中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030406

二維及三維不完整堆垛方法數之研究

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國一 陳芯言	蔡依玲 歐志昌

關鍵詞：不完整堆垛、遞迴關係式、數列

摘　要

從堆垛金字塔發想，定義了「不完整堆垛」。

一、**底列個數 n 之二維不完整堆疊**方法數 $P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$。

且 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$,其中 $P(1)=1$, $P(2)=2$ 。

二、**以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數

$T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$,其中 $T(1)=1$, $T(2)=2$, $T(3)=7$ 。

恰與以**正方形**為底相同。

三、**以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛**，方法數

$H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$,其中 $H(1)=1$, $H(2)=7$, $H(3)=67$ 。

四、正三角形與正六邊形的凹洞數有 6 倍關係，影響方法數。。

五、$T(n)$ ， $S(n)$ ， $H(n)$ 是新發現的數列。

六、本研究討論**正三角形、正方形、正六邊形**為底。其他**正多邊形**皆無法研究。

七、**以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，**

只能<u>橫放</u>方法數

$A(m,k)=1+A(1,k)\cdot(m-1)^2+A(2,k)\cdot(m-2)^2+\cdots+A(m-2,k)\cdot 2^2+A(m-1,k)\cdot 1^2$

若能<u>橫放或直放</u>方法數

$R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)$

八、**以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數

$I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$, 其中 $I(1)=I(2)=1, I(3)=2$ 。

九、**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛**，方法數

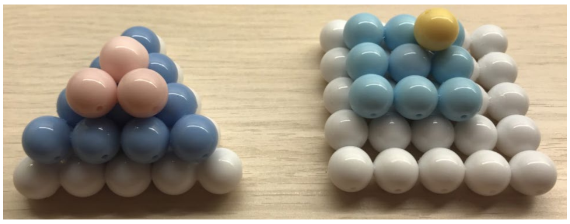
$r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$, 其中 $r(1)=1, r(2)=3, r(3)=15$ 。

恰與**平行四邊形**相同。

十、正三角形與菱形的凹洞數有 2 倍關係，影響方法數。

壹、研究動機

色彩繽紛的巴克球，可以讓人隨意創作出各種幾何圖形，令人愛不釋手。某天閒暇時，我將巴克球堆垛出一座金字塔，聯想到常見的堆垛都是由下往上、逐層遞減且凹洞填滿的「完整」圖形。但如果堆垛出「不完整」的圖形，又會有哪些情況呢？在好奇心的驅使下，便展開了我的研究。



貳、研究目的與問題

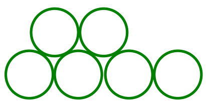
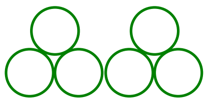
一、探討底列個數n的二維不完整堆疊之方法數？
二、探討以正三角形為底的三維不完整堆垛之方法數？
三、探討以正方形為底的三維不完整堆垛之方法數？
四、探討以正六邊形為底的三維不完整堆垛之方法數？

參、名詞的定義

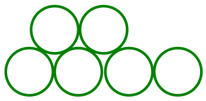
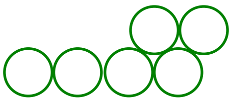
一、二維不完整堆疊

(一)將硬幣堆疊排成數列，規定

1. 每列的硬幣要相連接。

	
允許的排列	不允許的排列

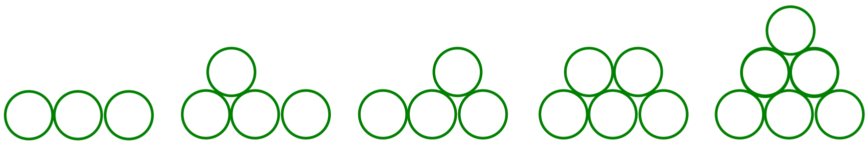
2. 除了底列的硬幣外，其餘的硬幣需接觸到下一列的「兩個」硬幣。

	
允許的排列	不允許的排列

(二)符號定義

二維不完整堆疊，若底列個數為n，則堆疊方法有$P(n)$種。

例如：底列個數為 3，則有下列 5 種堆疊方法。所以$P(3)=5$。



二、以正三角形為底的三維不完整堆垛

(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

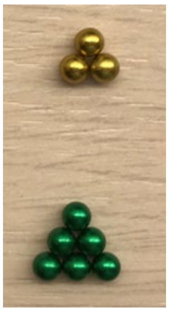
1. 每層的球皆相連接且圍成一個正三角形(Triangle)。

2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的「三個」球。

(二)符號定義

以正三角形為底的三維不完整堆垛，若正三角形的邊長為 n ，則堆垛方法有 $T(n)$ 種。

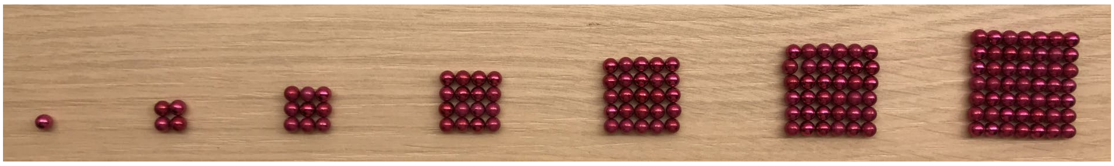
例如：底層正三角形的邊長為 3 時，則有下列 7 種堆垛方法。所以 $T(3)=7$ 。

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正三角形為底的堆垛	
堆垛底層上方情況				
底層				
說明	1 種排法	有四個凹洞， 4 種排法	直接放上 1 種排法	直接放上 有 1 種排法

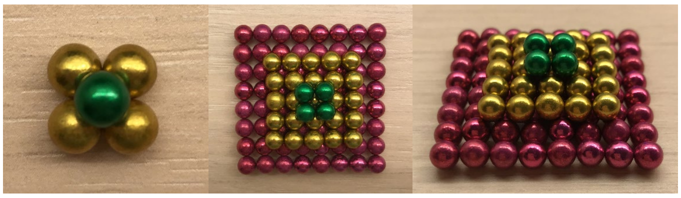
三、以正方形為底的三維不完整堆垛

(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

1. 每層的球皆相連接且圍成一個正方形(Square)。



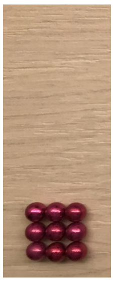
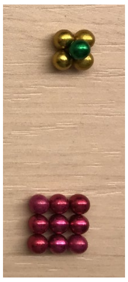
2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的「四個」球。



(二)符號定義

以正方形為底的三維不完整堆垛，若正方形的邊長為 n ，則堆垛方法有 $S(n)$ 種。

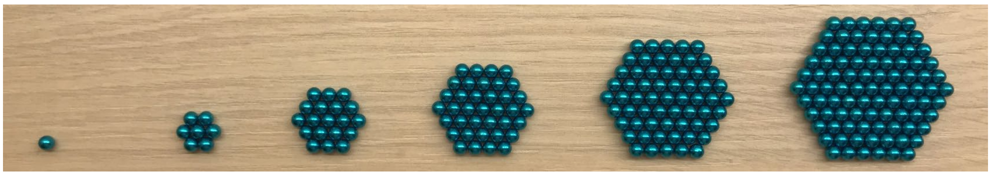
例如：底層正方形的邊長為 3 時，則有下列 7 種堆垛方法。所以 $S(3)=7$ 。

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正方形為底的堆垛	
堆垛底層上方情況				
底層				
說明	1 種排法	有四個凹洞， 4 種排法	直接放上 1 種排法	直接放上 有 1 種排法

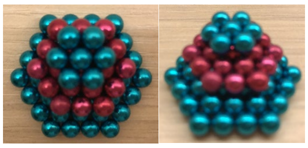
四、以正六邊形為底的三維不完整堆垛

(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

1. 每層的球皆相連接且圍成一個正六邊形(Hexagon)。



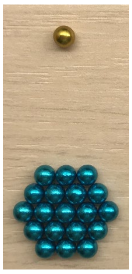
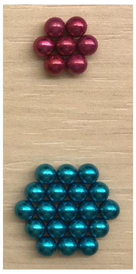
2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的「三個」球。



(二)符號定義

以正六邊形為底的三維不完整堆垛，若正六邊形的邊長為 n ，則堆垛方法有 $H(n)$ 種。

例如：底層正六邊形邊長為 3 時，則有下列 67 種堆垛方法。所以 $H(3)=67$ 。

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正六邊形為底的堆垛	
堆垛底層上方情況 底層				
說明	1 種排法	有 24 個凹洞，24 種排法	有六個方向直接放上，6 種排法	有六個方向且最上層有 6 個凹洞，共 6×6=36 種排法

肆、研究過程

一、二維不完整堆疊

（一）底列個數為 n 的二維不完整堆疊方法有 $P(n)$ 種。

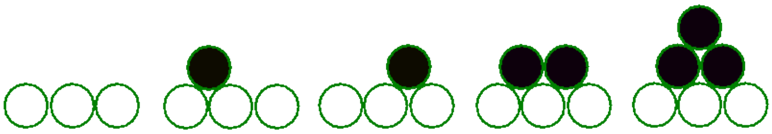
1. 當 $n=1$ 時，堆疊方法只有上方不放，1 種。

$\therefore P(1)=1$

2. 當 $n=2$ 時，堆疊方法有上方不放或放 1 個。

$\therefore P(2)=1+P(1)\times 1=1+1\times 1=2$

3. 當 $n=3$ 時，堆疊方法有上方不放或放 1 個或放底列個數 2 之二維不完整堆疊。

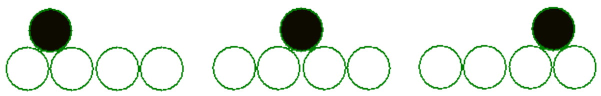


$\therefore P(3)=1+P(1)\times 2+P(2)\times 1=1+1\times 2+2\times 1=5$

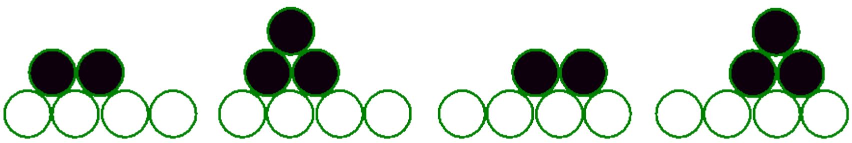
4. 當 $n=4$ 時，堆疊方法如下：

不放：1 種。

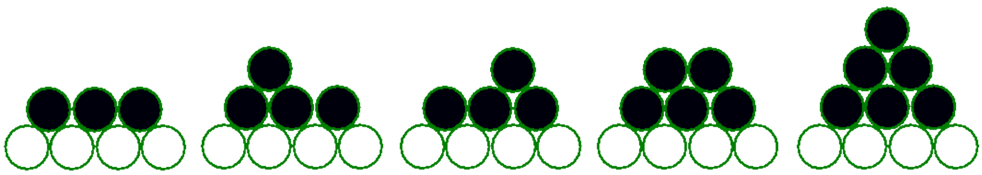
放 1 個：有 3 個凹洞可放 $n=1$ 的堆疊，共 $P(1)\times 3=1\times 3=3$ 種。



放底列個數 2 之二維不完整堆疊：有 3 個凹洞，但要相連 2 個凹洞為一組，所以有 2 組。
$\therefore$可放 $n=2$ 的二維不完整堆疊，共 $P(2)\times 2=2\times 2=4$ 種。



放底列個數 3 之二維不完整堆疊：有 3 個凹洞，但要相連 3 個凹洞為一組，只有 1 組。
$\therefore$可放 $n=3$ 的二維不完整堆疊，共 $P(3)\times 1=5\times 1=5$ 種。

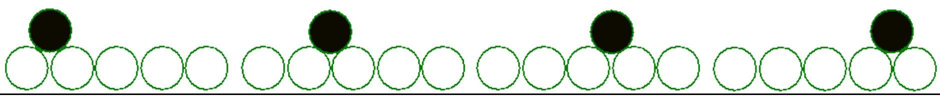


$\therefore P(4)=1+P(1)\times 3+P(2)\times 2+P(3)\times 1=1+1\times 3+2\times 2+5\times 1=13$

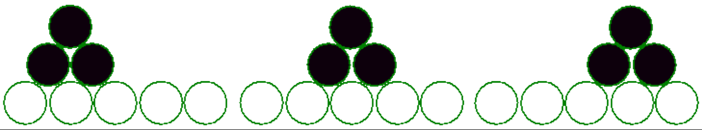
5. 當 $n=5$ 時，堆疊方法如下：

不放：1 種。

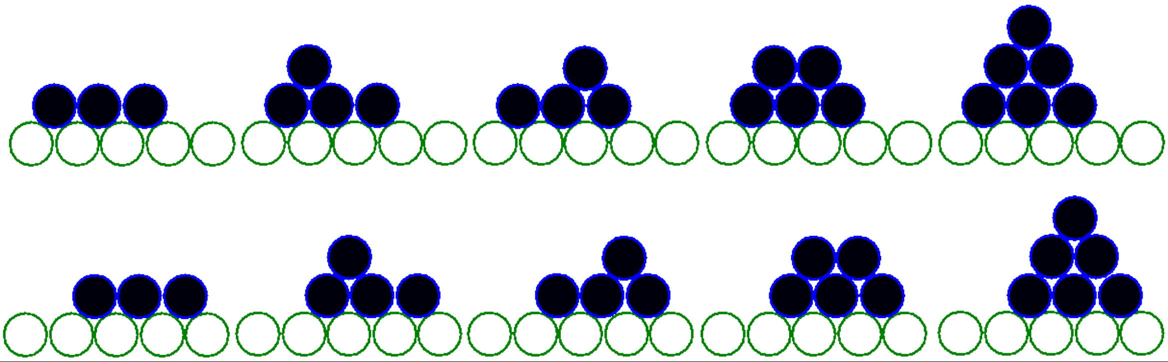
放 1 個：有 4 個凹洞，皆可放 n=1 的二維不完整堆疊，共 $P(1)\times 4=1\times 4=4$ 種。



