倍，拈最後一子者勝)，得到了完全解答。

**二、研究動機：**從小玩過20 顆棋子輪流拿，1 人至多拿3 顆，拿最後1 顆的人輸，直到再次接觸此遊戲，我們對這個遊戲也有興趣，想找找看這種遊戲是否有必勝攻略，以及如果將拈遊戲變形，又會如何？

**三、研究目的：**希望能從科展活動中，學習嚴格研究數學的方法，及找到一些規律。

**四、研究設備及器材：**白板、紙、筆、白板筆、電腦、圍棋子

**五、研究過程或方法：**先分配主題，各自去找解法、資料，約定時間共同討論。

**六、研究結果：**我們整理了拈的最基本問題。並對拈的變形問題「k倍拈」(規則：有n顆子，n>1，A、B輪流拈子，A先，A首次不可全拈，之後兩人每次拈最多為對手前次拈的k倍，拈最後一子勝)，得到了完全解答。

**2倍拈**：(參見補充說明一如下)
n 顆子，n>1，A、B 輪流拈，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的2倍，拈最後一子者勝。
結論為：B 有必勝策略若且唯若開始全部子數是以 2,3 開頭的費波納西數列.

**k倍拈**：(參見補充說明二如下) 若將上面兩倍拈改為k 倍拈(之後每次拈最多為對手前次的k倍), 且其他規則不變

k = 3 時，B 有必勝的策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4,$
$a_4 = 6,$且對於$n \geq 5, a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$

k = 4 時，B 有必勝策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5,$
$a_5 = 7, a_6 = 9, a_7 = 12,$ 且對於$n \geq 8, a_n = a_{n-1} + a_{n-6}$

k = 5 時，B 有必勝的策略若且唯若開始的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4,$
$a_4 = 5, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 10, a_8 = 12, a_9 = 15,$ 且對於$n \geq 10, a_n = a_{n-1} + a_{n-8}$

對於 k≥6，沒有如 k=2,3,4,5 時一樣的簡單遞迴式。但我們得到了對一般的 k (包含k=2,3,4,5 的情況)的完全解答。

令$a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots, a_k = k + 1$，且對於$n > k$，令$a_n = a_{n-1} + a_{m(k,n)}$，其中$a_{m(k,n)}$是$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$中最小的滿足$\geq \left\lceil \frac{a_{n-1}}{k} \right\rceil$的項，此處$\lceil x \rceil$是x的天花板函數，亦即，不小於x的最小整數)，則當開始時的全部子數為$a_1, a_2, \ldots a_n$中的任何一項時，後拈者有必勝策略，否則先拈者有必勝策略。

特別地，當$k = 2,3,4,5$時，$< a_n >$的遞迴式相當簡單。

**參考資料及其他**
1. 基礎數學，周君彥，民105.02，作者自行出版，ISBN 978-957-43-3320-2
2. 維基百科上的網頁https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_nim

