

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030405

布拉美古塔內的「多生圓」 n 邊形好正！

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者： 國二 楊晉魁	指導老師： 鄭芬如 洪湧昇
---------------	---------------------

關鍵詞：正交對角線、衍生四邊形、多生圓

摘要

本研究由**布拉美古塔定理(Brahmagupta theory)**的圓內接四邊形的**布拉美古塔線**，找出二種具有內切圓性質的新衍生四邊形，此**特定條件下的圓內接四邊形**，會呈現是等腰梯形結構。將**特定條件下的圓內接四邊形**推廣至**特定圓內接五、六、七、八、.....、等 n 邊形**中，可發現在多組正交對角線條件下，這些特定圓內接 n 邊形間具有**遞迴關係數量**的內切圓，其**半徑之間**、各自的**圓面積與原外接圓面積**都有特殊的比例關係。上述衍生多邊形的頂點、內切圓圓心、原圓內接多邊形的對角線與其交點，這些元素間也具有**多點共圓**的性質。

壹、研究動機

本研究延伸 2019 年新竹縣賽的作品，「布拉美古塔」下的多生圓→布拉美古塔定理的「多生圓」多邊形[4]：從**布拉美古塔定理**出發，藉由重新定義「**布拉美古塔線**」，並利用此直線作出圓上的二種衍生四邊形，探討此衍生四邊形的相關性質，並推廣到圓內接五、六、七、八邊形上。試圖在特定圓內接 n 邊形中，找出新發現與其規律性。

貳、研究目的

本研究延伸文獻中「**布拉美古塔定理**」中圓內接四邊形之正交對角線的交點[1][4]。本研究進一步利用**對四邊作垂直線**，且此垂直線與外接圓的四個交點連成的四邊形（本文稱**衍生四邊形**，共二種）來作進一步的探討。

研究目標：

一、對正交對角線的特殊圓內接四邊形產生的內切圓（**第 1 種圓**）的衍生四邊形

1. 嘗試對其形成條件進行分析。
2. 探討一之 1 中的相關性質。

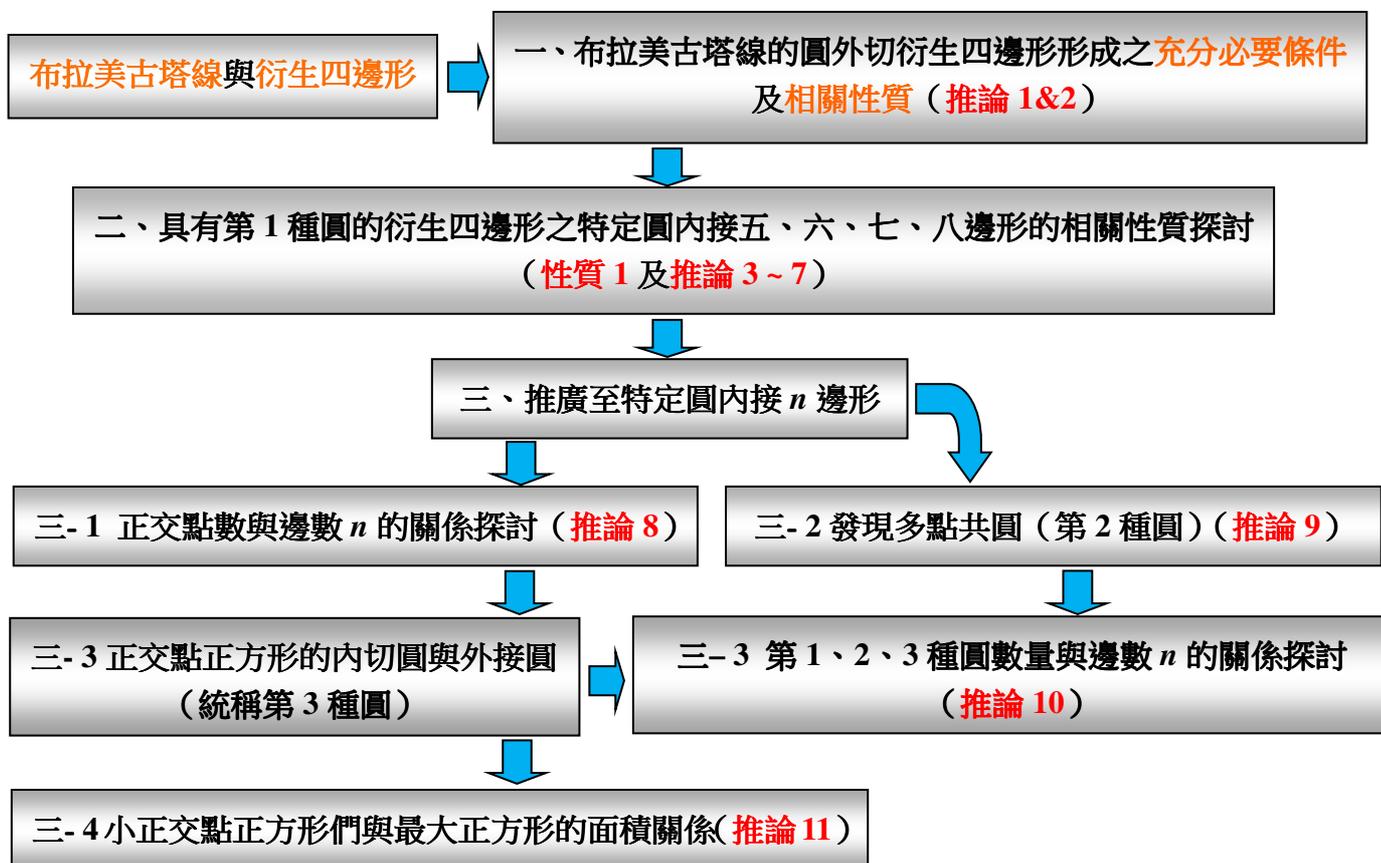
二、從具有正交對角線的特定圓內接四邊形推廣到特定圓內接五、六、七、八邊形中：

1. 特定圓內接五邊形的作法與相關性質探討。
2. 承二之 1，繼續作出特定圓內接六、七、八邊形衍生四邊形，並觀察圖形的規律。
3. 在特定圓內接五、六、七、八邊形中所有**第 1 種圓**的半徑、面積與衍生四邊形邊長、對角線、內角等關係的探討。

三、推廣到特定圓內接 n ($n=4、5、6、…$) 邊形中：

1. 正交點數與邊數 n 的遞迴關係探討。
2. 內部多點共圓的關係產生了外接圓 (**第 2 種圓**)。
3. 由正交點形成的小正方形群 (**正交點正方形**) 也有其內切圓與外接圓，統稱**第 3 種圓**，找出第 1、2、3 種圓的數量與邊數 n 的遞迴一般式。
4. 大小不同的正交點正方形們與最大正方形的面積關係探討。

參、研究架構



肆、研究過程或方法

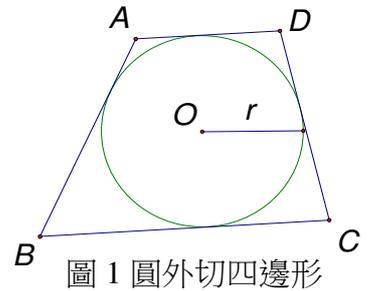
名詞定義與已知定理[1、2、3、5]：

引理 1. 如圖 1，圓外切四邊形 $ABCD$ 中，**兩組對邊和**會相等，

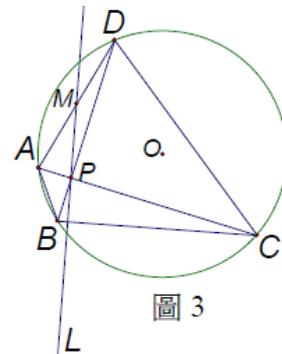
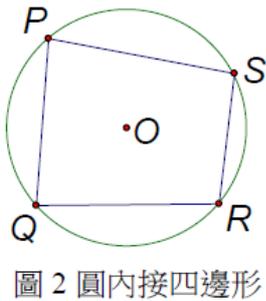
$$\text{亦即 } \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}。$$

引理 2. 如圖 1，圓外切四邊形 $ABCD$ 中，內切圓半徑為 r ，

則四邊形 $ABCD$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times S \times r$ ，其中 S = 四邊形 $ABCD$ 的周長

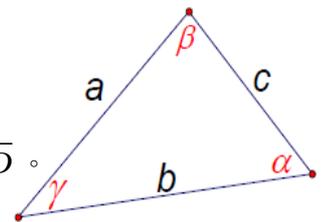


引理 3. 如圖 2，圓內接四邊形 $PQRS$ 中， $\angle P + \angle R = 180^\circ$ ， $\angle Q + \angle S = 180^\circ$



布拉美古塔定理[1]：如圖 3，圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 且

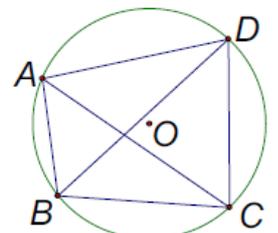
交於 P 點，過 P 作直線 L 垂直於 \overline{BC} ，且 L 交 \overline{AD} 於 M 點，則 $\overline{AM} = \overline{MD}$ 。



餘弦定理[2]：如圖 4，任意三角形中三邊長為 a 、 b 、 c ，三個內角為

α 、 β 、 γ ，則三個邊長與任一內角的餘弦值之關係式為

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha ; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta ; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