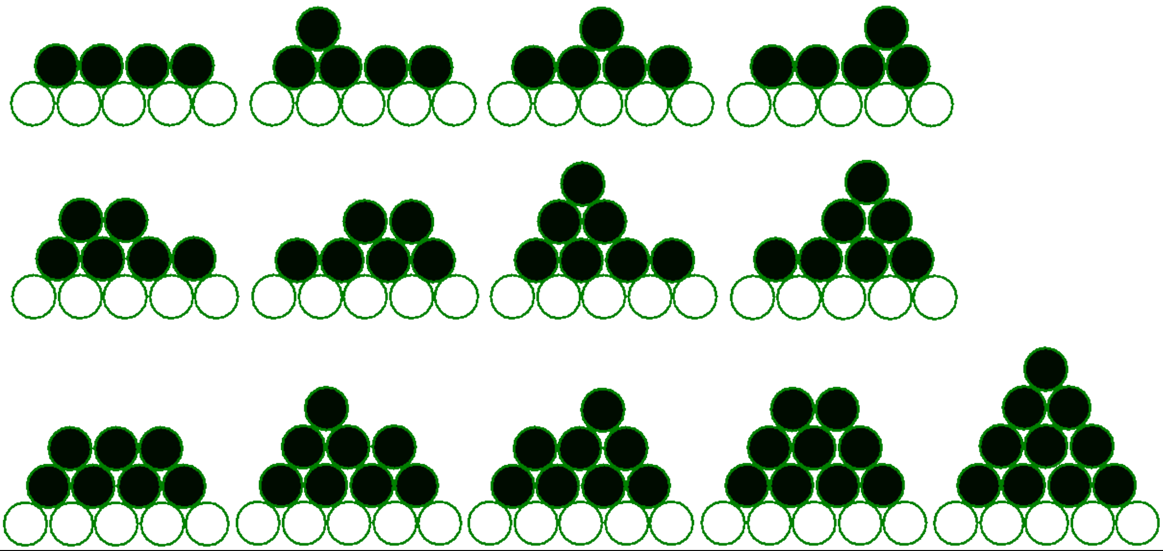
放底列個數 2 之二維不完整堆疊：有 4 個凹洞，但要相連 2 個凹洞為一組，所以有 3 組。
$\therefore$可放 $n=2$ 的二維不完整堆疊，共 $P(2)\times 3=2\times 3=6$ 種。



放底列個數 3 之二維不完整堆疊：有 4 個凹洞，但要相連 3 個凹洞為一組，有 2 組。
$\therefore$可放 $n=3$ 的二維不完整堆疊，共 $P(3)\times 2=5\times 2=10$ 種。



放底列個數 4 之二維不完整堆疊：有 4 個凹洞，但要相連 4 個凹洞為一組，只有 1 組。
$\therefore$可放 $n=4$ 的二維不完整堆疊，共 $P(4)\times 1=13\times 1=13$ 種。

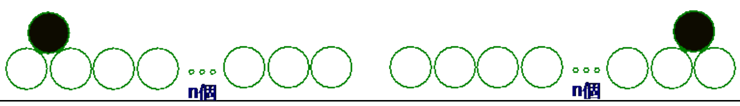


$$P(5)=1+P(1)\times 4+P(2)\times 3+P(3)\times 2+P(4)\times 1=1+1\times 4+2\times 3+5\times 2+13\times 1=34$$

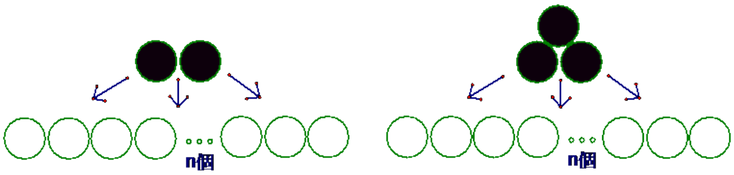
6. 觀察規律性，若底列個數為 n ，則堆疊方法如下：

不放：1 種。

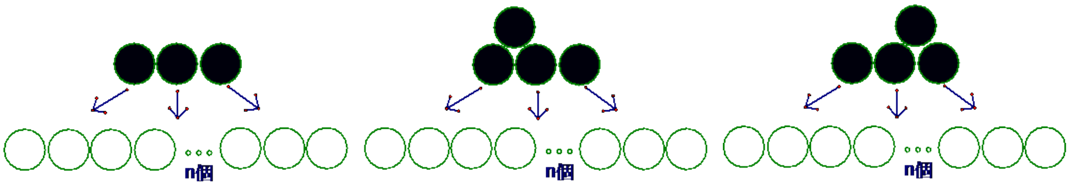
放 1 個：有 $n-1$ 個凹洞，皆可放 $n=1$ 的二維不完整堆疊，共 $P(1)\cdot(n-1)$ 種。

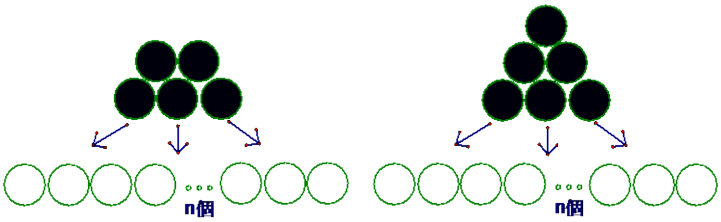


放底列個數 2 之二維不完整堆疊：有 $n-1$ 個凹洞，但要相連 2 個凹洞為一組，有 $n-2$ 組。
$\therefore$可放 $n=2$ 的二維不完整堆疊，共 $P(2)\cdot(n-2)$ 種。



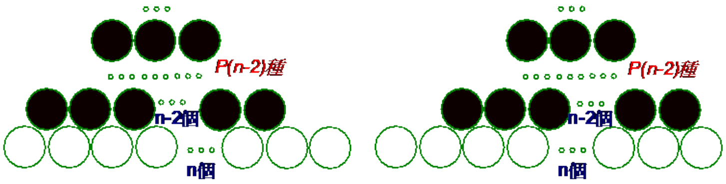
放底列個數 3 之二維不完整堆疊：有 $n-1$ 個凹洞，但要相連 3 個凹洞為一組，有 $n-3$ 組。$\therefore$ 可放 $n=3$ 的二維不完整堆疊，共 $P(3)\cdot(n-3)$ 種。



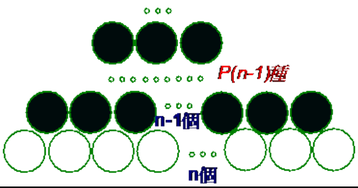


• • • • • • • • • • • • • • • •

放底列個數 $n-2$ 之二維不完整堆疊：有 $n-1$ 個凹洞，但要相連 $n-2$ 個凹洞為一組，只有 2 組。$\therefore$ 可放底列個數 $n-2$ 的二維不完整堆疊共有 $P(n-2)\times 2$ 種。



放底列個數 $n-1$ 之二維不完整堆疊：有 $n-1$ 個凹洞，但要相連 $n-1$ 個凹洞為一組，只有 1 組。$\therefore$ 可放底列個數 $n-1$ 的二維不完整堆疊共有 $P(n-1)\times 1$ 種。



$\therefore P(n)=1+P(1)\cdot(n-1)+P(2)\cdot(n-2)+P(3)\cdot(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 2+P(n-1)\times 1$ 。

★小結 1-1

底列個數 n 的二維不完整堆疊之方法數有
$P(n)=1+P(1)\cdot(n-1)+P(2)\cdot(n-2)+P(3)\cdot(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 2+P(n-1)\times 1$ 種。

（二）$P(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$P(n)=1+P(1)\cdot(n-1)+P(2)\cdot(n-2)+P(3)\cdot(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 2+P(n-1)\times 1\cdots$①

$P(n-1)=1+P(1)\cdot(n-2)+P(2)\cdot(n-3)+P(3)\cdot(n-4)+\cdots+P(n-2)\times 1\cdots$②

兩式相減①－②得 $P(n)-P(n-1)=P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(n-3)+P(n-2)+P(n-1)$

$\therefore P(n)=P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(n-3)+P(n-2)+2\cdot P(n-1)\cdots$③

$P(n-1)=P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(n-3)+2\cdot P(n-2)\cdots④$

兩式相減③－④$\therefore P(n)-P(n-1)=-P(n-2)+2\cdot P(n-1)$

$\therefore P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(0)=1$， $P(1)=1$， $P(2)=2$。

★小結 1-2

若底列個數 n 的二維不完整堆疊之方法數有 $P(n)$ 種，其遞迴關係式為
$P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(1)=1$， $P(2)=2$。

（三） $P(n)$ 的一般項

利用遞迴關係式 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(1)=1$， $P(2)=2$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	・・・
$P(n)$	1	2	5	13	34	89	233	610	・・・

由於費伯納西數列為 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，其中 $F(1)=1$， $F(2)=1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・
大兔	0	1	1	2	3	5	8	13	21	・・・
小兔	1	0	1	1	2	3	5	8	13	・・・
$F(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	・・・

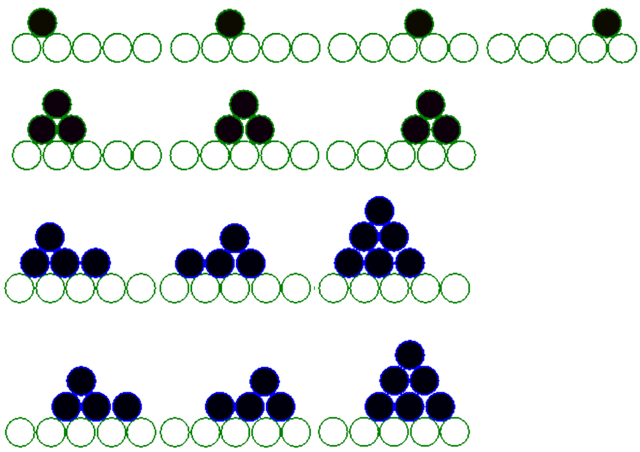
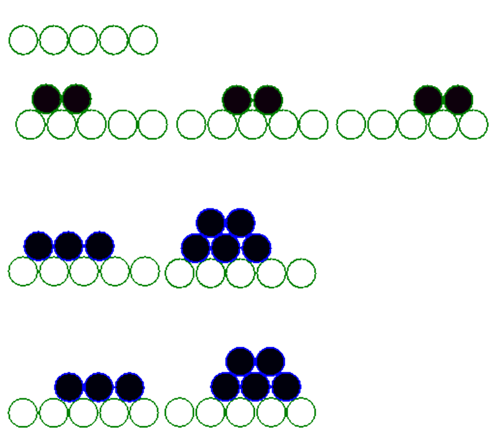
觀察此數列與「費伯納西數列」的**奇數項**有關係，

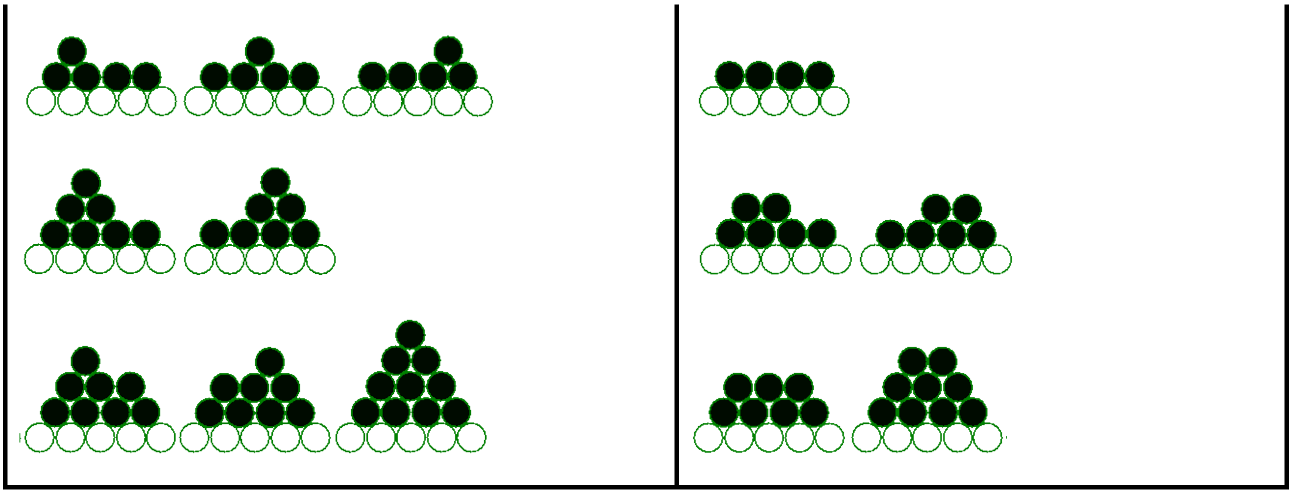
例如：比較 $F(9)=21+13=34$ 與 $P(5)=34$，

$F(9)=21+13=34$ 表示「**大兔子有 21 對**」，「**小兔子有 13 對**」。

將 $P(5)=34$ 的堆疊方式分成「**上方不能再堆疊**」與「**上方能再堆疊**」兩類，

發現「**上方不能再堆疊」有 21 個**，「**上方能再堆疊」有 13 個。**

大兔子有 21 對	小兔子有 13 對
「上方不能再堆疊」，有 21 個	「上方能再堆疊」，有 13 個
	



$\because F(n-2)=F(n-3)+F(n-4)$，即 $F(n-3)=F(n-2)-F(n-4)$

$$\therefore F(n)=F(n-1)+F(n-2)=\left(F(n-2)+F(n-3)\right)+F(n-2)=2F(n-2)+F(n-3)$$

$$=2F(n-2)+\left(F(n-2)-F(n-4)\right)=3F(n-2)-F(n-4)$$

因此，費伯納西數列的奇數項 $F(n)=3F(n-2)-F(n-4)$ 恰與 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$ 相同

又費伯納西數列的一般項為 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$

$$\therefore P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

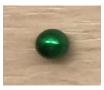
★小結 1-3

底列個數 n 的二維不完整堆疊之方法數有 $P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$ 種。

二、以正三角形為底的三維不完整堆垛

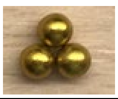
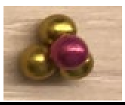
（一）若底層正三角形的邊長為 n，則三維不完整堆垛之方法有 $T(n)$ 種。

1. 當 $n=1$ 時，堆垛方法只有不放 1 種。



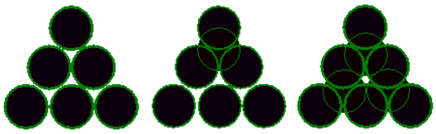
$\therefore T(1)=1$。

2. 當 $n=2$ 時，堆垛方法有上方不放或放 1 個。

只有 1 個凹洞可堆垛	不放：1 種。	放 1 個：只有 1 個凹洞，1 種。
		

$\therefore T(2)=1+T(1)\times 1=2$。

3. 當 $n=3$ 時，觀察凹洞，由上往下有 $1+1+2=4=2^2$ 個。



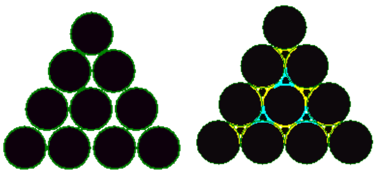
上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 2^2 種方式。