**(補充說明一:「2倍拈」(費波納西數列)的證明)**
當規則為有 n 顆子，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的兩倍，
拈最後一子者勝。
我們以一個一個的「開始時的子數」依由小到大的順序去討論如下。
1 顆子的情況不可玩，因為 A 不能全拈。
2 顆子的情況：B 後拈勝。理由：因為 A 不能全拈，且當 A 拈 1 顆使 B 拈最後 1 顆，因此 2 顆子時 B 後拈勝。
3 顆子的情況：B 後拈勝。理由：因為 A 不能全拈，且當 A 拈 1 顆或2顆能使 B 拈最後 1 顆，
因此 3 顆子時 B 後拈勝。
**特別地，有引理1：若留 3 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。**
4 顆子的情況：A 先拈 1 顆則勝。理由：A 先拈 1 顆，此時留 3 顆子且換成 B 先拈且無法全部拈，
故由引理 1 知A 勝。
5 顆子的情況：B 後拈勝。理由：若 A 先拈大於等於 2 顆，B 便能全部拈，故 A 只能先拈 1 顆。當A 拈 1 顆子時，B 再拈 1 顆，此時留 3 顆且換成 A 先拈且無法全部拈，故由引理1 知 B 勝。
**特別地，有引理2：若留 5 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。**
6 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：若 A 先拈 1 顆子，此時剩 5 顆且換成 B 先拈又無法全拈，故由引理2 知 A 勝。
7 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：若 A 先拈 2 顆子，此時剩 5 顆且換成 B 先拈又無法全拈，故由引理2 知 A 勝。
8 顆子的情況：B 後拈勝。理由：若 A 拈多於 2 顆則 B 全拈勝，故 A 最多拈 2 顆。若 A 拈 1 顆，B 拈 2 顆剩 5 顆回到引理2，(此時 A 先拈又不能全拈，) 故 B 勝。若 A 拈 2 顆，B 拈 1 顆剩 5 顆回到引理2，
(此時 A 先拈又不能全拈，) 故 B 勝。
**特別地，有引理3：若留 8 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。**
9 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：若 A 先拈 1 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。
10 顆子的情況：A 先拈 2 顆勝。理由：若 A 先拈 2 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。
11 顆子的情況：A 先拈 3 顆勝。理由：若A 先拈 3 顆子，則能換成後拈且剩下 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。
12 顆子的情況：A 先拈 1 顆勝。理由：由引理3，在 12 顆子時只要 A 確保自己能成為剩 8 顆的後拈者且對手不能全拈即勝，因此前面的 4 顆是關鍵。若A 拈 1 顆，則此 4 顆子剩 3 顆且 B 不能全拈，由引理1 知，A 會拈到此 4 顆子的最後 1 顆，且能換成後拈剩 8 顆，換 B 先拈又無法全部拈，故由引理3 知 A 勝。
13 顆子的情況：B 後拈勝。理由：由引理3，在 13 顆子時只要確保自己能成為剩 8 顆的後拈者且對手不能全拈即勝，因此前面5 顆是關鍵。5 顆子後拈勝，而 A 又不能拈大於等於 5 顆(A 也不能 13 顆全拈故有剩)，否則 B 可全拈剩下的子，但無論 A 拈小於等於 4 顆子，由引理2，知 B 可拈到前面 5 顆子的最後 1 顆而換成剩 8 顆的後拈者，而 A 為先拈又不能全拈。因此 13 顆子時 B 後拈勝。
**特別地，有引理4：若留 13 顆子且輪到先拈的人不能全拈，則後拈者勝。**

討論至此，我們發現到一個規則，若已知「當留下 i 顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，則對於子的數目 p 大於 i 且小於等於$i+\frac{i-1}{2}$的情形，先拈的人只要拈 p-i 顆子，就能留下 i 顆子換成後拈且輪到先拈的人(至多只能拈 i-1 顆) 而不能全拈，故先拈的人拈 p-i 顆勝。

**亦即，有引理5：若已知「當留下i顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，**
**則對於開始時子的數目$i < p \le i+\frac{i-1}{2}$的情形，先拈的人只要拈$p-i$顆子會勝。**

下面證明: 若 $a_1=2$ , $a_2=3$, 且$\forall n\ge 3$, $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ , 則($\forall n\in N$, 對於 $a_n$ 顆子，(A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的2倍，拈最後一子者勝)的拈，後拈者勝).

(1) 用數學歸納法證明($\forall n\in N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 2$)

證明：$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}\le 2$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{5}{3}\le 2$.設當$n\le t$且$t\ge 2$時成立.則當 n = t+1 時, $\frac{a_{t+2}}{a_{t+1}}=\frac{a_{t+1}+a_t}{a_t+a_{t-1}}\le\frac{2a_t+2a_{t-1}}{a_t+a_{t-1}}=2$ .

(2) 用數學歸納法證明($\forall n\in N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{4}{3}$)

證明：$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$.設當$n\le t$且$t\ge 2$時成立.則當 n = t+1 時, $\frac{a_{t+2}}{a_{t+1}}=\frac{a_{t+1}+a_t}{a_t+a_{t-1}}>\frac{\frac{4}{3}a_t+\frac{4}{3}a_{t-1}}{a_t+a_{t-1}}=\frac{4}{3}$.