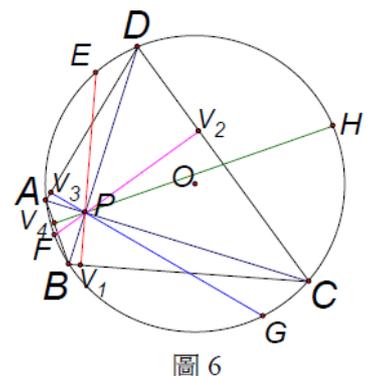
托勒密定理[3]：如圖 5，任一圓內接四邊形 $ABCD$ 中，

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD}$$

名詞定義

1、**布拉美古塔線**：如圖 6，圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

於 P ，過 P 作四邊的垂直線分別為 \overline{EV}_1 、 \overline{FV}_2 、



\overline{GV}_3 、 \overline{HV}_4 ，我們稱 \overline{EV}_1 、 \overline{FV}_2 、 \overline{GV}_3 、 \overline{HV}_4

為布拉美古塔線。

2、**衍生四邊形**：將圖 6 的四條布拉美古塔線與圓 O 的四個交點

E 、 F 、 G 、 H 連成的圓內接四邊形 $EFGH$ ，

我們稱為衍生四邊形，如圖 7。

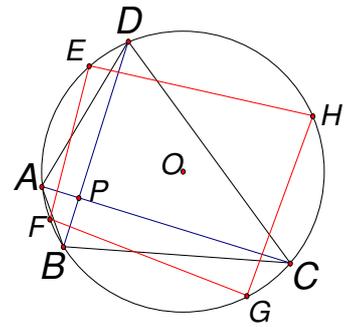


圖 7

一、衍生四邊形具有內切圓（第 1 種圓）的產生原理與充分必要條件：

產生原理：對於圖 7 中的衍生四邊形雖為圓內接四邊形，卻不一定有內切圓存在，基

於多生圓的目的，我們嘗試尋找衍生四邊形具有內切圓的條件，

於是我們在 *GSP* 繪圖軟體上對衍生四邊形 $EFGH$ 的

四個內角作角平分線，如圖 8，其中 \overline{EI} 、 \overline{FJ} 、 \overline{GK} 和

\overline{HL} 分別為 $\angle HEF$ 、 $\angle EFG$ 、 $\angle FGH$ 和 $\angle GHE$ 的角平

分線，且四條角平分線在衍生四邊形 $EFGH$ 內沒有共同交點。

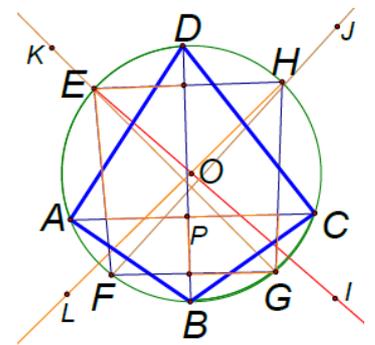


圖 8

接著開始移動 B 點，觀察整個圖形的變化，如下所述：（移動過程中， \overline{AC} 和 \overline{BD} 都保持

互相垂直的關係）

現象 1：當 B 點往 A 點靠近時， \overline{EI} 、 \overline{GK} 兩條角平分線的交點 O_1 會出現在衍生四邊

形 $EFGH$ 的內部，如圖 9，但其他兩條角平分線 \overline{FJ} 、 \overline{HL} 仍沒有相交。一直到 O_1 與 \overline{FJ} 、

\overline{HL} 重合，四條角平分線才全部相交於一點 O_1 ，如圖 10。

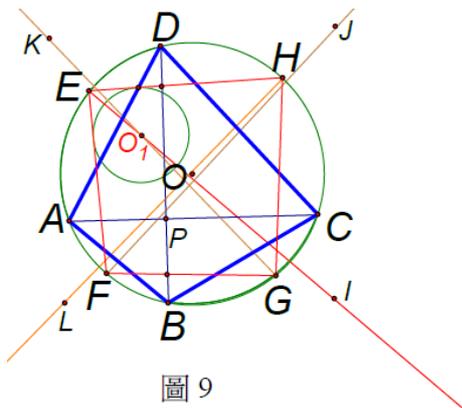


圖 9

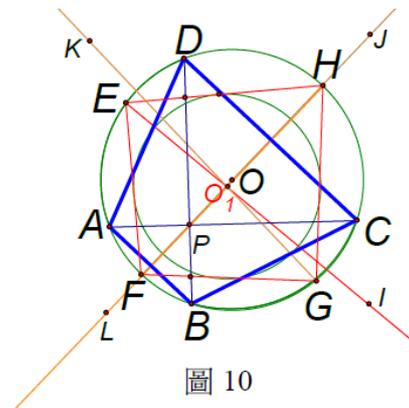


圖 10

現象 2：當 B 點往 C 點靠近時， \overline{FJ} 、 \overline{HL} 兩條角平分線的交點 O_2 才會出現在衍生四邊形 $EFGH$ 的內部，如圖 11，但其他兩條角平分線 \overline{EI} 、 \overline{GK} 仍沒有相交。一直到 O_2 與 \overline{EI} 、 \overline{GK} 重合，四條角平分線才全部相交於一點 O_2 ，如圖 12。

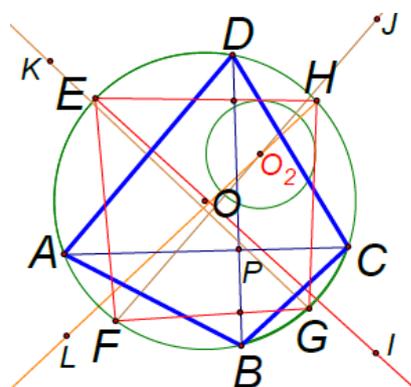


圖 11

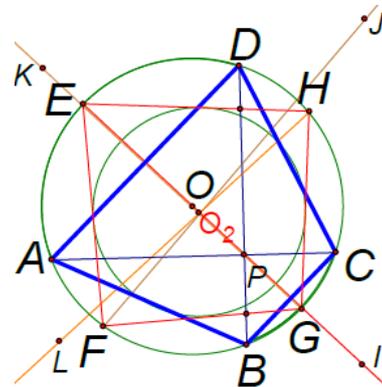


圖 12

從圖 9 到圖 12 的觀察，我們發現到 \overline{FJ} 和 \overline{HL} (\overline{EI} 和 \overline{GK}) 會重合的原因，乃是因為當 B 點向 A 點靠近時，會帶動 F 點 (由 \overline{CD} 邊的布拉美古塔線 \overline{FV}_2 所產生) 及 \overline{AB} 自己本身的布拉美古塔線 \overline{HV}_4 往 A 點移動，致使 \overline{FJ} 及 \overline{HL} 也會彼此互相靠近而最後重合成 \overline{FH} ；反之，當 B 點向 C 點靠近時，會帶動 G 點 (由 \overline{AD} 邊的布拉美古塔線 \overline{GV}_3 所產生) 及 \overline{BC} 自己本身的布拉美古塔線 \overline{EV}_1 依同樣規律而使 \overline{EI} 和 \overline{GK} 最後重合成 \overline{EG} 。當四條角平分線交於一點時，衍生四邊形 $EFGH$ 則會有內切圓 (第 1 種圓) 產生，故我們得到以下推論：

推論 1：如圖 10

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 P 。①過 P 分別作四邊的布拉美古塔線，交圓 O 於 E 、 F 、 G 、 H 及②四邊形 $EFGH$ 的四條角平分線 \overline{EI} 、 \overline{FJ} 、 \overline{GK} 及 \overline{HL} ，且令 \overline{EI} 與 \overline{GK} 相交於 O_1 。當 \overline{FJ} 與 \overline{HL} 重合並與 O_1 相交 (O_1 在 \overline{FH} 上)，則四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形。

證明： \overline{FH} 為兩條角平分線 \overline{FJ} 、 \overline{HL} 重合的結果

$$\therefore \angle EHF = \angle GHF \Rightarrow \widehat{EF} = \widehat{GF} \Rightarrow \overline{EF} = \overline{GF}$$

$$\text{同理 } \angle EFH = \angle GFH \Rightarrow \widehat{EH} = \widehat{GH} \Rightarrow \overline{EH} = \overline{GH}$$

$\therefore EFGH$ 為鸞形也是圓外切四邊形

則 \overline{HF} 必通過圓心 O (圓外切鸞形的對稱性)

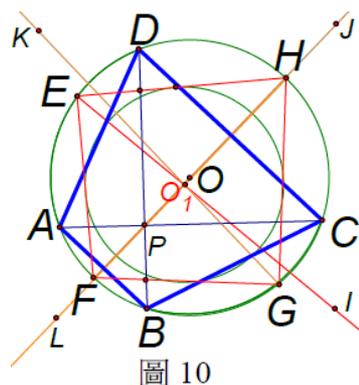


圖 10

此時 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的布拉美古塔線，也會和 $\angle EFG$ 及 $\angle EHG$ 的角平分線 \overline{FJ} 、 \overline{HL} 重合，

也就是 \overline{FH} 同時會垂直於 \overline{AB} 和 \overline{CD} $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{BC}$

$\therefore ABCD$ 為 **等腰梯形** ■

從上述推論可以得知 **圓外切衍生四邊形 $EFGH$ 是 **鳶形**** (往後皆稱**第 1 個衍生四邊形**)，

且推導出原圓內接四邊形 $ABCD$ 是等腰梯形；反過來說，有正交對角線的圓內接等腰梯形的衍生四邊形是否就是鳶形呢？分析如下：

推論 2：如圖 13

若圓內接等腰梯形 $ABCD$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 P ，過 P 分別作 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 的布拉美古塔線交圓 O 於 E 、 F 、 G 、 H ，則衍生四邊形 $EFGH$ 將是 **鳶形**。