上方若放以邊長 2 之正三角形為底的三維不完整堆垛只有 1 種方式。

$\therefore T(3)=1+T(1)\times 2^2+T(2)\times 1^2=1+1\times 4+2\times 1=7$ 。

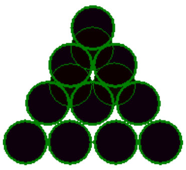
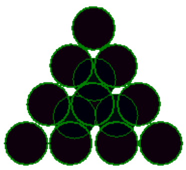
4. 當 $n=4$ 時，觀察凹洞，由上往下有 $1+1+2+2+3=9=3^2$ 個凹洞。
凹洞由外往內分成兩層(黃、藍)。



上方不放有 1 種方式。

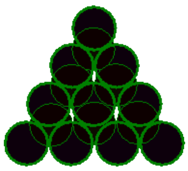
上方若放以邊長 1 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 3^2 種方式。(凹洞數)

上方若放以邊長 2 之正三角形為底的三維不完整堆垛

	正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**，則堆垛**中心落在藍色凹洞區**。 由上往下放有 $1+2=3$ 種。		正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**，則堆垛**中心落在球上**。 放置方法只有 1 種。

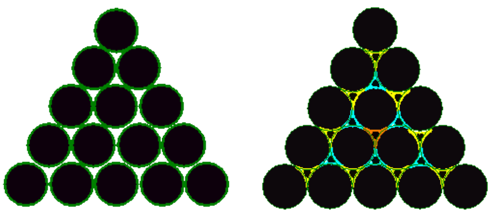
$\therefore$ 共有 $(1+2)+1=3+1=4=2^2$ 種方式。

上方若放以邊長 3 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。



$\therefore T(4)=1+T(1)\times 3^2+T(2)\times 2^2+T(3)\times 1^2=1+1\times 9+2\times 4+7\times 1=25$ 。

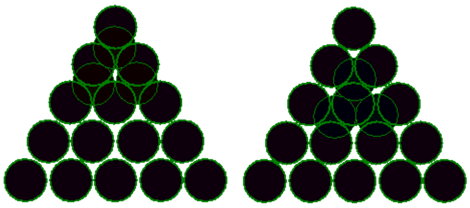
5. 當 $n=5$ 時，觀察凹洞，由上往下有 $1+1+2+2+3+3+4=16=4^2$ 個。
凹洞由外往內分成三層(黃、藍、橘)，將其分成奇數層(黃、橘)與偶數層(藍)。



上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 4^2 種方式。(凹洞數)

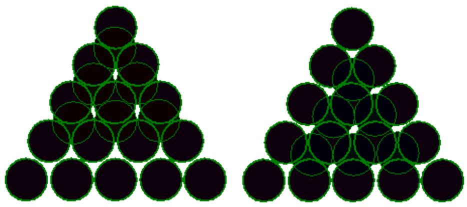
上方若放以邊長 2 之正三角形為底的三維不完整堆垛



正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**， 則堆垛**中心落在藍色凹洞區**。 由上往下放置有$1+2+3=6$種。	正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**， 則堆垛**中心落在球上** (從外往內數第二層的球)。 由上往下放置有$1+2=3$種。

$\therefore$共有$(1+2+3)+(1+2)=3^2$種方式。

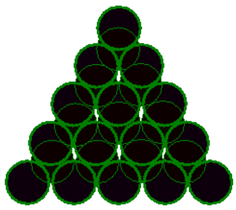
上方若放以<u>邊長 3 之正三角形為底的三維不完整堆垛</u>



正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**， 則堆垛**中心落在球上**(從外往內第二層的球)。由上往下放置有$1+2=3$種。	正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**， 則堆垛**中心落在橘色凹洞區**。 放置方法有 1 種。

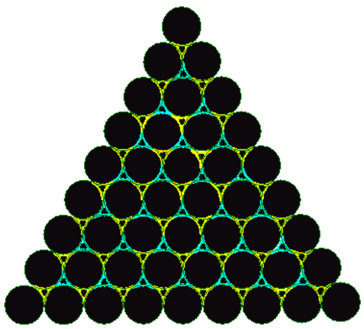
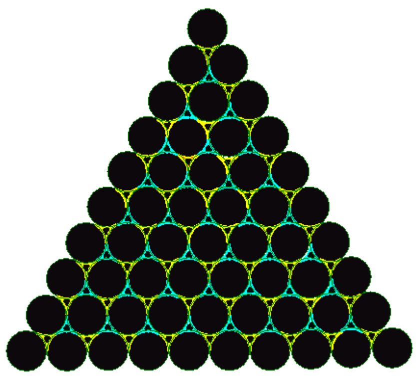
$\therefore$共有$(1+2)+1=3+1=4=2^2$種方式。

上方若放以<u>邊長 4 之正三角形為底的三維不完整堆垛</u>有 1 種方式。



$\therefore T(5)=1+T(1)\times 4^2+T(2)\times 3^2+T(3)\times 2^2+T(4)\times 1^2=1+1\times 16+2\times 9+7\times 4+25\times 1^2=88$。

6. 觀察規律性，若底層**正三角形**的邊長為n，
   觀察凹洞，由上往下有$1+1+2+2+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$個。
   凹洞由外層往內層分成奇數層(黃)與偶數層(藍)。

$n=9$ 	$n=10$ 

上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正三角形為底的三維不完整堆垛有$(n-1)^2$種方式(凹洞數)。

上方若放以邊長 2 之正三角形為底的三維不完整堆垛分兩類：

(1) 若將正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**，則堆垛**中心落在藍色凹洞區**。
由上往下放置有$1+2+\cdots+(n-2)$種。

(2) 若將正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**，則堆垛**中心落在球上**(從外往內數第二層的球)。由上往下放置有$1+2+\cdots+(n-3)$種。

共有$[1+2+\cdots+(n-2)]+[1+2+\cdots+(n-3)]=2\cdot[1+2+\cdots+(n-3)]+(n-2)=(n-2)^2$種。

上方若放以邊長 3 之正三角形為底的三維不完整堆垛，分兩類：

(1) 若將正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**，則堆垛**中心落在藍色凹洞區**。
由上往下放置有$1+2+\cdots+(n-3)$種。

(2) 若將正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**，則堆垛**中心落在球上**(從外往內數第二層的球)。由上往下放置有$1+2+\cdots+(n-4)$種。

共有$[1+2+\cdots+(n-3)]+[1+2+\cdots+(n-4)]=2\cdot[1+2+\cdots+(n-4)]+(n-3)=(n-3)^2$種。

．．．．．．．．．．

上方若放以邊長$(n-2)$之正三角形為底的三維不完整堆垛有$(1+2)+1=4=2^2$種方式。

上方若放以邊長$(n-1)$之正三角形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

$$\therefore T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+T(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$$ 。

★小結 2-1

以邊長n之正三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有
$T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+T(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$ **種。**

（二）$T(n)$遞迴關係式的整理化簡

$T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+T(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2\cdots$①

$T(n-1)=1+T(1)\cdot(n-2)^2+T(2)\cdot(n-3)^2+T(3)\cdot(n-4)^2+\cdots+T(n-2)\times 1^2\cdots$②

兩式相減① – ②

$T(n)-T(n-1)=(2n-3)\cdot T(1)+(2n-5)\cdot T(2)+(2n-7)\cdot T(3)+\cdots+5\cdot T(n-3)+3\cdot T(n-2)+T(n-1)$

$T(n)=(2n-3)\cdot T(1)+(2n-5)\cdot T(2)+(2n-7)\cdot T(3)+\cdots+5\cdot T(n-3)+3\cdot T(n-2)+2\cdot T(n-1)\cdots$③

$T(n-1)=(2n-5)\cdot T(1)+(2n-7)\cdot T(2)+(2n-9)\cdot T(3)+\cdots+3\cdot T(n-3)+2\cdot T(n-2)\cdots$④

兩式相減③ – ④$\therefore T(n)-T(n-1)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+T(3)+\cdots+T(n-3)\right)+T(n-2)+2T(n-1)$

$\therefore T(n)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+T(3)+\cdots+T(n-3)\right)+T(n-2)+3T(n-1)\cdots$⑤

$\therefore T(n-1)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+T(3)+\cdots+T(n-4)\right)+T(n-3)+3T(n-2)\cdots$⑥

兩式相減⑤ – ⑥ $\therefore T(n)-T(n-1)=T(n-3)-2T(n-2)+3T(n-1)$

$\therefore T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$，其中$T(1)=1$，$T(2)=2$，$T(3)=7$。

★小結 2-2

若以邊長n之正三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有$T(n)$種，其遞迴關係式
$T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$，**其中**$T(1)=1$，$T(2)=2$，$T(3)=7$。

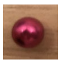
利用遞迴關係式

n	1	2	3	4	5	6	‧‧‧
$T(n)$	1	2	7	25	88	309	‧‧‧

三、以正方形為底的三維不完整堆垛

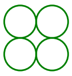
（一）若最底層**正方形**的邊長為 n ，則三維不完整堆垛方法有 $S(n)$ 種。

1. 當 $n=1$ 時，堆垛方法只有不放 1 種。



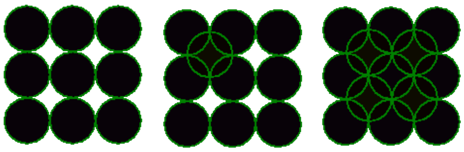
$\therefore S(1)=1$ 。

2. 當 $n=2$ 時，堆垛方法有上方不放或放 1 個。

只有 1 個凹洞可堆垛	不放：1 種。	放 1 個：只有 1 個凹洞，1 種。
		

$\therefore S(2)=1+S(1)\times 1=2$ 。

3. 當 $n=3$ 時，觀察凹洞有 $(3-1)^2=2^2$ 個。



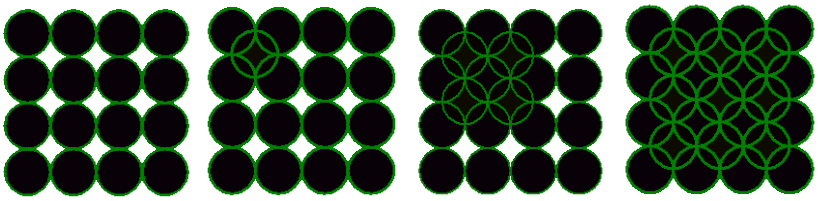
上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正方形為底的三維不完整堆垛有 2^2 種方式。

上方若放以邊長 2 之正方形為底的三維不完整堆垛只有 1 種方式。

$\therefore S(3)=1+S(1)\times 2^2+S(2)\times 1^2=1+1\times 4+2\times 1=7$ 。

4. 當 $n=4$ 時，觀察凹洞有 $(4-1)^2=3^2$ 個凹洞。



上方不放有 1 種方式。

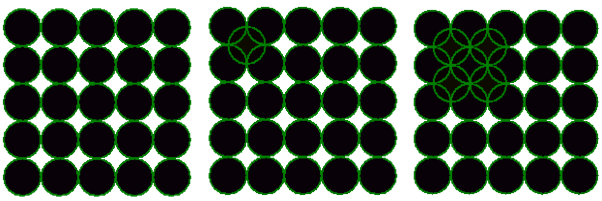
上方若放以邊長 1 之正方形為底的三維不完整堆垛有 3^2 種方式。

上方若放以邊長 2 之正方形為底的三維不完整堆垛有 $(4-2)^2=2^2$ 種方式。

上方若放以邊長 3 之正方形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

$\therefore S(4)=1+S(1)\times 3^2+S(2)\times 2^2+S(3)\times 1^2=1+1\times 9+2\times 4+7\times 1=25$ 。

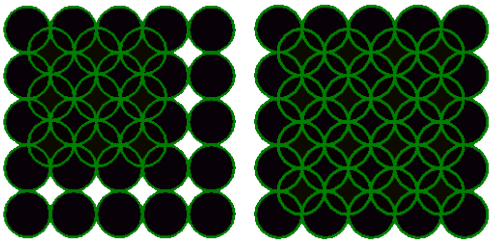
5. 當 $n=5$ 時，觀察凹洞有 $(5-1)^2=4^2$ 個。



上方不放有 1 種方式。

上方若放<u>以邊長 1 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 4^2 種方式。

上方若放<u>以邊長 2 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 $(5-2)^2=3^2$ 種方式。



上方若放<u>以邊長 3 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 $(5-3)^2=2^2$ 種方式。

上方若放<u>以邊長 4 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 1 種方式。

$\therefore S(5)=1+S(1)\times 4^2+S(2)\times 3^2+S(3)\times 2^2+S(4)\times 1^2=1+1\times 16+2\times 9+7\times 4+25\times 1^2=88$。

6. 觀察規律性，若最底層正方形的邊長為 n，觀察凹洞有 $(n-1)^2$ 個。

上方不放有 1 種方式。

上方若放<u>以邊長 1 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 $(n-1)^2$ 種方式(凹洞數)。

上方若放<u>以邊長 2 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 $(n-2)^2$ 種方式。

上方若放<u>以邊長 3 之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 $(n-3)^2$ 種方式。

．．．．．．．．．

上方若放<u>以邊長</u> $(n-2)$ <u>之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 2^2 種方式。

上方若放<u>以邊長</u> $(n-1)$ <u>之正方形為底的三維不完整堆垛</u>有 1 種方式。

$\therefore S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+S(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2$。

★小結 3-1

以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛，方法數有

$S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+S(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2$ 種。

（二）$S(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+S(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2\cdots$①

$S(n-1)=1+S(1)\cdot(n-2)^2+S(2)\cdot(n-3)^2+S(3)\cdot(n-4)^2+\cdots+S(n-2)\times 1^2\cdots$②

兩式相減①－②

$S(n)-S(n-1)=(2n-3)\cdot S(1)+(2n-5)\cdot S(2)+(2n-7)\cdot S(3)+\cdots+5\cdot S(n-3)+3\cdot S(n-2)+S(n-1)$

$S(n)=(2n-3)\cdot S(1)+(2n-5)\cdot S(2)+(2n-7)\cdot S(3)+\cdots+5\cdot S(n-3)+3\cdot S(n-2)+2\cdot S(n-1)\cdots$③

$S(n-1)=(2n-5)\cdot S(1)+(2n-7)\cdot S(2)+(2n-9)\cdot S(3)+\cdots+3\cdot S(n-3)+2\cdot S(n-2)\cdots$④