然後對 n 用數學歸納法證明如下.
$a_1=2$，$a_2=3$時由實際檢查成立.
設當 $n\le t$且$t\ge 2$時成立.
則當 n = t + 1 時, 因為 $a_{t+1}= a_t+a_{t-1}=(a_{t-1}+a_{t-2})+a_{t-1}<3a_{t-1}$, 所以 A 的首次必拈少於$a_{t-1}$顆子. 故遊戲可先看成是先看前面的 $a_{t-1}$ 顆子的遊戲, 由假設知 B 有必可拈到第 $a_{t-1}$ 顆子為止的策略, 且 B 當次所拈的子數必小於 $\left\lceil\frac{a_t}{2}\right\rceil$ 。(否則, 由歸謬法, 若 B 當次所拈的子數不少於 $\left\lceil\frac{a_t}{2}\right\rceil$ , 則 A 前次所拈的子數不少於 $\left\lceil\frac{a_t}{4}\right\rceil$ , 隨之, A 與 B 至少拈走 $\left\lceil\frac{a_t}{4}\right\rceil+\left\lceil\frac{a_t}{2}\right\rceil\ge\left\lceil\frac{3a_t}{4}\right\rceil>a_{t-1}$顆子, 這與 B 恰拈到第 $a_{t-1}$ 顆子為止相矛盾). 此時剩 $a_{t+1}-a_{t-1}=a_t$ 顆子, 且輪到 A 先拈且不可全拈, 故由假設知 B 可必勝

**(補充說明二:「k倍拈」的證明)**
當規則為有n 顆子，n > 1，A、B 輪流拈子，A 先，A 首次不可全拈，之後每次拈最多為對手前次的 k 倍，拈最後一子者勝。
當 k = 3, 4, 5時，有結論如下:

k=3 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=6$, 且對於 $n\ge 5$,$a_n= a_{n-1}+a_{n-4}$.

k=4 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=5$, $a_5=7, a_6=9, a_7=12$, 且對於 $n\ge 8$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-6}$.

k=5 時，B 有必勝的策略若且唯若開始時的全部子數是滿足以下條件的數列的項：$a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=5$, $a_5=6, a_6=8, a_7=10, a_8=12, a_9=15$, 且對於 $n\ge 10$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-8}$.

**3倍拈(若子數為 $a_1$=2, $a_2$=3, $a_3$=4, $a_4$=6 且其他 $a_n= a_{n-1}+a_{n-4}$ , 則B 有必勝策略) 證明如下.**
**(引理一) ($\forall n\in N$, $\frac{a_{n+3}}{a_n}\le 3$ ).**
證:用數學歸納法證明. $\frac{a_4}{a_1}=\frac{6}{2}\le 3$ , $\frac{a_5}{a_2}=\frac{8}{3}\le 3$, $\frac{a_6}{a_3}=\frac{11}{4}\le 3$, $\frac{a_7}{a_4}=\frac{15}{6}\le 3$. 設當 $n\le t$且$t\ge 4$時成立.
則當n=t+1 時, $\frac{a_{t+4}}{a_{t+1}}=\frac{a_{t+3}+a_t}{a_t+a_{t-3}}\le\frac{3a_t+3a_{t-3}}{a_t+a_{t-3}}=3$ .故由數學歸納法得證.

**(引理二) ($\forall n\in N$, $\frac{a_{n+3}}{a_n}>\frac{9}{4}$ ).**
證:用數學歸納法證明. $\frac{a_4}{a_1}=\frac{6}{2}>\frac{9}{4}$ ,$\frac{a_5}{a_2}=\frac{8}{3}>\frac{9}{4}$ ,$\frac{a_6}{a_3}=\frac{11}{4}>\frac{9}{4}$ , $\frac{a_7}{a_4}=\frac{15}{6}>\frac{9}{4}$ .設當 $n\le t$且$t\ge 4$時成立.
則當n=t+1 時, $\frac{a_{t+4}}{a_{t+1}}=\frac{a_{t+3}+a_t}{a_t+a_{t-3}}>\frac{\frac{9}{4}a_t+\frac{9}{4}a_{t-3}}{a_t+a_{t-3}}=\frac{9}{4}$ . 故由數學歸納法得證.