證明：① \because 四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形 $\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$ 且 $\overline{AC} = \overline{BD}$

且 \overline{FH} 必過 O 點 $\Rightarrow \angle FEH = \angle FGH = 90^\circ$

($\because \angle FEH$ 和 $\angle FGH$ 為對到半圓之圓周角)

$\angle FPV_3 + \angle V_3PE = \angle FPE = \angle V_1PH = \angle V_1PG + \angle GPH$ (對頂角)

又 $\angle FPV_3 = \angle GPH$ (對頂角)， $\angle V_3AB + \angle FPV_3 = 180^\circ = \angle ABV_1 + \angle FPV_1$

$\therefore \angle V_3AB = \angle ABV_1 \quad \therefore \angle FPV_3 = \angle FPV_1 \Rightarrow \angle GPH = \angle FPV_1$

$\therefore \angle FPV_3 + \angle V_3PE = \angle V_1PG + \angle FPV_1 \Rightarrow \angle FPE = \angle FPG$

② $\because \triangle APD \cong \triangle BPC \Rightarrow \triangle APD = \triangle BPC$ 又 $\overline{AD} = \overline{BC}$ (等底) $\therefore \overline{PV_3} = \overline{PV_1}$ (等高)

又因為直徑 \overline{FH} 為四邊形 $ABCD$ 的對稱軸，

由圓內接等腰梯形與圓的對稱性 (共用對稱軸 \overline{FH}) 可得 $\overline{PE} = \overline{PG}$

③ 在 $\triangle FPE$ ， $\triangle FPG$ 中

$\because \angle FPE = \angle FPG$ ， $\overline{FP} = \overline{FP}$ ， $\overline{PE} = \overline{PG}$ $\therefore \triangle FPE \cong \triangle FPG$ (SAS) $\Rightarrow \overline{FE} = \overline{FG}$

④ 在 $\triangle FEH$ ， $\triangle FGH$ 中

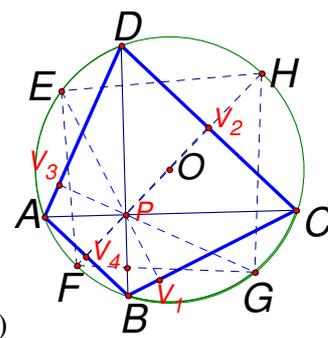


圖 13

$$\therefore \overline{FE} = \overline{FG}, \angle FEH = \frac{1}{2} \widehat{FGH} = 90^\circ = \frac{1}{2} \widehat{FEH} = \angle FGH, \overline{FH} = \overline{FH}$$

$$\therefore \triangle FEH \cong \triangle FGH \text{ (RHS)} \Rightarrow \overline{EH} = \overline{GH}$$

⑤在四邊形 $EFGH$ 中

$$\therefore \overline{FE} = \overline{FG}, \overline{EH} = \overline{GH} \Rightarrow \overline{FE} + \overline{GH} = \overline{FG} + \overline{EH} \Rightarrow \text{四邊形 } EFGH \text{ 為一鸞形} \quad \blacksquare$$

圖 13 的衍生四邊形為鸞形，其中一組對稱的對角皆是直角，另一組非對稱的對角則只有互補的關係。我們又從等腰梯形 $ABCD$ 的每一條布拉美古塔線與原始圓 O 的另一個方向的交點再作出第 2 個衍生四邊形，一樣可以同理推導知道該衍生四邊形也是鸞形，往後所作出的衍生四邊形都是具有這些性質的，且以第 1 個衍生四邊形 $EFGH$ 為主要的討論重點。

小結：推論 1、2 及上述說明皆符合「研究目的」所要探討的目標。

二、具有第 1 種圓的衍生四邊形之特定圓內接五、六、七和八邊形

1. **特定圓內接五邊形**：我們利用推論 1、2 的結果作出具有最多 2 組正交對角線的圓內接五邊形，作法如下：

作法一：1. 作第 1 組正交對角線的等腰梯形 $ABCE$ ，如圖 14， $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ （紅色線）

垂足為 P_1 。

2. 作第 2 組正交對角線的等腰梯形：

(1) 過 E 做 \overline{AC} 的平行線 \overline{ED} 交圓 O 於 D 點，如圖 15， $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$

(2) 過 D 作 \overline{CE} 的垂直線會通過 A 點，如圖 16， $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ （綠色線），垂足為 P_2 。

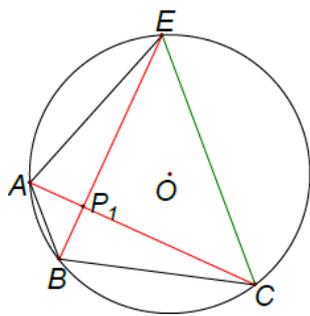


圖 14

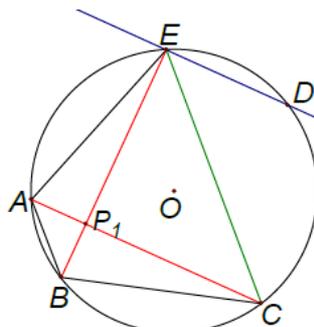


圖 15

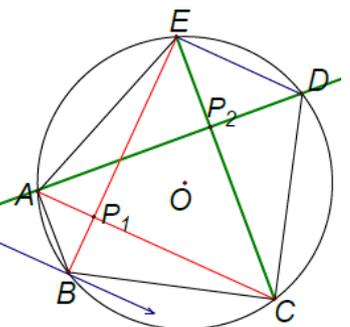


圖 16

我們證明一下圖 16 中作出的四邊形 $ACDE$ 為對角線互相垂直的等腰梯形如下：

性質 1：如圖 16

若圓內接五邊形 $ABCDE$ 中， $\overline{AB} // \overline{CE}$ 、 $\overline{DE} // \overline{AC}$ 且 $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 於 P_1 ，則過 D 作 \overline{CE} 的垂線必過 A 點，即 $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ 。

證明：連接 \overline{AD} 交 \overline{CE} 於 P_2

$$\because \overline{AB} // \overline{CE} \quad \therefore \widehat{AE} = \widehat{BC}$$

$$\text{又 } \overline{DE} // \overline{AC} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{CD} \quad \text{且 } \angle AP_1E = 90^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = 90^\circ, \quad \text{則 } \angle DP_2C = \frac{1}{2}(\widehat{AE} + \widehat{CD}) = 90^\circ$$

故得證 ■

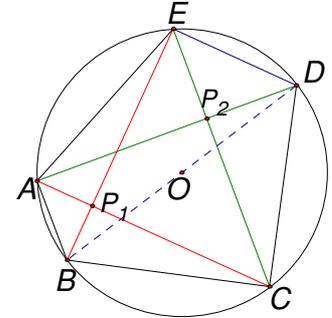


圖 16

由上面的作法可以作出具有二組正交對角線的圓內接五邊形 $ABCDE$ ，我們稱之為

特定圓內接五邊形，如圖 16-1，其中 $\angle ACE = \angle DBC = \angle DAC = 45^\circ \Rightarrow \angle AmB = 45^\circ$ 。

$$\because \widehat{AB} + \widehat{DE} = 2\angle AmB = 90^\circ \quad \text{且 } \overline{AE} = \overline{BC} = \overline{CD} \quad (\text{我們也稱}$$

\overline{AE} 為 2 個等腰梯形 $ABCE$ 和 $ACDE$ 的共用邊)。

$$\text{又 } \angle ACB + \angle DCE = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{DE}) = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACE + \angle DCE = \angle BCD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{BD} \text{ 為圓 } O \text{ 的直徑} \Rightarrow \angle BED = \angle DAB = 90^\circ。$$

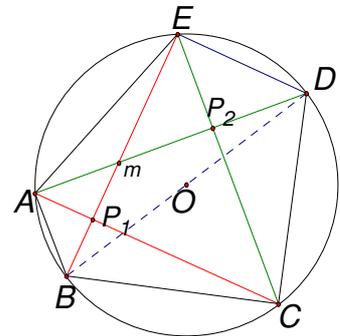


圖 16-1

2. **特定圓內接六、七、八邊形**：

(1) **特定圓內接六邊形**：建構特定圓內接六邊形的原則是以前述特定圓內接五邊形為基礎，延

續作法一作出具有最多 3 組正交對角線的圓內接六邊形 $ABCE_1DE$ ，作法如下：

作法二：承作法一的結果，繼續在特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 中作第三組正交對角線的等腰梯形：

① 過 C 做 \overline{BE} 的平行線 \overline{CE}_1 交圓 O 於 E_1 點，如圖 17， $\overline{CE}_1 // \overline{BE}$

②過 E_1 作 \overline{CE} 的垂直線 L_1 ，則 L_1 必會通過 B 點，如圖 18， $\overline{E_1B} \perp \overline{CE}$ （由性質 1 可知），且兩垂直對角線交於 P_3 。