兩式相減③－④ $\therefore S(n)-S(n-1)=2\cdot\left(S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(n-3)\right)+S(n-2)+2S(n-1)$

$\therefore S(n)=2\cdot\left(S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(n-3)\right)+S(n-2)+3S(n-1)\cdots$⑤

又 $S(n-1)=2\cdot\left(S(1)+S(2)+S(3)+\cdots+S(n-4)\right)+S(n-3)+3S(n-2)\cdots$⑥

兩式相減⑤－⑥ $\therefore S(n)-S(n-1)=S(n-3)-2S(n-2)+3S(n-1)$

$\therefore S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$，其中 $S(1)=1$，$S(2)=2$，$S(3)=7$。

★小結 3-2

若以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $S(n)$ 種，其遞迴關係式 $S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$ ，其中 $S(1)=1$ ， $S(2)=2$ ， $S(3)=7$ 。

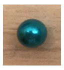
利用遞迴關係式

n	1	2	3	4	5	6	‧‧‧
$S(n)$	1	2	7	25	88	309	‧‧‧

四、以正六邊形為底的三維不完整堆垛

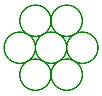
（一）若最底層**正六邊形**的邊長為 n ，則三維不完整堆垛方法有 $H(n)$ 種。

1. 當 $n=1$ 時，堆垛方法只有<u>不放</u> 1 種。



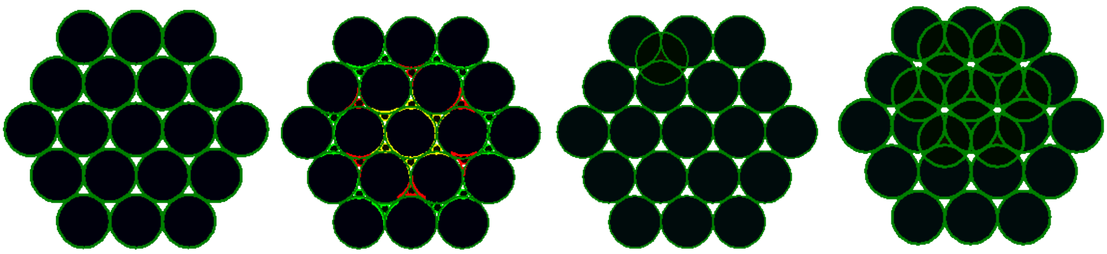
$\therefore H(1)=1$ 。

2. 當 $n=2$ 時，堆垛方法有上方<u>不放</u>或<u>放 1 個</u>。

有 6 個凹洞可堆垛	<u>不放</u>：1 種。	<u>放 1 個</u>：有 6 個凹洞，6 種。
		

$\therefore H(2)=1+S(1)\times 6=1+1\times 6=7$ 。

3. 當 $n=3$ 時，觀察凹洞由中心往外層有 $6+6+12=6\times(1+1+2)=6\times 2^2$



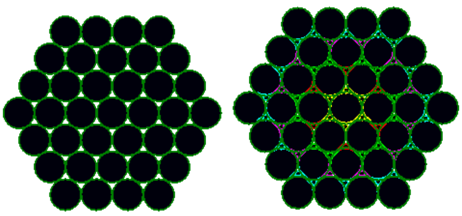
上方不放有 1 種方式。

上方若<u>放以邊長 1 之正六邊形為底的三維不完整堆垛</u>有 6×2^2 種方式。(凹洞數)

上方若<u>放以邊長 2 之正六邊形為底的三維不完整堆垛</u>有 6 種。(中心球落在黃色凹洞上)

$\therefore H(3)=1+H(1)\times 6\times 2^2+H(2)\times 6\times 1^2=1+1\times 24+7\times 6=67$ 。

4. 當 $n=4$ 時，觀察凹洞由中心往外層有 $6+6+12+12+18=6\times(1+1+2+2+3)=6\times 3^2$ 個凹洞。分成奇數層(黃、綠、藍)與偶數層(紅、粉紅)。



上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 6×3^2 種方式。(凹洞數)

上方若放以邊長 2 之正六邊形為底的三維不完整堆垛分成 3 類：

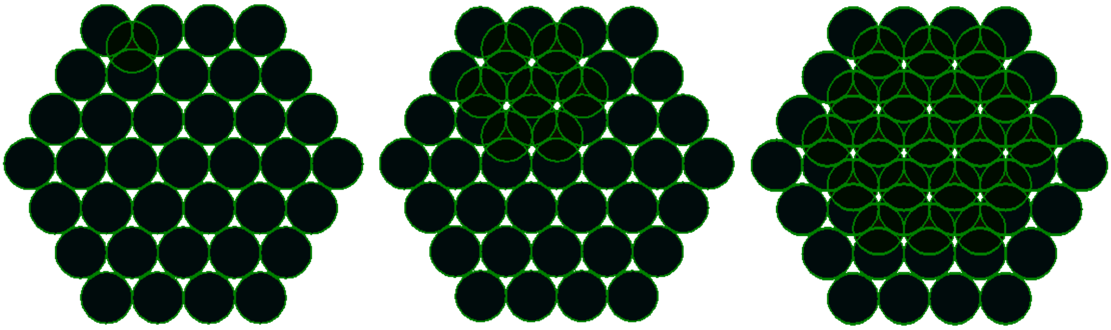
(1)若放在**奇數層凹洞區**且堆垛**中心落在黃色凹洞區**，則放置方式有 6 種。

(2)若放在**偶數層凹洞區**且堆垛**中心落在紅色凹洞區**，則放置方式有 6 種。

(3)若放在**奇數層凹洞區**且堆垛**中心落在綠色凹洞區**，則放置方式有 6×2 種。

∴共有 $6\times(1+1+2)=6\times 2^2$ 種方式。

上方若放以邊長 3 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 6 種。(中心球落在黃層凹洞上)



$\therefore H(4)=1+H(1)\times 6\times 3^2+H(2)\times 6\times 2^2+H(3)\times 6\times 1^2=1+1\times 54+7\times 24+67\times 6=625$ 。

5. 觀察規律性，若最底層正方形的邊長為 n ，觀察凹洞由中心往外層有
$6+6+12+12+\cdots+6(n-2)+6(n-2)+6(n-1)=6\cdot(n-1)^2$ 個。
上方不放有 1 種方式。
上方若放以邊長 1 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 $6\cdot(n-1)^2$ 種方式。(凹洞數)
上方若放以邊長 2 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有
$6+6+12+12+\cdots+6(n-3)+6(n-3)+6(n-2)=6\cdot(n-2)^2$ 種方式。
(若將正六邊形堆垛中心球落在由外往內第三層起至中心層凹洞上)
上方若放以邊長 3 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有
$6+6+12+12+\cdots+6(n-4)+6(n-4)+6(n-3)=6\cdot(n-3)^2$ 種方式。
(若將正六邊形堆垛中心球落在由外往內第五層起至中心層凹洞上)
• • • • • • • • •
上方若放以邊長 $(n-2)$ 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 6×2^2 種方式。
上方若放以邊長 $(n-1)$ 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 6 種方式。

$\therefore H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$ 。

★小結 4-1

以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有
$H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$ **種。**

（二）$H(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$\because H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$

$\therefore H(n)=1+6\left[H(1)\cdot(n-1)^2+H(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 2^2+H(n-1)\times 1^2\right]\cdots①$

$H(n-1)=1+6\left[H(1)\cdot(n-2)^2+H(2)\cdot(n-3)^2+\cdots+H(n-2)\times 1^2\right]\cdots②$

①－② $H(n)-H(n-1)=6\left[(2n-3)\cdot H(1)+(2n-5)\cdot H(2)+\cdots+5\cdot H(n-3)+3\cdot H(n-2)+H(n-1)\right]$

$\therefore H(n)=6\left[(2n-3)\cdot H(1)+(2n-5)\cdot H(2)+\cdots+5\cdot H(n-3)+3\cdot H(n-2)\right]+7H(n-1)\cdots③$

$H(n-1)=6\left[(2n-5)\cdot H(1)+(2n-7)\cdot H(2)+\cdots+3\cdot H(n-3)\right]+7H(n-2)\cdots④$

③－④ $\therefore H(n)-H(n-1)=12\cdot\left[H(1)+H(2)+H(3)+\cdots+H(n-3)\right]+11\cdot H(n-2)+7\cdot H(n-1)$

$\therefore H(n)=12\cdot\left[H(1)+H(2)+H(3)+\cdots+H(n-3)\right]+11\cdot H(n-2)+8\cdot H(n-1)\cdots⑤$

又 $H(n-1)=12\cdot\left[H(1)+H(2)+H(3)+\cdots+H(n-4)\right]+11\cdot H(n-3)+8\cdot H(n-2)\cdots⑥$

⑤－⑥ $\therefore H(n)-H(n-1)=H(n-3)+3\cdot H(n-2)+8\cdot H(n-1)$

$\therefore H(n)=9\cdot H(n-1)+3\cdot H(n-2)+H(n-3)$，其中 $H(1)=1$， $H(2)=7$， $H(3)=67$。

★小結 4-2

以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $H(n)$ 種，其遞迴關係式 $H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$，其中 $H(1)=1$， $H(2)=7$， $H(3)=67$。

利用遞迴關係式

n	1	2	3	4	5	6	・・・
$H(n)$	1	7	67	625	5833	54439	・・・

伍、研究結果

一、底列個數 n 之二維不完整堆疊方法數有 $P(n)$ 種。

(一) $P(n)=1+P(1)\cdot(n-1)+P(2)\cdot(n-2)+P(3)\cdot(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 2+P(n-1)\times 1$。

(二) 遞迴關係式 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(1)=1$， $P(2)=2$。

(三) 觀察數列 $P(n)$：1，2，5，13，34，89，233，610，・・・，

恰為「費伯納西數列的奇數項」，則 $P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$。

二、以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $T(n)$ 種。

(一) $T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+T(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$。

(二) 遞迴關係式 $T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$，其中 $T(1)=1$， $T(2)=2$， $T(3)=7$。

(三) $T(n)$：1，2，7，25，88，309，・・・

三、以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $S(n)$ 種。

(一) $S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+S(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2$。

(二) 遞迴關係式 $S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$，其中 $S(1)=1$， $S(2)=2$， $S(3)=7$。

(三) $S(n)$：1，2，7，25，88，309，・・・

四、以邊長n之正六邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有$H(n)$種。

(一) $H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$ 。

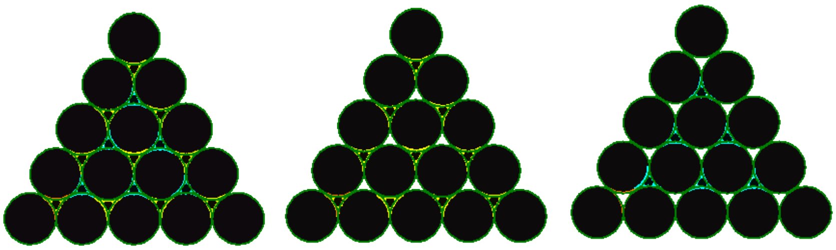
(二) 遞迴關係式$H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$,其中$H(1)=1,H(2)=7,H(3)=67$ 。

(三) $H(n)$ ：1，7，67，625，5833，54439，・・・

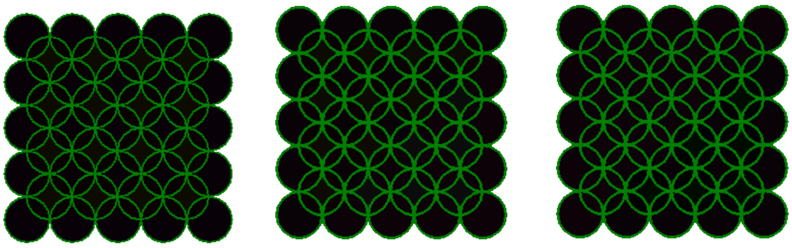
陸、討論

一、探討以正三角形和以正方形為底的三維不完整堆垛之方法數相同的原因。

觀察正三角形底層凹洞，由上往下有$1+1+2+2+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$個，可將正三角形凹洞拆解為兩個三角形$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$及$1+2+3+\cdots+(n-2)$ 。



觀察正方形的底層凹洞有$(n-1)^2$個，
可以將正方形凹洞拆解為兩個三角形$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$及$1+2+3+\cdots+(n-2)$ 。



因此，以邊長n的正三角形和正方形為底層的凹洞數皆有$(n-1)^2$個，所以堆垛方法數相同。

二、探討以正三角形和以正六邊形為底的三維不完整堆垛之方法數的關係。

$T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$種

$H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$種。

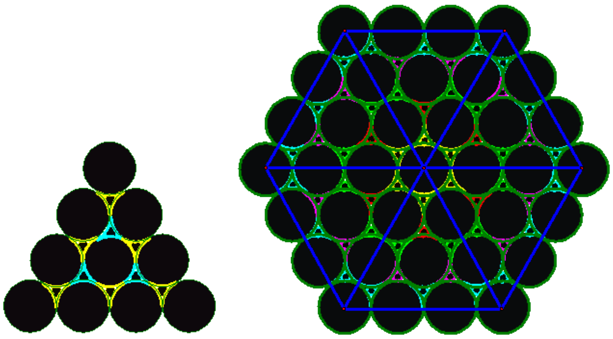
觀察正三角形的底層凹洞，

由上往下有$1+1+2+2+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$個，

觀察正六邊形的底層凹洞，

由中心往外層有$6+6+12+12+\cdots+6(n-2)+6(n-2)+6(n-1)=6(n-1)^2$個，

可以將正六邊形凹洞拆解為六個全等的三角形，每個凹洞數皆為$(n-1)^2$個。

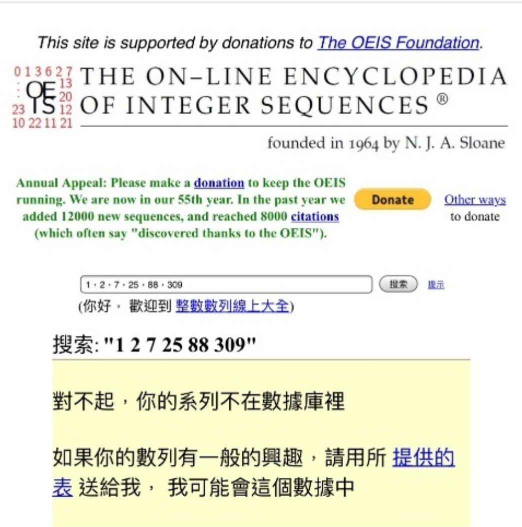


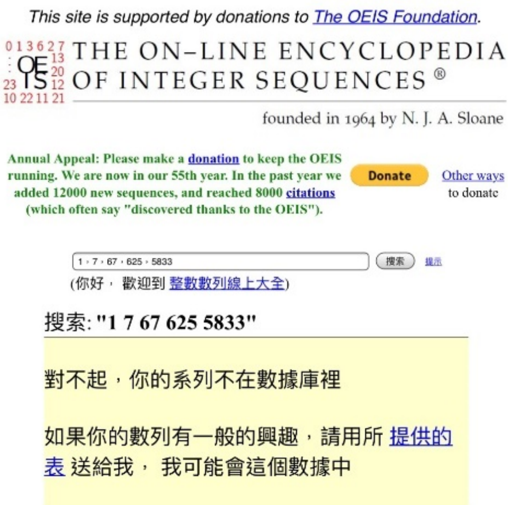
因此，邊長為n的正三角形與正六邊形為底層凹洞數有 6 倍的關係。

所以，除了都不放皆 1 種外，其他部分兩者的方法數皆有 6 倍的關係。

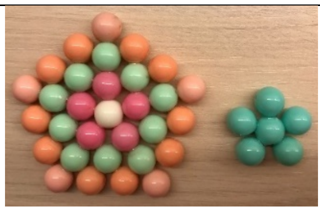
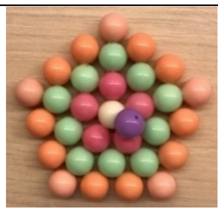
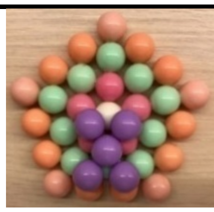
三、上網查「整數數列線上大全」[The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)]，