**3倍拈(若子數為 $a_1$=2, $a_2$=3, $a_3$=4, $a_4$=6 且其他 $a_n$=$a_{n-1}$+$a_{n-4}$, 則B有必勝策略)證明主要部份如下.**
n = 1, 2, 3, 4時由實際檢查知成立.
設當 n = t 與 n = t − 3且t ≥ 4時成立.
則當 n=t+1 時, 因 $a_t\le 3a_{t-3}$ (引理一) 故 A 首次必拈少於 $a_{t-3}$ 顆子.故遊戲可看成是先看前面的 $a_{t-3}$ 顆子的遊戲, 由假設知 B 有必可拈到第 $a_{t-3}$ 顆子為止的策略, 且 B 當次所拈的子數必小於 $\left\lceil\frac{a_t}{3}\right\rceil$。(否則, 由歸謬法, 若 B 當次所拈的子數不小於 $\left\lceil\frac{a_t}{3}\right\rceil$, 則 A 前次所拈的子數不小於 $\left\lceil\frac{a_t}{9}\right\rceil$, 隨之, A 與B 至少拈走 $\left\lceil\frac{a_t}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{a_t}{9}\right\rceil\ge\left\lceil\frac{4a_t}{9}\right\rceil>a_{t-3}$ 顆子為止相矛盾 (引理二: $4a_t>9a_{t-3}$). 此時剩 $a_{t+1}-a_{t-3}=a_t$ 顆子, 且此時輪到 A 先拈且不可全拈, 故由假設知 B 可必勝.
隨之, 由數學歸納法得證.

又, 若已知「當留下 i 顆子且輪到先拈的人不能全拈，後拈者會勝」，則對於開始時子的數目 $i<p\le i+\frac{i-1}{3}$的情形，先拈的人只要拈 $p-i$ 顆子會勝。隨之, 對於在上面的數列相鄰兩項 $a_t$ , $a_{t+1}$ 之間的數 n, 後拈者都沒有必勝的策略, 否則會因為後拈者在子數為 i 時有必勝策略的關係, 反而讓子數為 $a_t+a_{t-3}$ 時是先拈者勝, 與上面的結果矛盾.

k=4,5 時的證明與 k=3 時的證明類似，故礙於篇幅，此處省略。我們從 k=2,3,4,5 的情況自然地猜想 k=6 的情況: 當 n 夠大時，$a_n=a_{n-1}+a_{n-10}$ ，但結果發現竟然不對。

雖然我們從 k = 6 開始就暫時沒有進展, 但是在審視之前的 k = 2, 3, 4, 5 的證明之後, 指導老師跟我們說, 是否不要堅持: 對於 k 倍時, 夠後面的項會有 $a_n= a_{n-1} +a_{n-f(k)}$, 亦即, 夠後面的$a_n$都是它前面的第一項$a_{n-1}$與第 f(k) 項 $a_{n-f(k)}$ 的和呢? 也就是說, 不要堅持一定會有一個由 k 所固定的 f(k). 因為只需要(可以將後面的情況拆解成前面已經解過的兩種情況) 就可以了, 並不需要有一個由 k 所固定的 f(k). 所以指導老師帶我們從論證中自然地猜想:

**引理一：若$a_1 = 2$, $a_2= 3, . . . , a_k= k + 1$, 其他$a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$, 其中m(k, n) 是最小的整數使得$a_{m(k,n)}\geq\left\lceil\frac{a_{n-1}}{k}\right\rceil$, 則, 對於開始時全部子數是$a_n$的k 倍拈遊戲(A, B 輪流拈,A 先且A 首次不可全拈, 之後每次拈最多為對手前次的k 倍, 拈最後一子勝),後拈者有必勝策略, 且對 $a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$的情況, 若A 首次拈少於$a_{m(k,n)}$子, 則遊戲可看成是分成兩階段的方式完成.**