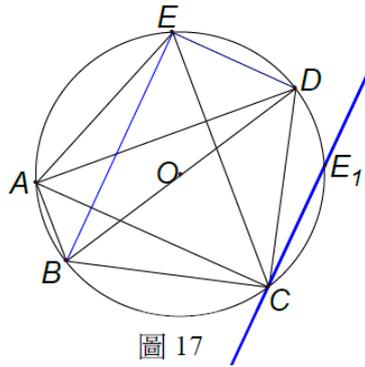


圖 17

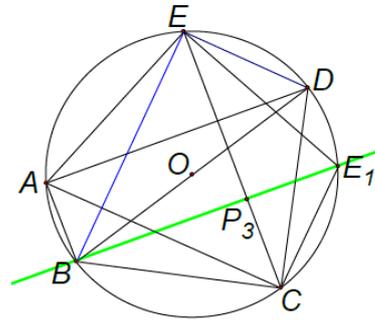
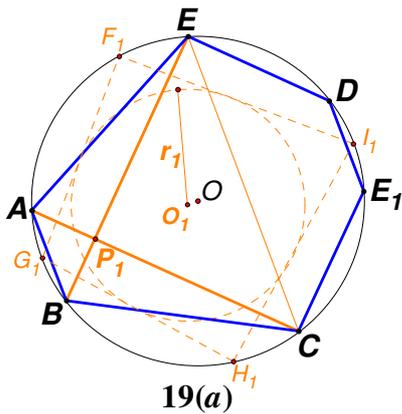
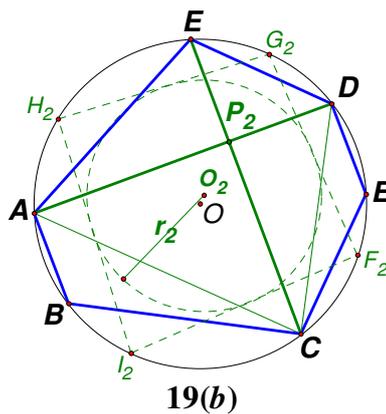


圖 18

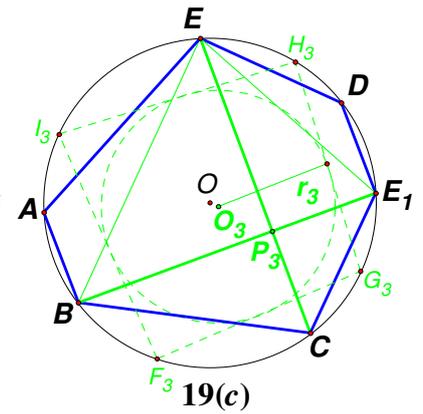
圖 18 的頂點 E_1 是圓內接六邊形的第六個頂點，是承接特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 之第五個頂點 E 後的第一點，故稱之。參考圖 19(a)、(b)、(c) 中的 r_1 、 r_2 、 r_3 就是特定圓內接六邊形 $ABCE_1DE$ 所產生的 3 個第 1 種圓之半徑。



19(a)



19(b)



19(c)

圖 19(a)至(c) 特定圓內接六邊形的 3 個衍生四邊形，其中 $F_iG_iH_iI_i$ 為第 i 個衍生四邊形， $i=1,2,3$

(2) 特定圓內接七、八邊形：作特定圓內接七、八邊形的原則也是以特定圓內接六邊形為基礎，延續作法二作出最多 5 個有正交對角線的特定圓內接七邊形 $ABCE_1DEE_2$ ，如圖 20(a)、(b)、(c)、(d)、(e) 中的 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 、 r_5 就是七邊形的 5 個第 1 種圓之半徑；如圖 21 中 10 個衍生四邊形及其第 1 種圓則是屬於特定圓內接八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ 的。

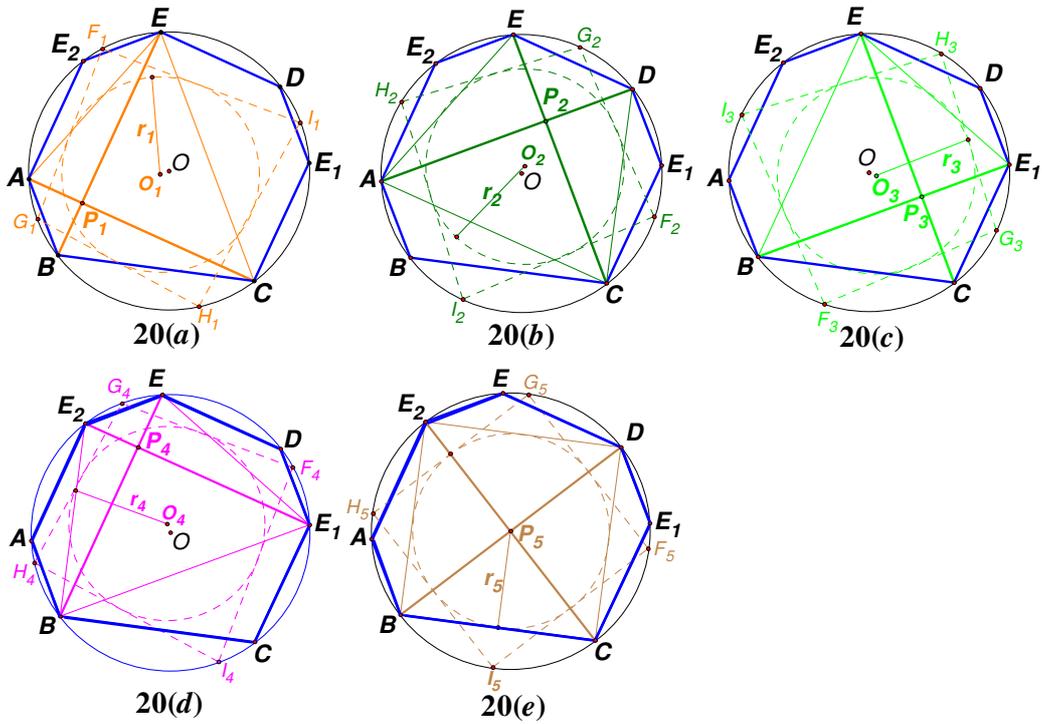


圖 20(a)至(e) 特定圓內接七邊形的 5 個衍生四邊形，其中 $F_i G_i H_i I_i$ 為第 i 個衍生四邊形， $i=1,2,3,4,5$

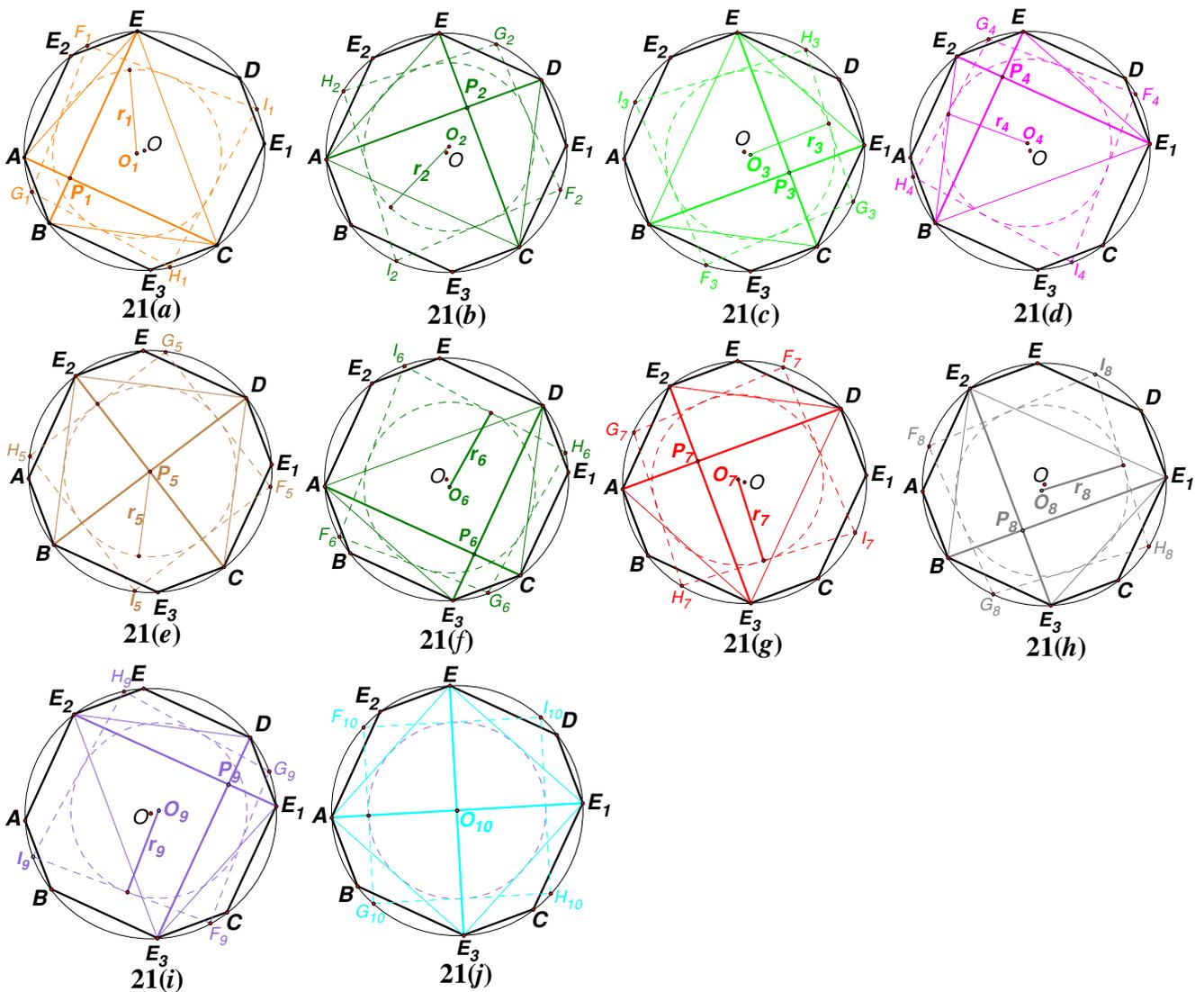


圖 21(a)至(j) 特定圓內接八邊形的 10 個衍生四邊形，其中 $F_i G_i H_i I_i$ 為第 i 個衍生四邊形， $i=1,2,\dots,10$