發現目前沒有$T(n)$、$S(n)$、$H(n)$。因此，$T(n)$、$S(n)$、$H(n)$是新發現的數列。





四、本研究討論的**正多邊形**底只有**正三角形、正方形、正六邊形**。至於**正五邊形**為底的凹洞是雙凹的形狀，因此擺放球在同一個凹洞會有兩個位置。若放邊長 2 之正五邊形為底的三維不完整堆垛，則出現無法完全置入凹洞的狀況。因此，不討論正五邊形為底的三維不完整堆垛。至於正七邊形以上，更是無法排出底層。

<table>
<tr><td colspan="2">正五邊形為底的凹洞是雙凹的形狀</td><td colspan="2">將擺放球在同一個凹洞會有兩個位置</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"> </td></tr>
<tr><td></td><td>若放邊長 2 之正五邊形為底的三維不完整堆垛，則出現無法完全置入凹洞的狀況。</td><td></td><td>置入凹洞可能的狀況，並無法排出正五邊形。</td></tr>
</table>

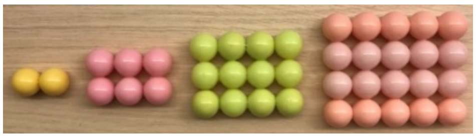
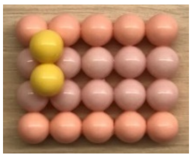
五、以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

(一)以「m 列 $m+k$ 行」長方形(rectangle)為底的三維不完整堆垛，定義：

若方向一致，稱**橫放**，方法有 $A(m,k)$ 種。

若方向不一致，稱**直放**，方法有 $B(m,k)$ 種。

以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛之方法有 $A(m,k)+B(m,k)=R(m,k)$ 種

<table>
<tr><td rowspan="2">例如：以<u>4 列 5 行</u>的長方形為底，則 $m=4$ ，$k=1$ 。
上方可放置的長方形的三維不完整堆垛的
底層有： 1 列 2 行、2 列 3 行、3 列 4 行。
</td><td>橫放 直放</td></tr>
<tr><td> </td></tr>
</table>

(二)以「4 列 5 行」長方形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

以「1 列 2 行」長方形為底的三維不完整堆垛，只有<u>不放</u> 1 種。

$\therefore R(1,1)=1$ 種。

以「2 列 3 行」長方形為底的三維不完整堆垛，

上方有<u>不放</u>、放<u>以 1 列 2 行長方形為底的三維不完整堆垛</u>，2 種類型。

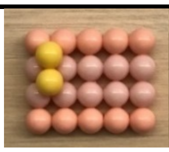
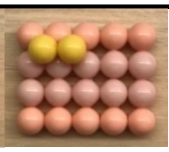
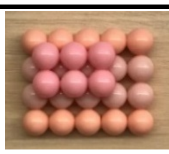
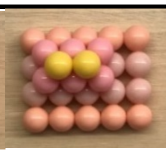
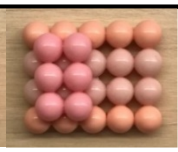
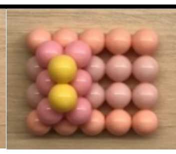
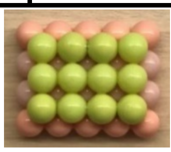
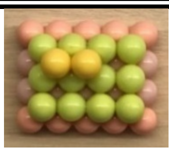
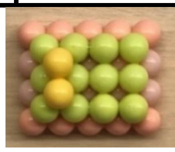
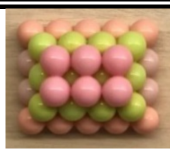
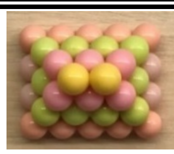
$\therefore R(2,1)=1+R(1,1)=1+1=2$ 。

以「3 列 4 行」長方形為底的三維不完整堆垛，上方有<u>不放</u>、放<u>以 1 列 2 行長方形為底的三維不完整堆垛</u>、放<u>以 2 列 3 行長方形為底的三維不完整堆垛</u>的情況，

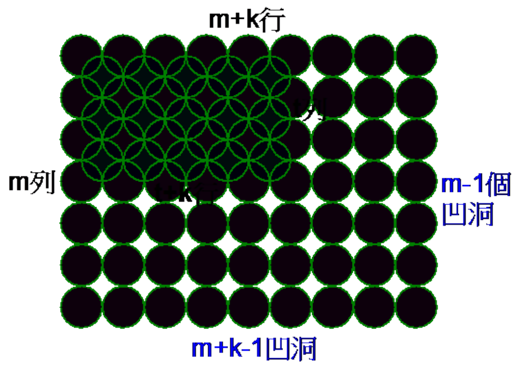
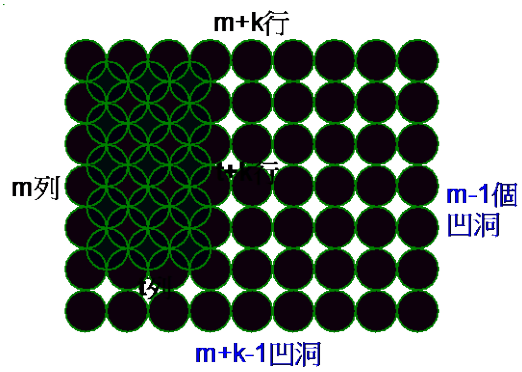
$\therefore R(3,1)=1+R(1,1)\times(4+3)+R(2,1)\times1=1+1\times7+2\times1=10$ 。

以「4 列 5 行」長方形為底的三維不完整堆垛，情況如下

<table>
<tr><td>
不放</td><td> 
<u>放 1 列 2 行長方形為底堆垛</u></td><td>   
<u>放以 2 列 3 行長方形為底的三維不完整堆垛</u></td></tr>
<tr><td colspan="3">    
<u>放以 3 列 4 行長方形為底的三維不完整堆垛</u></td></tr>
</table>

$\therefore R(4,1)=1+R(1,1)\times(9+8)+R(2,1)\times(4+3)+R(3,1)\times1 \ =1+1\times17+2\times7+10\times1=42$ 。

(三)若「m 列 $m+k$ 行」長方形為底，置放入「t 列 $t+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

橫放：	直放：
	
方法數 $=[(m-1)-t+1][(m+k-1)-(t+k)+1]$ $=(m-t)^2$	方法數$=[(m-1)-(t+k)+1][(m+k-1)-t+1]$ $=(m-t-k)(m-t+k)=(m-t)^2-k^2$ 其中 $m-1\geq t+k$ ，即 $t\leq m-k-1$

(四) 以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

1. 若只能「橫放」

上方不放有 1 種方式。

上方若放以「1 列 $1+k$ 行」之長方形為底的三維不完整堆垛有 $(m-1)^2$ 種方式。

上方若放以「2 列 $2+k$ 行」之長方形為底的三維不完整堆垛有 $(m-2)^2$ 種方式。

．．．．．．．．．

上方若放以「 $m-1$ 列 $(m-1)+k$ 行」之長方形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

則方法數 $A(m,k)=1+A(1,k)\cdot(m-1)^2+A(2,k)\cdot(m-2)^2+\cdots+A(m-2,k)\cdot 2^2+A(m-1,k)\cdot 1^2$ 。

恰巧與**以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛方法數相同**。

★小結 5-1

以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，若只能「橫放」方法數有
$A(m,k)=1+A(1,k)\cdot(m-1)^2+A(2,k)\cdot(m-2)^2+\cdots+A(m-2,k)\cdot 2^2+A(m-1,k)\cdot 1^2$ **種。**

2. 若能「橫放」與「直放」

上方不放有 1 種方式。

上方若放以「1 列 $1+k$ 行」之長方形為底的三維不完整堆垛有 $(m-1)^2+\underline{(m-1)^2-k^2}$ 種方式

．．．．．．．．．

上方若放以「t 列 $t+k$ 行」之長方形為底的三維不完整堆垛有 $(m-t)^2+\underline{(m-t)^2-k^2}$ 種方式，其中 $m-1\geq t+k$ ，即 $m-t\geq k+1$ 。

則方法數 $R(m,k)=1+R(1,k)\left[(m-1)^2+\underline{(m-1)^2-k^2}\right]+R(2,k)\left[(m-2)^2+\underline{(m-2)^2-k^2}\right]+\cdots$

$$+\underbrace{R(m-1-k,k)\left[(k+1)^2+\underline{(k+1)^2-k^2}\right]}_{\text{當}t=m-k-1,\text{即}m-t=k+1}+\underbrace{R(m-k,k)\cdot k^2}_{\text{當}t=m-k,\text{即}m-t=k}+R(m+1-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots$$

$$+R(m-2,k)\cdot 2^2+R(m-1,k)\cdot 1^2$$

★小結 5-2

以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，若能橫放與直放之方法數有

$$R(m,k)=1+R(1,k)\left[(m-1)^2+\underline{(m-1)^2-k^2}\right]+R(2,k)\left[(m-2)^2+\underline{(m-2)^2-k^2}\right]+\cdots$$

$$+R(m-1-k,k)\left[(k+1)^2+\underline{(k+1)^2-k^2}\right]+R(m-k,k)\cdot k^2+R(m+1-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots$$

當$t=m-k-1$,即$m-t=k+1$　　當$t=m-k$,即$m-t=k$

$$+R(m-2,k)\cdot 2^2+R(m-1,k)\cdot 1^2$$ 種。

(五)化簡 $R(m,k)$

$$R(m,k)=1+R(1,k)\left[(m-1)^2+\underline{(m-1)^2-k^2}\right]+R(2,k)\left[(m-2)^2+\underline{(m-2)^2-k^2}\right]+\cdots$$

$$+R(m-1-k,k)\left[(k+1)^2+\underline{(k+1)^2-k^2}\right]+R(m-k,k)\cdot k^2+R(m+1-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots$$

當$t=m-k-1$,即$m-t=k+1$　　當$t=m-k$,即$m-t=k$

$$+R(m-2,k)\cdot 2^2+R(m-1,k)\cdot 1^2\cdots①$$

$$\therefore R(m-1,k)=1+R(1,k)\left[(m-2)^2+\underline{(m-2)^2-k^2}\right]+R(2,k)\left[(m-3)^2+\underline{(m-3)^2-k^2}\right]+\cdots$$

$$+R(m-2-k,k)\left[(k+1)^2+\underline{(k+1)^2-k^2}\right]+R(m-1-k,k)\cdot k^2+R(m-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots$$

$$+R(m-3,k)\cdot 2^2+R(m-2,k)\cdot 1^2\cdots②$$

①－②得

$$\therefore R(m,k)=R(1,k)\cdot(4m-6)+R(2,k)\cdot(4m-10)+\cdots+R(m-2-k,k)\cdot(4k+6)$$

$$+R(m-1-k,k)\cdot(4k+2)+\underline{R(m-k,k)\cdot(2k-1)}+\cdots+R(m-2,k)\cdot 3+2\cdot R(m-1,k)\cdots③$$

$$\therefore R(m-1,k)=R(1,k)\cdot(4m-10)+R(2,k)\cdot(4m-14)+\cdots+R(m-3-k,k)\cdot(4k+6)$$

$$+R(m-2-k,k)\cdot(4k+2)+\underline{R(m-1-k,k)\cdot(2k-1)}+\underline{R(m-k,k)\cdot(2k-3)}+\cdots$$

$$+R(m-3,k)\cdot 3+2\cdot R(m-2,k)\cdots④$$

③－④整理得

$$\therefore R(m,k)=R(1,k)\cdot 4+R(2,k)\cdot 4+\cdots+R(m-2-k,k)\cdot 4\quad+\underline{R(m-1-k,k)\cdot(2k+3)}$$

$$+R(m-k,k)\cdot 2+\cdots R(m-3,k)\cdot 2+\underline{R(m-2,k)}+\underline{3\cdot R(m-1,k)}\cdots⑤$$

$$\therefore R(m-1,k)=R(1,k)\cdot 4+R(2,k)\cdot 4+\cdots+R(m-3-k,k)\cdot 4\quad+\underline{R(m-2-k,k)\cdot(2k+3)}$$

$$+R(m-1-k,k)\cdot 2+\cdots R(m-4,k)\cdot 2+\underline{R(m-3,k)}+\underline{3\cdot R(m-2,k)}\cdots⑥$$