證明：顯然, 對 $a_1= 2$, $a_2 = 3, . . . , a_k= k + 1$, $a_{k+1} = k + 3 = a_k + a_1$ 而言, 敘述成立.
設對 n≤t 時, 上面的敘述成立. 則當 n=t+1 時, 因為 $a_{t+1} = a_t + a_{m(k,t+1)}$ 且 m(k, t+1) 是最小的整數使得$a_{m(k,t+1)} \geq \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$, 則A 首次必拈少於$a_{m(k,t+1)}$子.
(若A 拈至少$a_{m(k,t+1)}$子, B 可拈剩下至多 $a_{t+1}-a_{m(k,t+1)}= a_t \leq k\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil\leq ka_{m(k,t+1)}$子.)故遊戲可被視為是先看開始的全部子數是前面的$a_{m(k,t+1)}$顆子的 k 倍拈遊戲, 故 B 有策略必可恰拈到第$a_{m(k,t+1)}$顆子為止且該次所拈子數必小於 $\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ (證明如下), 隨之, 剩下 $a_t$ 顆子, 輪到 A 拈但不可將剩下的全拈, 故 B 有策略可拈到剩下的$a_t$顆子的最後一子, 也是一開始的 $a_{t+1}$顆子的最後一子, 亦即, B 有必勝策略.

**「B 有策略必可恰拿到第$a_{m(k,t+1)}$顆子為止且該次必拈少於$\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$顆」的證明如下.**
**若$a_{m(k,t+1)}= \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$, 則 B 拈至多$a_{m(k,t+1)}- 1 < \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ 成立.**
**若$a_{m(k,t+1)}> \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ 且$a_{m(k,t+1)}\leq a_k$ ,則$a_{m(k,t+1)}-1=a_{m(k,t+1)-1}<\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil<a_{m(k,t+1)}$ ,得連續整數之間竟然有第三個整數,矛盾.**
**隨之,若$a_{m(k,t+1)}>\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ 則必為$a_{m(k,t+1)}>a_k$,故$a_{m(k,t+1)}$為$a_s = a_{s-1} + a_{m(k,s)}$的形式, 其中 s = m(k, t + 1). 但是, 因為 s = m(k, t+1) 是最小的整數使得$a_s$=$a_{m(k,t+1)}\geq \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$, 所以$a_{s-1}< \left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$. 隨之, 若 A 拈至少$a_{m(k,s)}$子, 則 B 可拈剩下的全部少於$a_{s-1}<\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ 顆子, 亦即, B 在恰拈到第$a_{m(k,t+1)}$顆子為止的該次所拈子數必小於 $\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$. 若 A 拈少於$a_{m(k,s)}$子, 則, 可看成是整個遊戲前面的$a_{m(k,t+1)}$顆子的前面$a_{m(k,s)}$顆子的拈遊戲, 而對整個遊戲的前面的$a_{m(k,t+1)}$顆子的拈遊戲而言, 而由假設(遊戲可看成是分成兩階段的方式完成)知, B 有策略可拈到最後一顆子且該次 B 拈少於$a_{s-1}$=$a_{m(k,t+1)-1}<\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ (因為是在第二階段拈).**
隨之, 回到整個敘述(若$a_1= 2$, $a_2= 3, . . . , a_k= k + 1$, 其他$a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$ ,其中 m(k, n) 是最小的整數使得$a_{m(k,n)}\geq\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$, 則, 對於開始時全部子數是$a_n$的 k 倍拈遊戲, 後拈者有必勝的策略, 且對$a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$的情況, 若 A 首次拈少於 $a_{m(k,n)}$子, 則遊戲可看成是分成兩階段的方式完成.), 得到數學歸納法的證明! □

**引理一的自然推論:**
**對於k倍拈的遊戲，令$a_1$= 2,$a_2$= 3, ... ,$a_k$= k + 1，且(對於 n>k，令$a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$，其中$a_{m(k,n)}$是$a_1$,$a_2$,…,$a_{n-1}$中最小的滿足 ≥ $\left\lceil\frac{a_t}{k}\right\rceil$ 的項)，則當開始時的全部子數為$a_1$,$a_2$,…,$a_n$,…中的任何一項時，後拈者有必勝策略。**
請注意: $a_{k+1}$=k+3，且$a_1$,$a_2$,…,$a_n$,…是一個遞增數列。