3. **特定圓內接五、六、七、八邊形中第 1 種圓的衍生四邊形之相關性質**：

基於作法一，我們得到的特定圓內接五邊形中會有 2 組正交對角線的等腰梯形 $ABCE$ 與 $ACDE$ ，如圖 22(a)，這兩個等腰梯形根據推論 1 皆可分別作出屬於自己的衍生四邊形，四邊形 $F_1G_1H_1I_1$ 和 $F_2G_2H_2I_2$ ，所以此特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 內部會有二個第 1 種圓，圓 O_1 和圓 O_2 ，如圖 22(b) 和 22(c)。我們接著繼續探討這兩個內切圓半徑之間、內切圓半徑 r_1 和 r_2 與外接圓半徑 R 、以及內切圓面積與外接圓面積關係。

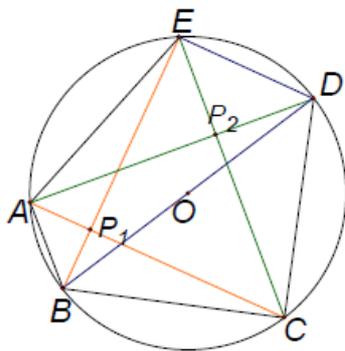


圖 22(a)

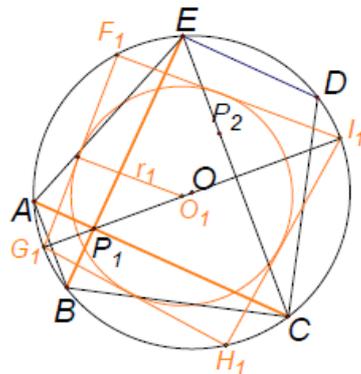


圖 22(b) $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 產生的第 1 種圓

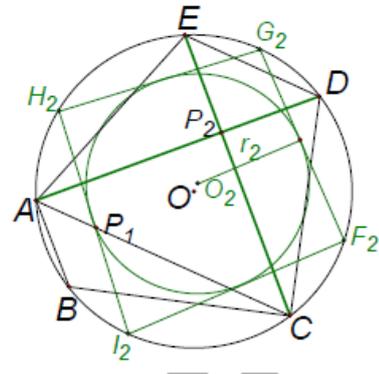


圖 22(c) $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ 產生的第 1 種圓

推論 3：如圖 22(a)、22(b)、22(c)

圓內接五邊形 $ABCDE$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 、 $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ 、 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ 。若四邊形 $F_1G_1H_1I_1$ 和 $F_2G_2H_2I_2$ 為五邊形的 2 個衍生四邊形，其內切圓 O_1 、 O_2 的半徑分別為 r_1 及 r_2 ，則 r_1 、 r_2 與衍生四邊形的邊長及對角線、與衍生四邊形的內角、與等腰梯形的共用邊長之關係式為

$$r_1 = \frac{\overline{F_1H_1}}{\overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1}} \times R = \tan(\angle F_1G_1H_1) \sqrt{1 - \sin(\angle F_1G_1H_1)} \times R = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \tan(\angle F_1G_1H_1) \sqrt{1 - \sin(\angle F_1G_1H_1)} \times \overline{AE}$$

$$r_2 = \frac{\overline{F_2H_2}}{\overline{F_2G_2} + \overline{F_2I_2}} \times R = \tan(\angle F_2G_2H_2) \sqrt{1 - \sin(\angle F_2G_2H_2)} \times R = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \tan(\angle F_2G_2H_2) \sqrt{1 - \sin(\angle F_2G_2H_2)} \times \overline{AE}$$

證明：(1) 由推論 2，因為四邊形 $F_1G_1H_1I_1$ 為衍生四邊形（鳶形）

$$\text{四邊形 } F_1G_1H_1I_1 \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times r_1 \times (\overline{F_1G_1} + \overline{G_1H_1} + \overline{H_1I_1} + \overline{I_1F_1})$$

$$= \frac{1}{2} \times r_1 \times (2\overline{F_1G_1} + 2\overline{F_1I_1}) = r_1 \times (\overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1}) = \frac{1}{2} \overline{G_1I_1} \times \overline{F_1H_1} = \overline{F_1G_1} \times \overline{F_1I_1}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\overline{F_1G_1} \times \overline{F_1I_1}}{\overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1}} \quad \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\overline{F_1G_1}} + \frac{1}{\overline{F_1I_1}} \quad \text{同理} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\overline{F_2G_2}} + \frac{1}{\overline{F_2I_2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore r_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{\overline{G_1 I_1} \times \overline{F_1 H_1}}{\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1}} = \frac{\overline{G_1 I_1} \times \overline{F_1 H_1}}{2(\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1})} = \frac{R \times \overline{F_1 H_1}}{(\overline{F_1 G_1} + \overline{H_1 I_1})} \\ \Rightarrow r_1 &= \frac{\overline{F_1 H_1}}{(\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1})} \times R \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{同理} \quad r_2 = \frac{\overline{F_2 H_2}}{(\overline{F_2 G_2} + \overline{F_2 I_2})} \times R \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (r_1、r_2 \text{ 的存在性得證}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 由餘弦定理[2]知} \quad \overline{F_1 H_1}^2 &= \overline{F_1 I_1}^2 + \overline{H_1 I_1}^2 - 2\overline{F_1 I_1} \times \overline{H_1 I_1} \times \cos(\angle F_1 I_1 H_1) \\ &= 2\overline{F_1 I_1}^2 - 2\overline{F_1 I_1}^2 \times \cos(\angle F_1 I_1 H_1) = 2\overline{F_1 I_1}^2 \times (1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)) \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{F_1 H_1} = \sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1))} \times \overline{F_1 I_1} \quad \text{同理} \quad \overline{F_1 H_1} = \sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))} \times \overline{F_1 G_1}$$

$$\begin{aligned} \text{由(1)中的}\textcircled{1}\text{式, } r_1 &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{F_1 G_1}}{\overline{F_1 G_1} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)}}{\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)}} \times \overline{F_1 G_1}} \times R \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(\angle F_1 G_1 H_1) \left(\sqrt{1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} - \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \right) \times R \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(\angle F_1 G_1 H_1) \times \left(\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \right) \times R \\ &= \tan(\angle F_1 G_1 H_1) \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \times R \quad (r_1 \text{ 和 } R \text{ 的關係式}) \end{aligned}$$

$$\text{同理} \quad r_2 = \tan(\angle F_2 G_2 H_2) \sqrt{1 - \sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times R$$

證明過程中，等式 $\sqrt{1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} - \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}$ 恆成立

乃是在推導 r_1 的許多關係式中發現這個恆等式，詳細推導過程在實驗日誌的附件中。

$$\text{(3) 由正弦定理[2]} \quad 2R = \frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ACE)} = \frac{\overline{AE}}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \overline{AE} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{CD}$$

$$\text{由(2)可得} \quad r_1 = \tan(\angle F_1 G_1 H_1) \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \times R = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_1 G_1 H_1) \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{AE}$$

$$\text{同理} \quad r_2 = \tan(\angle F_2 G_2 H_2) \sqrt{1 - \sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times R = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_2 G_2 H_2) \sqrt{1 - \sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times \overline{AE} \quad \blacksquare$$

接著我們繼續探討特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 中，2 個衍生四邊形的 **第 1 種圓面積** 與 **外接**

圓面積 的關係，透過推論 3 得到的結果，我們得到推論 4 如下：

推論 4：如圖 22(a)、22(b)、22(c)

承**推論 3**，則圓 O_1 、 O_2 與圓 O 的面積關係為

$$\text{圓 } O_1 \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_1 G_1 H_1)}{1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \text{圓 } O \text{ 面積} ; \quad \text{圓 } O_2 \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_2 G_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times \text{圓 } O \text{ 面積}$$

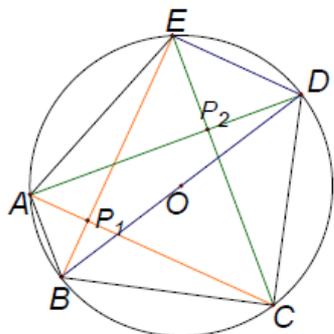


圖 22(a)

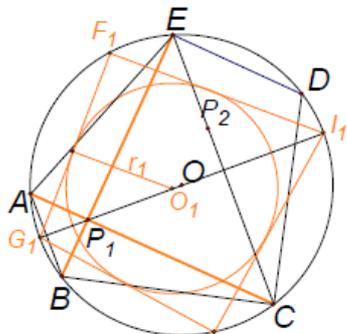


圖 22(b) $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 產生的第 1 種圓

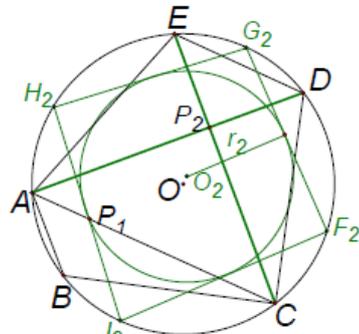


圖 22(c) $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ 產生的第 1 種圓

證明：由推論 3 可得 $r_1 = \frac{\overline{F_1 H_1}}{\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1}} \times R \Rightarrow \pi r_1^2 = \frac{\overline{F_1 H_1}^2}{(\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1})^2} \times \pi R^2$