⑤－⑥整理得

$$\boxed{\therefore R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)}$$

★小結 5-3

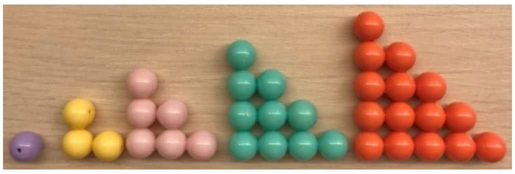
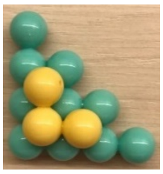
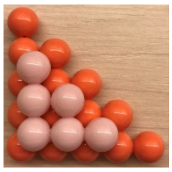
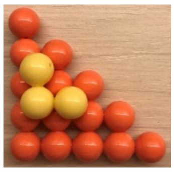
以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，
若能橫放與直放之方法數有 $R(m,k)$ 種，其遞迴關係式

$$R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)$$

六、以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以股長 n 之等腰直角三角形(Isosceles right triangle)為底的三維不完整堆垛，

堆垛方法有 $I(n)$ 種。

(二) 以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

觀察凹洞數，股長 n 之等腰直角三角形有 $1+2+\cdots+(n-2)$ 個。

股長 1 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore I(1)=1$ 種。

股長 2 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore I(2)=1$ 種。

股長 3 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法有 $I(3)=1+1\cdot I(1)=1+1=2$。

股長 4 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，有 $I(4)=1+(1+2)\cdot I(1)+1\cdot I(2)=5$。

・・・・・・・・・

股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法有

$$I(n)=1+\left[1+2+\cdots+(n-2)\right]I(1)+\left[1+2+\cdots+(n-3)\right]I(2)+\cdots+\left[1+2\right]I(n-3)+1\cdot I(n-2)$$

$$=1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}I(1)+\frac{(n-2)(n-3)}{2}I(2)+\cdots+3\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2)$$

★小結 6-1

以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有

$I(n)=1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}I(1)+\frac{(n-2)(n-3)}{2}I(2)+\cdots+3\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2)$ 種。

(三)化簡 $I(n)$

$$I(n)=1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}I(1)+\frac{(n-2)(n-3)}{2}I(2)+\cdots+3\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2)\cdots①$$

$$I(n-1)=1+\frac{(n-2)(n-3)}{2}I(1)+\frac{(n-3)(n-4)}{2}I(2)+\cdots+1\cdot I(n-3)\cdots②$$

① – ②整理得 $I(n)=(n-2)I(1)+(n-3)I(2)+\cdots+2\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2)+I(n-1)\cdots③$

$I(n-1)=(n-3)I(1)+(n-4)I(2)+\cdots+1\cdot I(n-3)+I(n-2)\cdots④$

③ – ④整理得 $I(n)=I(1)+I(2)+\cdots+I(n-3)+2I(n-1)\cdots⑤$

$I(n-1)=I(1)+I(2)+\cdots+I(n-4)+2I(n-2)\cdots⑥$

⑤ – ⑥整理得 $I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$，其中 $I(1)=I(2)=1$，$I(3)=2$。

★小結 6-2

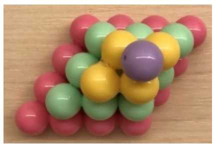
以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $I(n)$ 種，其遞迴關係式

$I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$ 種，其中 $I(1)=I(2)=1$，$I(3)=2$。

★$I(n)$：1，1，2，5，12，28，・・・

七、以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以邊長 n 之菱形(rhombus)為底的三維不完整堆垛，堆垛方法有 $r(n)$ 種。

(二) 以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

觀察凹洞數，股長 n 之菱形有 $2\left[1+1+2+2+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)\right]=2(n-1)^2$ 個。

以邊長 1 之菱形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore r(1)=1$ 種。

以邊長 2 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有 $r(2)=1+2\times1^2\cdot r(1)=1+2=3$ 種。

以邊長 3 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有 $r(3)=1+2\times2^2\cdot r(1)+2\times1^2\cdot r(2)=15$ 種。

以邊長 4 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有

$r(4)=1+2\times3^2\cdot r(1)+2\times2^2\cdot r(2)+2\times1^2\cdot r(3)=1+18\times1+8\times3+2\times15=73$ 種。

‧‧‧‧‧‧‧‧‧

以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有

$r(n)=1+2(n-1)^2r(1)+2(n-2)^2r(2)+\cdots+2\times2^2r(n-2)+2\times1^2r(n-1)$

★小結 7-1

以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法數有
$r(n)=1+2(n-1)^2r(1)+2(n-2)^2r(2)+\cdots+2\times2^2r(n-2)+2\times1^2r(n-1)$ 種。

邊長為 n 的正三角形與菱形為底層凹洞數有 2 倍的關係。
所以，除了都不放皆 1 種外，其他部分兩者的方法數皆有 2 倍的關係。

(三)化簡 $r(n)$

$r(n)=1+2(n-1)^2r(1)+2(n-2)^2r(2)+\cdots+2\times2^2r(n-2)+2\times1^2r(n-1)\cdots$①

$r(n-1)=1+2(n-2)^2r(1)+2(n-3)^2r(2)+\cdots+2\times1^2r(n-2)\cdots$②

①－②整理得 $r(n)=2\left[(2n-3)r(1)+(2n-5)r(2)+\cdots+3r(n-2)\right]+3r(n-1)\cdots$③

$r(n-1)=2\left[(2n-5)r(1)+(2n-7)r(2)+\cdots+3r(n-3)\right]+3r(n-2)\cdots$④

③－④整理得 $r(n)=4\left[r(1)+r(2)+\cdots+r(n-3)\right]+3r(n-2)+4r(n-1)\cdots$⑤

$r(n-1)=4\left[r(1)+r(2)+\cdots+r(n-4)\right]+3r(n-3)+4r(n-2)\cdots$⑥

⑤－⑥整理得 $r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$，其中 $r(1)=1$，$r(2)=3$，$r(3)=15$。

★小結 7-2

以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $r(n)$ 種，其遞迴關係式
$r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$，其中 $r(1)=1$，$r(2)=3$，$r(3)=15$。

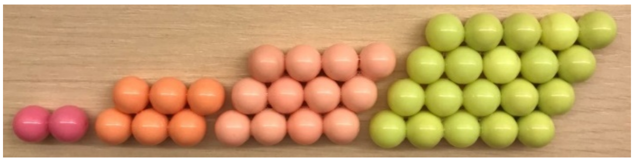
★$r(n)$：1，3，15，73，‧‧‧

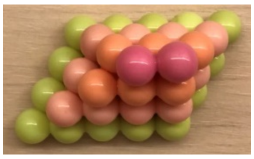
八、以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形(parallelogram)為底的三維不完整堆垛，堆垛方法有 $p(m,k)$ 種。

例如：以斜邊 4 底邊 $5(=4+1)$ 之平行四邊形為底，則 $m=4$ ，$k=1$ 。

上方可放置的平行四邊形如下：





(二) 以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

上方不放有 1 種方式。

上方若放以斜邊 2 底邊 $(2+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛有 $2(m-1)^2$ 種方式。

上方若放以斜邊 3 底邊 $(3+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛有 $2(m-2)^2$ 種方式。

• • • • • • • • •

上方若放以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

則方法數 $p(m,k)=1+p(1,k)\cdot 2(m-1)^2+p(2,k)\cdot 2(m-2)^2+\cdots+p(m-1,k)\cdot 2\times 1^2$ 。

恰巧與**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛方法數相同**。

★小結 8-1

以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有

$p(m,k)=1+p(1,k)\cdot 2(m-1)^2+p(2,k)\cdot 2(m-2)^2+\cdots+p(m-2,k)\cdot 2\times 2^2+p(m-1,k)\cdot 2\times 1^2$

★小結 8-2

以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $p(m,k)$ 種，

其遞迴關係式 $p(m,k)=5p(m-1,k)-p(m-2,k)+p(m-3,k)$ ，

其中 $p(1,k)=1$ ， $p(2,k)=3$ ， $p(3,k)=15$ 。

柒、結論

一、**底列個數 n 之二維不完整堆疊**，方法數有 $P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$ 種。

而 $P(n)=1+P(1)\cdot(n-1)+P(2)\cdot(n-2)+P(3)\cdot(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 2+P(n-1)\times 1$ 。

且遞迴關係式 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$ ，其中 $P(1)=1$ ， $P(2)=2$ 。

二、**以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $T(n)$ 種。

而 $T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+T(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$ 。

且遞迴關係式 $T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$ ，其中 $T(1)=1$ ， $T(2)=2$ ， $T(3)=7$ 。

三、**以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $S(n)$ 種。

而 $S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+S(3)\cdot(n-3)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2$ 。

且遞迴關係式 $S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$ ，其中 $S(1)=1$ ， $S(2)=2$ ， $S(3)=7$ 。

四、**以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $H(n)$ 種。

而 $H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$ 。

且遞迴關係式 $H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$ ，其中 $H(1)=1$ ， $H(2)=7$ ， $H(3)=67$ 。

五、邊長 n 的正三角形與正方形為底層的凹洞數皆有 $(n-1)^2$ 個，所以堆垛方法數相同。

六、邊長為 n 的正三角形與正六邊形為底層凹洞數有 6 倍的關係。
所以，除了都不放皆 1 種外，其他部分兩者的方法數皆有 6 倍的關係。

七、$T(n)$ 、 $S(n)$ 、 $H(n)$ 是新發現的數列。

八、本研究討論的**正多邊形**底只有**正三角形、正方形、正六邊形**。至於**正五邊形**為底的凹洞是雙凹形狀，出現無法完全置入凹洞的狀況。至於**正七邊形**以上，更是無法排出底層。

九、**以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛**，若只能「橫放」，則方法數
$A(m,k)=1+A(1,k)\cdot(m-1)^2+A(2,k)\cdot(m-2)^2+\cdots+A(m-2,k)\cdot 2^2+A(m-1,k)\cdot 1^2$ 。
恰巧與以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛方法數相似。

十、**以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛**，若能橫放或直放，則方法數有

$$R(m,k)=1+R(1,k)\left[(m-1)^2+\underline{(m-1)^2-k^2}\right]+R(2,k)\left[(m-2)^2+\underline{(m-2)^2-k^2}\right]+\cdots$$

$$+R(m-1-k,k)\left[(k+1)^2+\underline{(k+1)^2-k^2}\right]+R(m-k,k)\cdot k^2+R(m+1-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots$$

$$+R(m-2,k)\cdot 2^2+R(m-1,k)\cdot 1^2 \text{ 種。}$$

且遞迴關係式 $R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)$
$+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)$ 。

十一、**以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數有

$$I(n)=1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}I(1)+\frac{(n-2)(n-3)}{2}I(2)+\cdots+3\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2) \text{ 種。}$$

且遞迴關係式 $I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$ 種，其中 $I(1)=I(2)=1$ ， $I(3)=2$ 。

十二、**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛**，方法數有

$r(n)=1+2(n-1)^2r(1)+2(n-2)^2r(2)+\cdots+2\times2^2r(n-2)+2\times1^2r(n-1)$ 種。

且遞迴關係式 $r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$ ，其中 $r(1)=1$ ， $r(2)=3$ ， $r(3)=15$ 。

十三、邊長為 n 的正三角形與菱形為底層凹洞數有 2 倍的關係。

所以，除了都不放皆 1 種外，其他部分兩者的方法數皆有 2 倍的關係。

十四、**以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛**，方法數有

$p(m,k)=1+p(1,k)\cdot2(m-1)^2+p(2,k)\cdot2(m-2)^2+\cdots+p(m-2,k)\cdot2\times2^2+p(m-1,k)\cdot2\times1^2$

其遞迴關係式 $p(m,k)=5p(m-1,k)-p(m-2,k)+p(m-3,k)$ ，

其中 $p(1,k)=1$ ， $p(2,k)=3$ ， $p(3,k)=15$ 。

恰巧與**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛**方法數相同。

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 44(2), February 2018（84/ From the Archives）

二、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html

三、國中數學八年級，等差數列。南一出版社。

【評語】030406

1. 此作品主要是研究：計算二維及三維不完整堆垛方法數，在二維的情形，得到底列為 n 個硬幣的不完全堆疊方法數恰好構成費波那西數列奇數項，這個問題與結果曾出現在 Herbert S. Wilf 所著 generatingfunctionology 一書第二章例題 7 和習題 19。在整數數列線上大全(OEIS)編號 A001519 之數列 Greg Dresden 於 2020 年 6 月 29 日提出了相關資訊。作者在不知道相關文獻的情形下得到這個漂亮的結論是很好的表現。

2. 此外，作者考慮以邊長為 n 之正三角形為底的三維不完全堆垛的方法數與以邊長為 n 之正方形為底的三維不完全堆垛的方法數相等，且數列並未收錄在整數數列線上大全，是一個有組合意涵的新數列。

3. 作者善於觀察並利用遞迴關係的工具，做出有趣的結果。此研究主題屬組合數學遞迴關係探討，與所學相關，有趣的科展題目，需加強歸納論證。整體而言，表現佳。

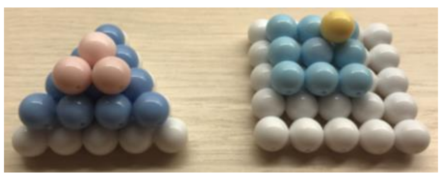
作品海報

壹、研究動機

色彩繽紛的巴克球，可以讓人隨意創作出各種幾何圖形，令人愛不釋手。某天閒暇時，我將巴克球堆垛出一座金字塔，聯想到**常見的堆垛都是由下往上、逐層遞減且凹洞填滿的「完整」圖形**。但如果堆垛出「不完整」的圖形，又會有哪些情況呢？

貳、研究目的與問題

一、探討**底列個數** n 的二維不完整堆疊之方法數？
二、探討以**正三角形**為底的三維不完整堆垛之方法數？
三、探討以**正方形**為底的三維不完整堆垛之方法數？
四、探討以**正六邊形**為底的三維不完整堆垛之方法數？

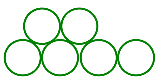
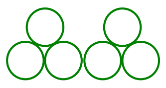


參、名詞的定義

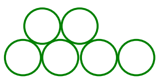
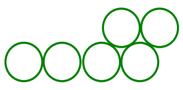
一、二維不完整堆疊

(一)將硬幣堆疊排成數列，規定

1. 每列的硬幣要相連接。

	允許的排列		不允許的排列

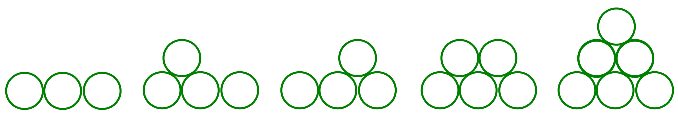
2. 除了底列的硬幣外，其餘硬幣需接觸到下一列的兩個硬幣。

	允許的排列		不允許的排列

(二)符號定義

二維不完整堆疊，若底列個數為 n ，則堆疊方法有 $P(n)$ 種。

例：底列個數為 3，則有下列 5 種堆疊方法。所以 $P(3)=5$ 。



二、以正三角形為底的三維不完整堆垛

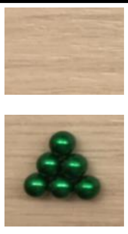
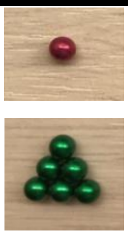
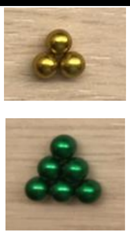
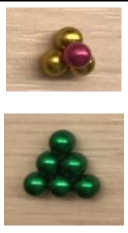
(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