**引理二:**
**對於 k 倍拈遊戲，若開始時的全部子數 b 不為$a_1$,$a_2$,…,$a_n$,…中的任何一項時，則先拈者有必勝策略，且遊戲必可看成分兩個階段完成如下:**
**若$a_n$<b<$a_{n+1}$=$a_n$+$a_{m(k,n+1)}$，則遊戲可看成第一階段是先拈者恰取到第 (b-$a_n$)顆子(不排除首次就拈這麼多)與第二階段是原先的先拈者(在第一階段結束時反而變成第二階段開始時的後拈者)拈最後一子。**

證明: 因為$a_1$= 2, $a_2$= 3, ... ,$a_k$= k + 1,所以若開始時的全部子數 b 不為 $a_1$,$a_2$,…$a_n$,…中的任何一項時，必存在 n ≥ k 使得$a_n$<b<$a_{n+1}$=$a_n$+$a_{m(k,n+1)}$。
當$a_k$<b<$a_{k+1}$，亦即 k+1<b<k+3，故b=k+2。
若先拈者只拈 1 子，則剩下 k+1 子，且先拈者此時成為第二階段的後拈者，而對手此時又不能全拈剩下的子，故原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段的完成如上。
假設已證到了$a_t$<b<$a_{t+1}$的情況，都是先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段完成如上。
則當$a_{t+1}$<b<$a_{t+2}$時，考慮 b − $a_{t+1}$。
注意: 0<b-$a_{t+1}$<$a_{t+2} - a_{t+1}$=$a_{m(k,t+2)}$，其中$a_{m(k,t+2)}$是$a_1$,$a_2$,…,$a_{t+1}$中最小的滿足≥ $\left\lceil\frac{a_{t+1}}{k}\right\rceil$ 的項。
情況一: 若 b-$a_{t+1}$<$\left\lceil\frac{a_{t+1}}{k}\right\rceil$，則 k(b-$a_{t+1}$)< $a_{t+1}$。
故若先拈者首次就恰拈 (b − $a_{t+1}$) 顆子，則剩下的子數為$a_{t+1}$顆，且先拈者此時成為第二階段開始的後拈者，而對手此時又不能全拈，故由引理一知，原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分成兩階段的完成如上。
情況二: 當 $\left\lceil\frac{a_{t+1}}{k}\right\rceil$ ≤ b-$a_{t+1}$<$a_{m(k,t+2)}$時，因為$a_1$,$a_2$,…$a_t$,…是一個遞增數列且$a_{m(k,t+2)}$是$a_1$,$a_2$,…,$a_{t+1}$中最小的滿足 ≥$\left\lceil\frac{a_{t+1}}{k}\right\rceil$ 的項，所以$a_{m(k,t+2)-1}$< b-$a_{t+1}$<$a_{m(k,t+2)}$ ≤$a_{t+1}$。故由假設知先拈者有恰取到第 (b-$a_{t+1}$) 顆子的策略，且取到第 (b-$a_{t+1}$) 顆子的過程可分成兩階段完成: 第一階段是先拈者恰取到第 [(b-$a_{t+1}$)- $a_{m(k,t+2)-1}$] 顆子的最後一顆子，因為 k$a_{m(k,t+2)-1}$<$a_{t+1}$，所以當先拈者恰取到第 (b-$a_{t+1}$) 顆子時當次所拈的子數小於$a_{m(k,t+2)-1}$，故此時，原先的先拈者不但成為「開始要拈剩下的$a_{t+1}$顆子」的後拈者，且對手此時又不能全拈剩下的$a_{t+1}$顆子，故原先的先拈者有必勝策略且遊戲可看成分兩階段完成如上。
故由數學歸納法得證。□

**引理二的自然推論:**
**對於k倍拈遊戲，令$a_1$= 2,$a_2$= 3, ... ,$a_k$= k + 1，且(對於 n>k，令$a_n$=$a_{n-1}$+$a_{m(k,n)}$，其中 $a_{m(k,n)}$是$a_1$,$a_2$,…,$a_{n-1}$中最小的滿足≥$\left\lceil\frac{a_{n-1}}{k}\right\rceil$ 的項)，則當開始時的全部子數不為$a_1$,$a_2$,…,$a_n$,…中的任何一項時，先拈者有必勝策略。**