則圓 O_1 面積 = $\frac{\overline{F_1 H_1}^2}{(\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1})^2} \times \text{圓 } O \text{ 面積} \dots \dots \dots \textcircled{1}$

又 $\overline{F_1 H_1}^2 = 2\overline{F_1 I_1}^2 (1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)) = 2\overline{F_1 G_1}^2 (1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))$ (由餘弦定理可得)

$$\begin{aligned} \text{則 } (\overline{F_1 G_1} + \overline{F_1 I_1})^2 &= \left[\frac{\overline{F_1 H_1}}{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))}} + \frac{\overline{F_1 H_1}}{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1))}} \right]^2 \\ &= \overline{F_1 H_1}^2 \times \frac{(\sqrt{1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)} + \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)})^2}{2 \sin^2(\angle F_1 I_1 H_1)} \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{1} \Rightarrow \text{圓 } O_1 \text{ 面積} = \overline{F_1 H_1}^2 \div \left[\overline{F_1 H_1}^2 \times \frac{(\sqrt{1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)} + \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)})^2}{2 \sin^2(\angle F_1 I_1 H_1)} \right] \times \text{圓 } O \text{ 面積}$$

$$= \frac{2 \sin^2(\angle F_1 I_1 H_1)}{(\sqrt{1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1)} + \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)})^2} \times \text{圓 } O \text{ 面積}$$

$$= \frac{2 \sin^2(\angle F_1 I_1 H_1)}{2 + 2\sqrt{1 - \cos^2(\angle F_1 I_1 H_1)}} \times \text{圓 } O \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_1 I_1 H_1)}{1 + \sin(\angle F_1 I_1 H_1)} \times \text{圓 } O \text{ 面積} \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$\therefore \sin(\angle F_1 I_1 H_1) = \sin(\pi - \angle F_1 G_1 H_1) = \sin(\angle F_1 G_1 H_1)$

$$\therefore \textcircled{2} \text{式也可寫成} \quad \text{圓 } O_1 \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_1 G_1 H_1)}{1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \text{圓 } O \text{ 面積}$$

$$\text{同理可證得} \quad \text{圓 } O_2 \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_2 I_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_2 I_2 H_2)} \times \text{圓 } O \text{ 面積} = \frac{\sin^2(\angle F_2 G_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times \text{圓 } O \text{ 面積} \quad \blacksquare$$

由推論 3、4 的結果，讓我們發現衍生四邊形的內切圓半徑、內切圓面積和外接圓面積的比值，都與衍生四邊形內角的正弦函數、正切函數有漂亮的關係式，我們於是好奇衍生四邊形的邊長是否也會和這些三角函數有些什麼關係？甚至於這些關係會讓衍生四邊形和原等腰梯形的面積關係變成如何？我們繼續得到以下的推論。

推論 5：如圖 22(a)、22(b)、22(c)

承推論 3、4，則衍生四邊形 $F_1 G_1 H_1 I_1$ 和 $F_2 G_2 H_2 I_2$ 分別與其原等腰梯形 $ABCE$ 和 $ACDE$ 的面積比值為

$$\frac{\text{衍生四邊形 } E_1 F_1 G_1 H_1 \text{ 面積}}{\text{等腰梯形 } ABCE \text{ 面積}} = \frac{\sin(\angle F_1 G_1 H_1)}{\sin^2(\angle ABC)} ; \quad \frac{\text{衍生四邊形 } E_2 F_2 G_2 H_2 \text{ 面積}}{\text{等腰梯形 } ACDE \text{ 面積}} = \frac{\sin(\angle F_2 G_2 H_2)}{\sin^2(\angle AED)}$$

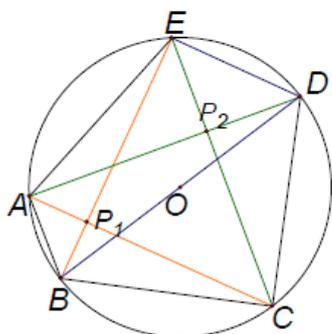


圖 22(a)

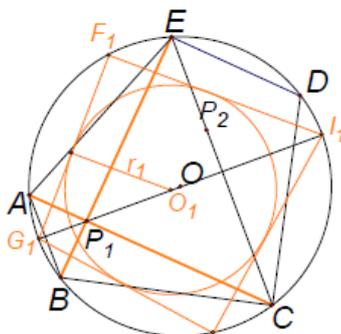


圖 22(b) $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 產生的第 1 種圓

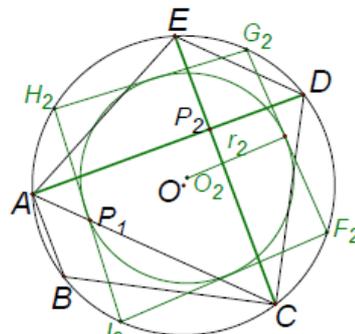


圖 22(c) $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ 產生的第 1 種圓

證明：

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{F_1 G_1} + \frac{1}{F_1 I_1} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))}}{F_1 H_1} + \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 I_1 H_1))}}{F_1 H_1} \\ &= \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))} + \sqrt{2(1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1))}}{F_1 H_1} \\ \therefore r_1 &= \frac{\overline{F_1 H_1}}{\sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))} + \sqrt{2(1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1))}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \overline{F_1 H_1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}}{4 \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} = \frac{\overline{F_1 H_1} \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}}{2 \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \end{aligned}$$

$$\text{再由推論 3 可得 } r_1 = \frac{\sqrt{2} \sin(\angle F_1 G_1 H_1) \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}}{2 \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{AE} = \frac{\overline{F_1 H_1} \times \sqrt{1 - \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}}{2 \cos(\angle F_1 G_1 H_1)}$$

$$\Rightarrow \overline{F_1 H_1} = \sqrt{2} \times \overline{AE} \times \sin(\angle F_1 G_1 H_1) \quad \text{代入 } \overline{F_1 H_1} = \sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))} \times \overline{F_1 G_1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \times \overline{AE} \times \sin(\angle F_1 G_1 H_1) = \sqrt{2(1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1))} \times \overline{F_1 G_1}$$

$$\Rightarrow \overline{F_1 G_1} = \frac{\sin(\angle F_1 G_1 H_1)}{\sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)}} \times \overline{AE} = \sqrt{1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{AE}$$

$$\text{同理可證得 } \overline{F_1 I_1} = (\sqrt{1 + \cos(\angle F_1 I_1 H_1)}) \times \overline{AE} = (\sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)}) \times \overline{AE}$$

$$\therefore \text{四邊形 } F_1 G_1 H_1 I_1 \text{ 面積} = \overline{F_1 G_1} \times \overline{F_1 I_1} = \sqrt{1 + \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{AE} \times \sqrt{1 - \cos(\angle F_1 G_1 H_1)} \times \overline{AE}$$

$$= \sin(\angle F_1 G_1 H_1) \times \overline{AE}^2$$

$$\text{又 } 2R = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} \Rightarrow \sqrt{2} \times \overline{AE} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2} \overline{AE} \times \sin(\angle ABC)$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCE \text{ 面積} = \overline{AC} \times \overline{BE} \times \frac{1}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \overline{AE}^2 \times \sin^2(\angle ABC)$$

$$\therefore \frac{\text{四邊形 } F_1 G_1 H_1 I_1 \text{ 面積}}{\text{四邊形 } ABCE \text{ 面積}} = \frac{\sin(\angle F_1 G_1 H_1) \times \overline{AE}^2}{\sin^2(\angle ABC) \times \overline{AE}^2} = \frac{\sin(\angle F_1 G_1 H_1)}{\sin^2(\angle ABC)}$$

$$\text{同理 } \frac{\text{四邊形 } F_2 G_2 H_2 I_2 \text{ 面積}}{\text{四邊形 } ACDE \text{ 面積}} = \frac{\sin(\angle F_2 G_2 H_2)}{\sin^2(\angle AED)} \quad \blacksquare$$

從上面的推導可以看出衍生四邊形與其原等腰梯形的面積是和衍生四邊形的非直角內角(如 $\angle F_1 G_1 H_1$ 、 $\angle F_2 G_2 H_2$)、原等腰梯形的腰長(如 \overline{AE} 、 \overline{BC})以及內部特定內角(如 $\angle ABC$ 、 $\angle AED$)有關，最後它們的面積比值關係則變成與衍生四邊形的非直角內角和原圓內接五邊形的特定內角有關。這是一個非常有趣又漂亮的結果。

如圖 21(a)至(j)所示，特定圓內接六邊形 $ABCE_1DE \subseteq$ 七邊形 $ABCE_1DEE_2 \subseteq$ 八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ 分別都有 3 組、5 組、10 組正交對角線的衍生四邊形與第 1 種圓，其相關性質的推論便和特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 得到的推論 3 ~ 5 是一樣的，統整如表格一，其中等腰

梯形 $ABCE \cong$ 等腰梯形 $BE_1EE_2 \cong$ 等腰梯形 $AE_3CD \cong$ 等腰梯形 $DE_2E_3E_1$ ，也就是

$r_1 = r_4 = r_6 = r_9$ ，故另外 4 組等腰梯形也是全等的，亦即 $r_2 = r_3 = r_7 = r_8$ 。至於第 5、10 組衍生