1. 每層的球皆相連接且圍成一個正三角形(Triangle)。
2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的三個球。

(二)符號定義

以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛方法有 $T(n)$ 種。

例：底層正三角形邊長為 3 時，有 7 種堆垛方法。$\therefore T(3)=7$ 。

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正三角形為底的不完整堆垛	
堆垛上方情況 底層				
說明	1 種排法	有四個凹洞 4 種排法	直接放上 1 種排法	直接放上 1 種排法

三、以正方形為底的三維不完整堆垛

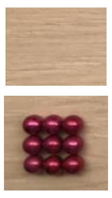
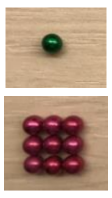
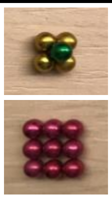
(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

1. 每層的球皆相連接且圍成一個正方形(Square)。
2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的四個球。

(二)符號定義

以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛方法有 $S(n)$ 種。

例：底層正方形的邊長為 3 時，有 7 種堆垛方法。$\therefore S(3)=7$ 。

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正方形為底的不完整堆垛	
堆垛上方情況 底層				
說明	1 種排法	有四個凹洞 4 種排法	直接放上 1 種排法	直接放上 1 種排法

四、以正六邊形為底的三維不完整堆垛

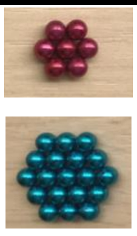
(一)將若干顆球堆垛排成數層，規定

1. 每層的球皆相連接且圍成一個正六邊形(Hexagon)。
2. 除了最底層的球外，其餘的球需接觸到下一層的三個球。

(二)符號定義

以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛方法有 $H(n)$ 種。

例:底層正六邊形邊長為 3 時,有 67 種堆垛方法。$\therefore H(3)=67$

上層	只有底層	放 1 球	放以邊長 2 之正六邊形為底的不完整堆垛	
堆垛上方情況 底層				
說明	1 種排法	24 個凹洞 24 種排法	六個方向 直接放上， 6 種排法	六個方向且最上層有 6 個凹洞，共 6×6=36 種排法

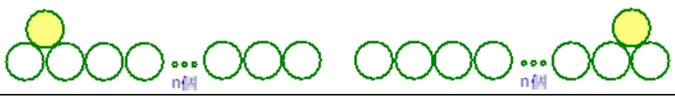
肆、研究過程

一、二維不完整堆疊

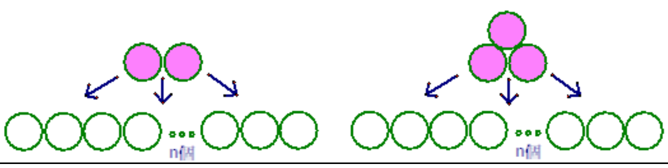
（一）底列個數為 n 的二維不完整堆疊方法有 $P(n)$ 種。

<u>不放</u>：1 種。

<u>放 1 個</u>：有 $n-1$ 個凹洞皆可放 $n=1$ 的二維不完整堆疊，共 $P(1)\cdot(n-1)$ 種。

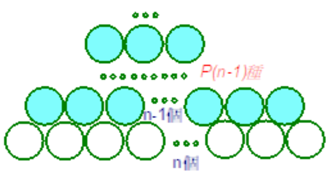


<u>放底列個數 2 之二維不完整堆疊</u>：
有 $n-1$ 個凹洞，但要相連 2 個凹洞為一組，有 $n-2$ 組。
$\therefore$ 可放 $n=2$ 的二維不完整堆疊，共 $P(2)\cdot(n-2)$ 種。



• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

<u>放底列個數 $n-1$ 之二維不完整堆疊</u>：
有 $n-1$ 個凹洞，只有 1 組。
$\therefore$ 可放底列個數 $n-1$ 的二維不完整堆疊共有 $P(n-1)\times 1$ 種。



$\therefore P(n)=1+P(1)(n-1)+P(2)(n-2)+\cdots+P(n-2)\cdot 2+P(n-1)\cdot 1$

（二）$P(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$P(n)=1+P(1)(n-1)+P(2)(n-2)+\cdots+P(n-2)\cdot 2+P(n-1)\cdot 1$ ①

$P(n-1)=1+P(1)(n-2)+P(2)(n-3)+\cdots+P(n-2)\times 1$ ⋯②

① − ②得 $P(n)-P(n-1)=P(1)+P(2)+\cdots+P(n-2)+P(n-1)$

$\therefore P(n)=P(1)+P(2)+\cdots+P(n-3)+P(n-2)+2P(n-1)$ ⋯③

$P(n-1)=P(1)+P(2)+\cdots+P(n-3)+2\cdot P(n-2)$ ⋯④

③ − ④得 $P(n)-P(n-1)=-P(n-2)+2\cdot P(n-1)$

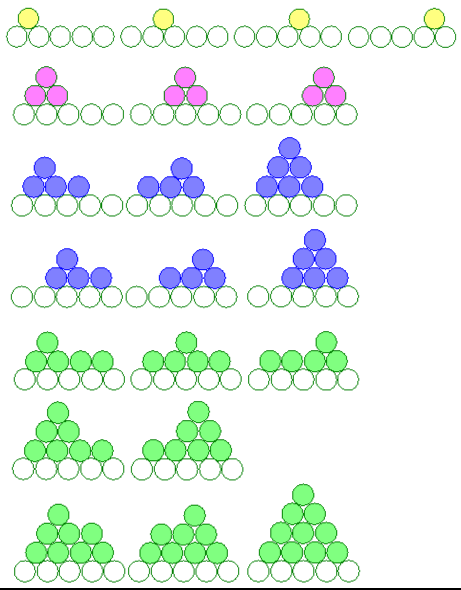
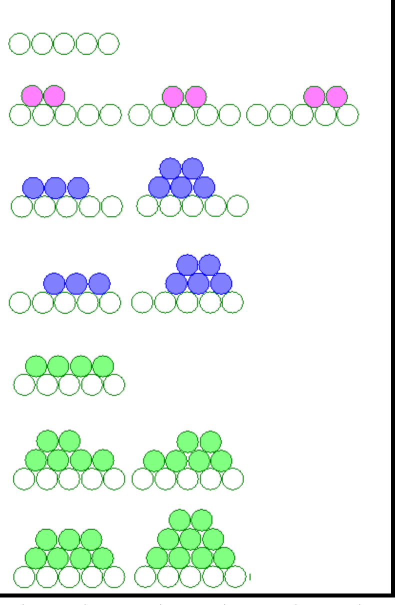
$\therefore P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$ ，其中 $P(1)=1, P(2)=2$

(三) $P(n)$ 的一般項

$P(n)$	1	2	5	13	34	89	233	610	• • •

觀察此數列發現與「費伯納西數列」的**奇數項**有關係，

例如：比較 $F(9)=21+13=34$ 與 $P(5)=34$ ，

大兔子有 21 對 上方不能再堆疊有 21 個	小兔子有 13 對 上方能再堆疊有 13 個
	

$\because F(n-2)=F(n-3)+F(n-4)\ \therefore F(n-3)=F(n-2)-F(n-4)$

$\therefore F(n)=F(n-1)+F(n-2)=\left(F(n-2)+F(n-3)\right)+F(n-2)$

$=2F(n-2)+F(n-3)=2F(n-2)+\left(F(n-2)-F(n-4)\right)$

$=3F(n-2)-F(n-4)$

$\therefore P(n)$ 恰與**費伯納西數列**的**奇數項**相同

$$\therefore P(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

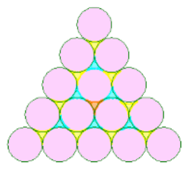
二、以正三角形為底的三維不完整堆垛

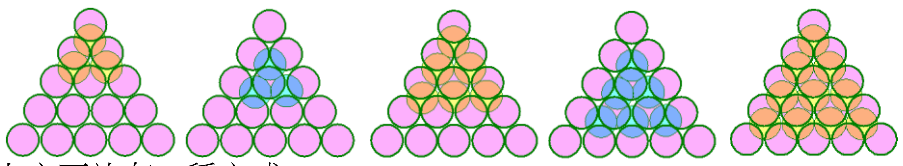
（一）若底層正三角形的邊長為 n，則三維不完整堆垛之方法有 $T(n)$ 種。

觀察凹洞，由上往下有

$1+1+2+2+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$ 個。

凹洞由外層往內層分成奇數層(黃)與偶數層(藍)。





上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 $(n-1)^2$ 種方式。

上方若放以邊長 2 之正三角形為底的三維不完整堆垛分兩類：

(1) 若將正三角形堆垛放在**黃色凹洞區**，由上往下有 $1+2+\cdots+(n-2)$ 種。

(2) 若將正三角形堆垛放在**藍色凹洞區**，由上往下有 $1+2+\cdots+(n-3)$ 種。

共有 $(n-2)^2$ 種方式。

・・・・・・・・・

上方若放以邊長 $(n-1)$ 之正三角形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

$\therefore T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$。

（二）$T(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2 \cdots ①$

$T(n-1)=1+T(1)\cdot(n-2)^2+T(2)\cdot(n-3)^2+\cdots+T(n-2)\times 1^2 \cdots ②$

① − ② $T(n)-T(n-1)=(2n-3)T(1)+(2n-5)T(2)+\cdots+3T(n-2)+T(n-1)$

$\therefore T(n)=(2n-3)\cdot T(1)+(2n-5)\cdot T(2)+\cdots+3\cdot T(n-2)+2\cdot T(n-1) \cdots ③$

$T(n-1)=(2n-5)\cdot T(1)+(2n-7)\cdot T(2)+\cdots+3\cdot T(n-3)+2\cdot T(n-2) \cdots ④$

③ − ④ $\therefore T(n)-T(n-1)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+\cdots+T(n-3)\right)+T(n-2)+2T(n-1)$

$\therefore T(n)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+\cdots+T(n-3)\right)+T(n-2)+3T(n-1) \cdots ⑤$

$\therefore T(n-1)=2\cdot\left(T(1)+T(2)+T(3)+\cdots+T(n-4)\right)+T(n-3)+3T(n-2) \cdots ⑥$

⑤ − ⑥ $\therefore T(n)-T(n-1)=T(n-3)-2T(n-2)+3T(n-1)$

$\therefore T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$，其中 $T(1)=1, T(2)=2, T(3)=7$

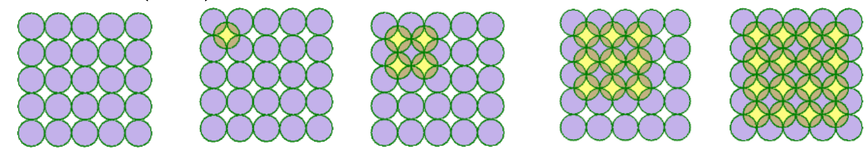
利用遞迴關係式

$T(n)$	1	2	7	25	88	309	・・・

三、以正方形為底的三維不完整堆垛

（一）若最底層正方形的邊長為 n，則三維不完整堆垛方法有 $S(n)$ 種。

觀察凹洞有 $(n-1)^2$ 個。



上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正方形為底的三維不完整堆垛有 $(n-1)^2$ 種方式。

上方若放以邊長 2 之正方形為底的三維不完整堆垛有 $(n-2)^2$ 種方式。

・・・・・・・・・

上方若放以邊長 $(n-1)$ 之正方形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

$\therefore S(n)=1+S(1)\cdot(n-1)^2+S(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+S(n-2)\times 2^2+S(n-1)\times 1^2$。

（二）$S(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

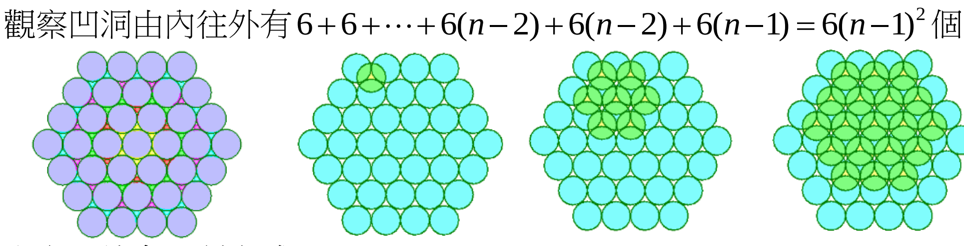
遞迴關係式與 $T(n)$ 相同

$\therefore S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$，其中 $S(1)=1$，$S(2)=2$，$S(3)=7$。

四、以正六邊形為底的三維不完整堆垛

（一）若最底層正六邊形的邊長為 n，則三維不完整堆垛方法有 $H(n)$ 種。

觀察凹洞由內往外有 $6+6+\cdots+6(n-2)+6(n-2)+6(n-1)=6(n-1)^2$ 個。



上方不放有 1 種方式。

上方若放以邊長 1 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 $6(n-1)^2$ 種方式。

上方若放以邊長 2 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 $6(n-2)^2$ 種方式。

・・・・・・・・・

上方若放以邊長 $(n-1)$ 之正六邊形為底的三維不完整堆垛有 6 種方式。

$\therefore H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-1)\times 6\times 1^2$。

（二）$H(n)$ 遞迴關係式的整理化簡

$H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$，其中 $H(1)=1, H(2)=7, H(3)=67$

$H(n)$	1	7	67	625	5833	54439	・・・

伍、研究結果

一、底列個數 n 之二維不完整堆疊方法數有 $P(n)$ 種。

遞迴關係式為 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(1)=1$，$P(2)=2$。

且 $P(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$。

二、以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $T(n)$ 種。

關係式 $T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3), T(1)=1, T(2)=2, T(3)=7$。