四邊形是正方形，其原等腰梯形則是上底、下底都等長的正方形，在此則不討論這兩組圖形。

表格一：衍生四邊形**第 1 種圓**與原外接圓半徑、面積，以及與原等腰梯形腰長的關係

	由圖 21(a)至(j)的分析結果	第 1 種圓 與原外接圓 的面積關係	衍生四邊形與原等腰 梯形面積關係
第 1 組	$r_1 = \tan(\angle F_1G_1H_1)\sqrt{1 - \sin(\angle F_1G_1H_1)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_1G_1H_1)\sqrt{1 - \sin(\angle F_1G_1H_1)} \times \overline{AE}$	$\text{圓}O_1 = \frac{\sin^2(\angle F_1G_1H_1)}{1 + \sin(\angle F_1G_1H_1)} \times \text{圓}O$	$\frac{E_1F_1G_1H_1}{ABCE} = \frac{\sin(\angle F_1G_1H_1)}{\sin^2(\angle ABC)}$
第 2 組	$r_2 = \tan(\angle F_2G_2H_2)\sqrt{1 - \sin(\angle F_2G_2H_2)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_2G_2H_2)\sqrt{1 - \sin(\angle F_2G_2H_2)} \times \overline{CD}$	$\text{圓}O_2 = \frac{\sin^2(\angle F_2G_2H_2)}{1 + \sin(\angle F_2G_2H_2)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_2G_2H_2I_2}{ACDE} = \frac{\sin(\angle F_2G_2H_2)}{\sin^2(\angle AED)}$
第 3 組	$r_3 = \tan(\angle F_3G_3H_3)\sqrt{1 - \sin(\angle F_3G_3H_3)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_3G_3H_3)\sqrt{1 - \sin(\angle F_3G_3H_3)} \times \overline{BC}$	$\text{圓}O_3 = \frac{\sin^2(\angle F_3G_3H_3)}{1 + \sin(\angle F_3G_3H_3)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_3G_3H_3I_3}{BCE_1E} = \frac{\sin(\angle F_3G_3H_3)}{\sin^2(\angle BCE_1)}$
第 4 組	$r_4 = \tan(\angle F_4G_4H_4)\sqrt{1 - \sin(\angle F_4G_4H_4)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_4G_4H_4)\sqrt{1 + \sin(\angle F_4G_4H_4)} \times \overline{EE_1}$	$\text{圓}O_4 = \frac{\sin^2(\angle F_4G_4H_4)}{1 + \sin(\angle F_4G_4H_4)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_4G_4H_4I_4}{EE_2BE_1} = \frac{\sin(\angle F_4G_4H_4)}{\sin(\angle BE_2E)}$
第 6 組	$r_6 = \tan(\angle F_6G_6H_6)\sqrt{1 - \sin(\angle F_6G_6H_6)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_6G_6H_6)\sqrt{1 - \sin(\angle F_6G_6H_6)} \times \overline{AE_3}$	$\text{圓}O_6 = \frac{\sin^2(\angle F_6G_6H_6)}{1 + \sin(\angle F_6G_6H_6)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_6G_6H_6I_6}{CDAE_3} = \frac{\sin(\angle F_6G_6H_6)}{\sin(\angle AE_3C)}$
第 7 組	$r_7 = \tan(\angle F_7G_7H_7)\sqrt{1 - \sin(\angle F_7G_7H_7)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_7G_7H_7)\sqrt{1 - \sin(\angle F_7G_7H_7)} \times \overline{DE_2}$	$\text{圓}O_7 = \frac{\sin^2(\angle F_7G_7H_7)}{1 + \sin(\angle F_7G_7H_7)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_7G_7H_7I_7}{AE_3DE_2} = \frac{\sin(\angle F_7G_7H_7)}{\sin^2(\angle E_3AE_2)}$
第 8 組	$r_8 = \tan(\angle F_8G_8H_8)\sqrt{1 - \sin(\angle F_8G_8H_8)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_8G_8H_8)\sqrt{1 - \sin(\angle F_8G_8H_8)} \times \overline{BE_2}$	$\text{圓}O_8 = \frac{\sin^2(\angle F_8G_8H_8)}{1 + \sin(\angle F_8G_8H_8)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_8G_8H_8I_8}{BE_3E_1E_2} = \frac{\sin(\angle F_8G_8H_8)}{\sin^2(\angle BE_3E_1)}$
第 9 組	$r_9 = \tan(\angle F_9G_9H_9)\sqrt{1 - \sin(\angle F_9G_9H_9)} \times R$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \tan(\angle F_9G_9H_9)\sqrt{1 - \sin(\angle F_9G_9H_9)} \times \overline{E_1E_3}$	$\text{圓}O_9 = \frac{\sin^2(\angle F_9G_9H_9)}{1 + \sin(\angle F_9G_9H_9)} \times \text{圓}O$	$\frac{F_9G_9H_9I_9}{DE_2E_3E_1} = \frac{\sin(\angle F_9G_9H_9)}{\sin^2(\angle E_1DE_2)}$

小結：在表格一可看出所有關係式皆符合「研究目的二」所要探討的目標，也就是它們都和**(1)**衍生四邊形的非直角內角（如 $\angle F_1G_1H_1$ 、 $\angle F_2G_2H_2$ 、……，且 $\angle F_1G_1H_1 = \angle F_4G_4H_4$ 、 $\angle F_2G_2H_2 = \angle F_3G_3H_3$ 、……）、**(2)**原等腰梯形的腰長（如 \overline{AE} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 $\overline{EE_1}$ 、 $\overline{BE_2}$ ……，且 $\overline{AE} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{EE_1} = \overline{BE_2} = \dots$ ）以及**(3)**原等腰梯形頂角（如 $\angle ABC$ 、 $\angle AED$ 、 $\angle BE_2E$ 、 $\angle BCE_1$ ……，且 $\angle ABC = \angle BE_2E$ 、 $\angle AED = \angle BCE_1$ 、……）有關，最後所有的面積比值關係則變成與衍生四邊形的非直角內角和每個正交等腰梯形的頂角有關。

我們又發現這裡作出具有 10 組正交對角線的特定圓內接八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ 是一個等角平行八邊形，如**推論 6**，也符合「研究目的二」要探索的目標。

推論 6：如圖 21(a)至(j)

以 P.7 作法一得到的圓內接五邊形 $ABCDE$ 為基礎，可作出特定圓內接八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ ，且該圓內接八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ 為等角平行八邊形。

證明：參考圖 21(g)、(h)中圓 O_7 及圓 O_8 所屬的等腰梯形搭配原圓內接八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$

已知 $\overline{E_2E_3} \perp \overline{AD}$ (圓 O_7)，又 $\overline{E_2E_3} \perp \overline{BE_1}$ (圓 O_8) $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BE_1}$ 同理 $\overline{EC} \parallel \overline{E_2E_3}$

(1) 在圖 21(g) 圓 O_7 中，

已知 $\angle E_2P_7A = 90^\circ$ ，又等腰梯形對角線等長 故 $\overline{E_2P_7} = \overline{P_7A}$ $\therefore \angle P_7E_2A = \angle E_2AP_7 = 45^\circ$

又 $\angle EE_2E_3 = \widehat{EE_1E_3}$ 的圓周角 又 $\widehat{EE_1E_3} = 180^\circ$ 故 $\angle EE_2E_3 = 90^\circ$

$\therefore \angle EE_2A = \angle EE_2E_3 + \angle P_7E_2A = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

由上述證明同理可得到

$\angle EE_2A = \angle E_2AB = \angle ABE_3 = \angle BE_3C = \angle E_3CE_1 = \angle CE_1D = \angle E_1DE = \angle DEE_2 = 135^\circ$

(2)由(1) $\angle EE_2E_3 = 90^\circ$ 同理可證得 $\angle E_2EC = \angle E_2E_3C = \angle ECE_3 = 90^\circ$

\Rightarrow 四邊形 EE_2E_3C 為矩形 $\Rightarrow \overline{EE_2} // \overline{E_3C}$ 同理 $\overline{AB} // \overline{DE_1}$ 、 $\overline{AE_2} // \overline{CE_1}$ 、 $\overline{BE_3} // \overline{DE}$

由(1)、(2)可得 八邊形 $ABE_3CE_1DEE_2$ 為等角平行八邊形 故得證 ■

由特定圓內接五邊形 $ABCDE$ 所推廣得到的特定圓內接六、七、八邊形等，它們內部每個正交等腰梯形主要屬於兩種不同的等腰梯形，也就是推論 3（圖 22(b)、22(c)）中的等腰梯形 $ABCE$ 和 $ACDE$ 。我們針對這兩種梯形的衍生四邊形所產生的第 1 種圓特別有感，感覺它們好像一樣大，但它們的原等腰梯形卻是上底、下底、高皆是對應不相等的長度，於是我們進一步探討 r_1 、 r_2 的比值關係，得到下面的推論結果。

推論 7：如圖 22(a)、22(b)、22(c)

承**推論 3**，則 r_1 與 r_2 的比值為 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin(\angle F_1G_1H_1)}{\sin(\angle F_2G_2H_2)} \times \sqrt{\frac{1+\sin(\angle F_2G_2H_2)}{1+\sin(\angle F_1G_1H_1)}}$