三、以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $S(n)$ 種。

遞迴關係式為 $S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$，

其中 $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=7$。

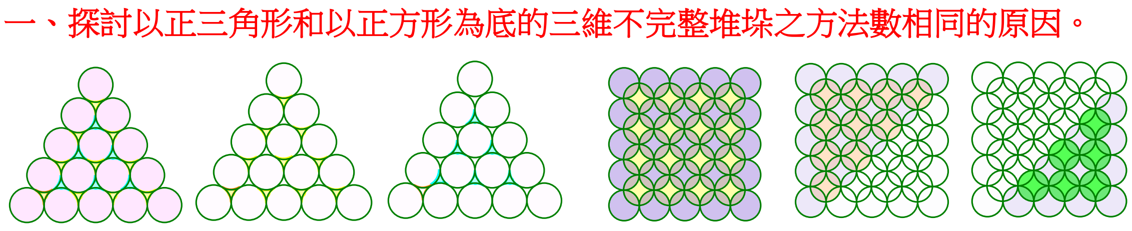
四、以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛，方法數有 $H(n)$ 種。

遞迴關係式為 $H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$，

其中 $H(1)=1, H(2)=7, H(3)=67$。

陸、討論

一、探討以正三角形和以正方形為底的三維不完整堆垛之方法數相同的原因。

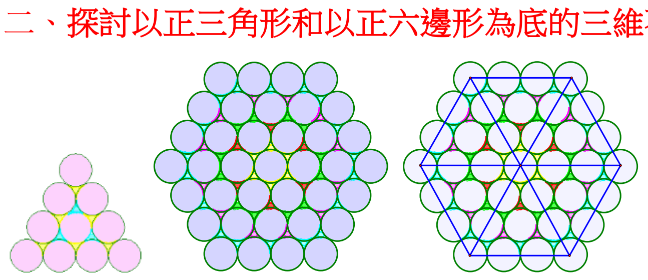


觀察正三角形的底層凹洞有 $(n-1)^2$ 個，可以拆解為兩個三角形。

觀察正方形的底層凹洞有 $(n-1)^2$ 個，可以拆解為兩個三角形。

因此，以邊長 n 的正三角形和正方形為底層的凹洞數皆有 $(n-1)^2$ 個，所以堆垛方法數相同。

二、探討以正三角形和以正六邊形為底的三維不完整堆垛之方法數的關係。



正三角形底層凹洞有 $(n-1)^2$ 個，正六邊形底層凹洞有 $6(n-1)^2$ 個，可將正六邊形拆解為六個三角形。

$T(n)=1+T(1)\cdot(n-1)^2+T(2)\cdot(n-2)^2+\cdots+T(n-2)\times 2^2+T(n-1)\times 1^2$

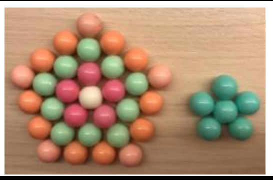
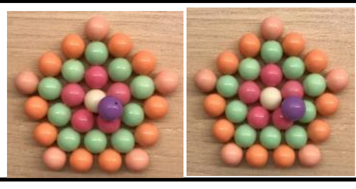
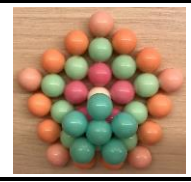
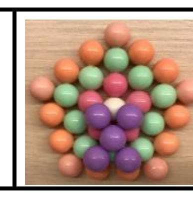
$H(n)=1+H(1)\cdot 6(n-1)^2+H(2)\cdot 6(n-2)^2+\cdots+H(n-2)\times 6\times 2^2+H(n-1)\times 6\times 1^2$

因此，邊長為 n 的正三角形與正六邊形為底層凹洞數有 6 倍的關係。

除了都不放 1 種外，其他部分的方法數皆有 6 倍的關係。

三、上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences 發現目前沒有 $T(n), S(n), H(n)$。因此，$T(n), S(n), H(n)$ 是新發現的數列。

四、本研究討論的**正多邊形**底只有正三角形、正方形、正六邊形。至於正五邊形為底，如下表，因此不討論。若正七邊形以上，更是無法排出底層。

	正五邊形為底的凹洞是雙凹形狀		將球擺在同個凹洞有**兩個**位置		出現無法完全置入凹洞狀況		置入凹洞可能無法排出正五邊形

五、以「 m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

(一)定義：若堆垛方向一致，稱為**橫放**，方法數有 $A(m,k)$ 種。

若堆垛方向不一致，稱為**直放**，方法數有 $B(m,k)$ 種。

以「 m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛之方法數有 $R(m,k)$ 種。

例如：以 4 列 5 行的長方形為底，則 $m=4$，$k=1$。

上方可放置的長方形的三維不完整堆垛的底層有：

1 列 2 行、2 列 3 行、3 列 4 行　橫放　直放

(二)例如：以「4 列 5 行」長方形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

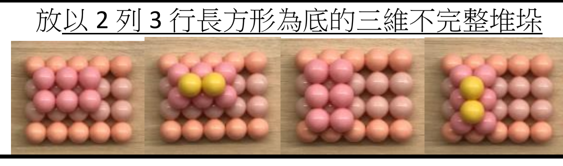
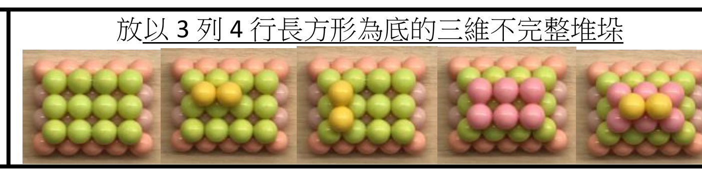
以 1 列 2 行長方形為底的三維不完整堆垛，只有不放。$\therefore R(1,1)=1$

以 2 列 3 行長方形為底的三維不完整堆垛，上方有不放、放以 1 列 2 行長方形為底的三維不完整堆垛。$\therefore R(2,1)=1+R(1,1)=1+1=2$。

以 3 列 4 行長方形為底的三維不完整堆垛，上方有不放、放以 1 列 2 行、2 列 3 行長方形為底的三維不完整堆垛的情況。

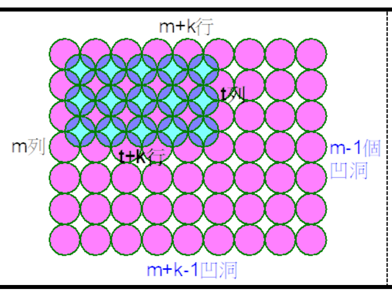
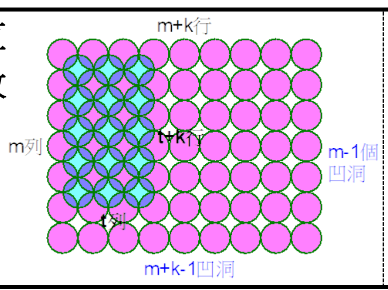
$\therefore R(3,1)=1+R(1,1)\times(4+3)+R(2,1)\times 1=1+1\times 7+2\times 1=10$。

以 4 列 5 行長方形為底的三維不完整堆垛，上方有下列情況：

不放	放以 1 列 2 行長方形底	放以 2 列 3 行長方形為底的三維不完整堆垛	放以 3 列 4 行長方形為底的三維不完整堆垛
			

$\therefore R(4,1)=1+R(1,1)\times(9+8)+R(2,1)\times(4+3)+R(3,1)\times 1 \;=1+1\times 17+2\times 7+10\times 1=42$。

(三)若「m 列 $m+k$ 行」長方形為底，置放入「t 列 $t+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

橫放 	方法數 $=[(m-1)-t+1] \times[(m+k-1)-(t+k)+1] =(m-t)^2$	直放 	方法數 $=[(m-1)-(t+k)+1]\cdot[(m+k-1)-t+1]$ $=(m-t-k)(m-t+k)=(m-t)^2-k^2$，其中 $m-1\geq t+k$。

(四) 以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛

1. 若只能「橫放」

方法數 $A(m,k)=1+A(1,k)\cdot(m-1)^2+A(2,k)\cdot(m-2)^2+\cdots+A(m-2,k)\cdot 2^2+A(m-1,k)\cdot 1^2$。與以邊長 n 之正方形為底的方法數相同。

2. 若能「橫放」與「直放」

方法數 $R(m,k)=1+R(1,k)\left[(m-1)^2+(m-1)^2-k^2\right]+R(2,k)\left[(m-2)^2+(m-2)^2-k^2\right]+\cdots$

$+R(m-1-k,k)\left[(k+1)^2+(k+1)^2-k^2\right]+R(m-k,k)\cdot k^2+R(m+1-k,k)\cdot(k-1)^2+\cdots+R(m-2,k)\cdot 2^2+R(m-1,k)\cdot 1^2$ 化簡後，

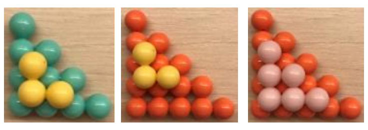
當 $t=m-k-1$,即 $m-t=k+1$　　當 $t=m-k$,即 $m-t=k$

$R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)$, $R(1,k)=1, R(2,k)=2, R(3,k)=\begin{cases}10, 若k=1\\ 7, 若k\neq 1\end{cases}$

六、以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以股長 n 之等腰直角三角形(Isosceles right triangle)為底的三維不完整堆垛，堆垛方法有 $I(n)$ 種。

(二) 以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，觀察凹洞數有 $1+2+\cdots+(n-2)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個。討論如下：



股長 1 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore I(1)=1$種。

股長 2 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore I(2)=1$種。

股長 3 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法有 $I(3)=1+1\cdot I(1)=1+1=2$。

股長 4 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，有 $I(4)=1+(1+2)\cdot I(1)+1\cdot I(2)=5$。

．．．．．．．．．

股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛，方法有

$I(n)=1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}I(1)+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}I(2)+\cdots+3\cdot I(n-3)+1\cdot I(n-2)$

化簡後，**遞迴關係式** $I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$，其中 $I(1)=I(2)=1$，$I(3)=2$。

七、以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以邊長 n 之菱形(rhombus)為底的三維不完整堆垛，堆垛方法有 $r(n)$ 種。

(二) 以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，觀察凹洞數有 $2(n-1)^2$ 個。討論如下：

以邊長 1 之菱形為底的三維不完整堆垛，只有不放 1 種。$\therefore r(1)=1$種。

以邊長 2 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有 $r(2)=1+2\times 1^2\cdot r(1)=1+2=3$種。

以邊長 3 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有 $r(3)=1+2\times 2^2\cdot r(1)+2\times 1^2\cdot r(2)=15$種。

．．．．．．．．．

以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛，方法有 $r(n)=1+2(n-1)^2r(1)+2(n-2)^2r(2)+\cdots+2\times 2^2r(n-2)+2\times 1^2r(n-1)$

發現邊長 n 的正三角形與菱形為底層的凹洞數有 2 倍關係。所以，除了不放 1 種外，其他兩者的方法數皆有 2 倍的關係。

化簡後，**遞迴關係式** $r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$，其中 $r(1)=1$，$r(2)=3$，$r(3)=15$。

八、以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛

(一) 定義：以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形(parallelogram)為底的三維不完整堆垛，堆垛方法有 $p(m,k)$ 種。

例如：以斜邊 4 底邊 $5(=4+1)$ 之平行四邊形為底，則 $m=4$，$k=1$。上方可放置的平行四邊形如下：

(二) 以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛，討論如下：

上方不放有 1 種方式。

上方若放以斜邊 2 底邊 $(2+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛有 $2(m-1)^2$ 種方式。

．．．．．．．．．

上方若放以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛有 1 種方式。

方法數 $p(m,k)=1+2(m-1)^2p(1,k)+2(m-2)^2p(2,k)+\cdots+2\times 1^2p(m-1,k)$。與以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛方法數相同

化簡後，**遞迴關係式** $p(m,k)=5p(m-1,k)-p(m-2,k)+p(m-3,k)$，其中 $p(1,k)=1$，$p(2,k)=3$，$p(3,k)=15$。

柒、結論

一、**底列個數 n 之二維不完整堆疊**，方法數有 $P(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$種。

遞迴關係式 $P(n)=3\cdot P(n-1)-P(n-2)$，其中 $P(1)=1$，$P(2)=2$。

二、**以邊長 n 之正三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $T(n)=4T(n-1)-2T(n-2)+T(n-3)$，其中 $T(1)=1$，$T(2)=2$，$T(3)=7$。

三、**以邊長 n 之正方形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $S(n)=4S(n-1)-2S(n-2)+S(n-3)$，其中 $S(1)=1$，$S(2)=2$，$S(3)=7$。

四、**以邊長 n 之正六邊形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $H(n)=9H(n-1)+3H(n-2)+H(n-3)$，其中 $H(1)=1, H(2)=7, H(3)=67$。

五、邊長 n 的正三角形與正方形的凹洞數皆有 $(n-1)^2$ 個，堆垛方法數也相同。

六、邊長 n 的正三角形與正六邊形的凹洞數有 6 倍的關係。所以，除了不放 1 種外，其他部分方法數皆有 6 倍的關係。

七、$T(n)$、$S(n)$、$H(n)$ 是新發現的數列。

八、本研究討論的正多邊形底只有正三角形、正方形、正六邊形。至於正五邊形為底的凹洞是雙凹形狀，有無法完全置入凹洞狀況。至於正七邊形以上，更是無法排出底層。

九、以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，若只能**橫放**，方法數與以邊長 n 正方形為底的三維不完整堆垛方法數相似。

十、以「m 列 $m+k$ 行」長方形為底的三維不完整堆垛，若能**橫放或直放**的方法數 $R(m,k)$ 種。

$R(m,k)=4R(m-1,k)-2R(m-2,k)+R(m-3,k)+(2k+1)R(m-1-k,k)-(2k-1)R(m-2-k,k)$。

十一、**以股長 n 之等腰直角三角形為底的三維不完整堆垛**，方法數 $I(n)=3I(n-1)-2I(n-2)+I(n-3)$ 種，其中 $I(1)=I(2)=1$，$I(3)=2$。

十二、**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $r(n)=5r(n-1)-r(n-2)+r(n-3)$，其中 $r(1)=1$，$r(2)=3$，$r(3)=15$。

十三、邊長 n 的正三角形與菱形為底層的凹洞數有 2 倍的關係。所以，除了不放皆 1 種外，其他部分的方法數皆有 2 倍的關係。

十四、**以斜邊 m 底邊 $(m+k)$ 之平行四邊形為底的三維不完整堆垛**，方法數有 $p(m,k)=5p(m-1,k)-p(m-2,k)+p(m-3,k)$，其中 $p(1,k)=1$，$p(2,k)=3$，$p(3,k)=15$。恰巧與**以邊長 n 之菱形為底的三維不完整堆垛**方法數相同。

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 44(2), February 2018（84/ From the Archives）

二、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html

三、國中數學八年級，等差數列。南一出版社。