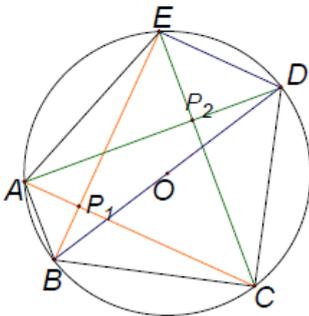


圖 22(a)

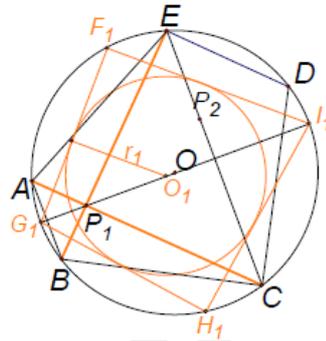


圖 22(b) $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 產生的第 1 種圓

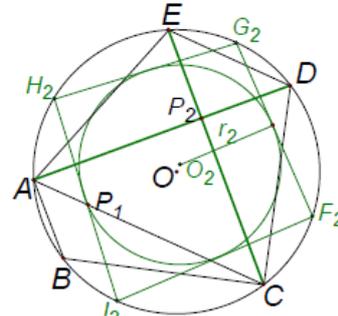


圖 22(c) $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ 產生的第 1 種圓

證明：由餘弦定理可進一步得到 $\overline{F_1G_1} = R\sqrt{2(1-\cos(\angle F_1I_1H_1))}$ 、 $\overline{F_1I_1} = R\sqrt{2(1-\cos(\angle F_1G_1H_1))}$

$$\begin{aligned} \text{又 } (\overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1})^2 &= \overline{F_1G_1}^2 + \overline{F_1I_1}^2 + 2\overline{F_1G_1} \times \overline{F_1I_1} = \overline{G_1I_1}^2 + 2\overline{F_1G_1} \times \overline{F_1I_1} \\ &= 4R^2 + 4R^2 \sqrt{(1+\cos(\angle F_1G_1H_1))(1-\cos(\angle F_1G_1H_1))} \\ &= 4R^2 \left(1 + \sqrt{1-\cos^2(\angle F_1G_1H_1)} \right) = 4R^2 (1 + \sin(\angle F_1G_1H_1)) \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1} = 2R\sqrt{1 + \sin(\angle F_1G_1H_1)}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\overline{F_1G_1} \times \overline{F_1I_1}}{\overline{F_1G_1} + \overline{F_1I_1}} = \frac{2R^2 \sin(\angle F_1G_1H_1)}{2R\sqrt{1+\sin(\angle F_1G_1H_1)}} = \frac{\sin(\angle F_1G_1H_1)}{\sqrt{1+\sin(\angle F_1G_1H_1)}} \times R$$

$$\text{同理 } \overline{F_2G_2} + \overline{F_2I_2} = 2R\sqrt{1+\sin(\angle F_2G_2H_2)} \quad \text{且 } r_2 = \frac{\sin(\angle F_2G_2H_2)}{\sqrt{1+\sin(\angle F_2G_2H_2)}} \times R$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin(\angle F_1G_1H_1)}{\sin(\angle F_2G_2H_2)} \times \frac{\sqrt{1+\sin(\angle F_2G_2H_2)}}{\sqrt{1+\sin(\angle F_1G_1H_1)}} \quad \text{故得證} \quad \blacksquare$$

從推論 7 的結果，我們須分析衍生四邊形中非直角內角 $\angle F_1G_1H_1$ 或 $\angle F_2G_2H_2$ 的大小範圍，進而推估其正弦函數值。如圖 22(b)，連接 $\overline{F_1O_1}$ 及 $\overline{H_1O_1}$ ，在四邊形 $F_1G_1H_1O_1$ 中，

$\therefore \overline{F_1O_1}$ 、 $\overline{H_1O_1}$ 分別為 $\angle G_1F_1I_1$ 、 $\angle G_1H_1I_1$ 的角平分線，

$$\therefore \angle G_1F_1O_1 = \frac{1}{2} \angle G_1F_1I_1, \quad \angle G_1H_1O_1 = \frac{1}{2} \angle G_1H_1I_1$$

$$\therefore \angle F_1O_1H_1 = 360^\circ - \angle G_1F_1O_1 - \angle G_1H_1O_1 - \angle F_1G_1H_1$$

$$= 270^\circ - \angle F_1G_1H_1 = 270^\circ - (180^\circ - \angle F_1I_1H_1) = 90^\circ + \angle F_1I_1H_1$$

又 $\angle F_1O_1H_1 > \angle F_1OH_1 \Rightarrow \angle F_1OH_1 < 270^\circ - \angle F_1G_1H_1 \Rightarrow \widehat{F_1G_1H_1} < 270^\circ - \angle F_1G_1H_1$

$$\Rightarrow \angle F_1G_1H_1 < 270^\circ - \widehat{F_1G_1H_1} = 270^\circ - (360^\circ - \widehat{F_1I_1H_1}) = \widehat{F_1I_1H_1} - 90^\circ, \quad \therefore \angle F_1G_1H_1 < \widehat{F_1I_1H_1} - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \widehat{F_1I_1H_1} < \widehat{F_1I_1H_1} - 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \widehat{F_1I_1H_1} > 90^\circ \Rightarrow \angle F_1G_1H_1 > 90^\circ, \quad \therefore 90^\circ \leq \angle F_1G_1H_1 \leq \widehat{F_1I_1H_1} - 90^\circ$$

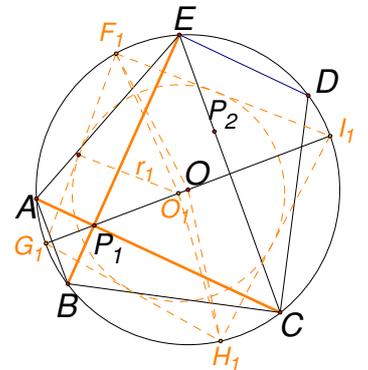


圖 22(b)

嚴格來說移動 B 點靠近 A 點或遠離 A 點，都會使 $\angle F_1G_1H_1$ 越接近 90 度（最小時會等於

90° ），且在移動過程中 $\angle F_1G_1H_1$ 會增加到最大約 98 度，這種變化情形似乎很像一個二次函數

的圖形一樣，好像 $\angle F_1G_1H_1$ 是 \overline{AB} 長度的二次函數。礙於時間的關係，我們尚未找到這樣的函

數關係式。但由於觀察到 $\angle F_1G_1H_1$ 的變化範圍是 $90^\circ \leq \angle F_1G_1H_1 < 98^\circ$ ，於是將此不等式代入推

論 7 的結果中，我們得到 $0.99 < \sin(\angle F_1G_1H_1) \leq 1$ ，同理 $0.99 < \sin(\angle F_2G_2H_2) \leq 1$

$$\Rightarrow 0.99 < \frac{\sin(\angle F_1G_1H_1)}{\sin(\angle F_2G_2H_2)} < 1.01 \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } 1.99 < 1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1) < 2 \text{ 且 } 1.99 < 1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2) < 2 \Rightarrow 0.995 < \frac{1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1)} < 1.005$$

$$\Rightarrow 0.997 < \sqrt{\frac{1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}} < 1.002 \dots \dots \textcircled{2}, \text{最後}\textcircled{1} \times \textcircled{2} \text{得}$$

$$0.987 < \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin(\angle F_1 G_1 H_1)}{\sin(\angle F_2 G_2 H_2)} \times \sqrt{\frac{1 + \sin(\angle F_2 G_2 H_2)}{1 + \sin(\angle F_1 G_1 H_1)}} < 1.01, \text{難怪從圖形中觀察到特定圓內接五邊形}$$

之兩個衍生四邊形內切圓 O_1 、 O_2 的大小看起來幾乎一樣大。

三、特定的圓內接 n 邊形

從前面得到的特定圓內接五、六、七、八邊形中，其第 1 個衍生四邊形的個數與該特定圓內接多邊形中正交對角線的等腰梯形數是一樣的，為了說明上的方便，我們將正交對角線的交點稱為**正交點**，後面的文稿中就以討論**正交點數**來代表特定圓內接 n 邊形內的第 1 個衍生四邊形個數，也與第 1 種圓的個數有關。

1. **正交點數與邊數 n 的關係探討**：

正交點數產生的規律分析(一)：我們發現特定圓內接五、六、七、八邊形內部的**正交點數**分別為 2 個、3 個、5 個、10 個，或是正交點**增加的個數**由最原始 1 組正交對角線的等腰梯形開始算起分別為 1 個、1 個、2 個、5 個，是不是有規律性呢？我們產生了一些疑問，於是繼續利用作法二作出特定圓內接九、十、十一、十二邊形，結果發現它們內部正交點數分別為 10 個、14 個、18 個、27 個，增加的個數分別為 0 個、4 個、4 個、9 個。再繼續作出特定十三、十四、……、二十邊形，將得到的**正交點數**與**增加的個數**統整如表格二：

表格二：正交點生成規律表(一)

邊數	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十
正交點數	1	2	3	5	10	10	14	18	27	27	33	39	52	52	60	68	85
增加個數		1	1	2	5	0	4	4	9	0	6	6	13	0	8	8	17
增加個數的變化規律					2	4		2	2	4		2	2	4			

由上表可看出，從八到九、十二到十三、十六到十七邊形，正交點數都沒有增加，參考圖 23(a)、(b)，理由是八、十二、十六邊形中剩餘的對角線（**粗黑線**）無法與九、十三、十七邊形（**粗黑線**）產生的新對角線互相垂直。

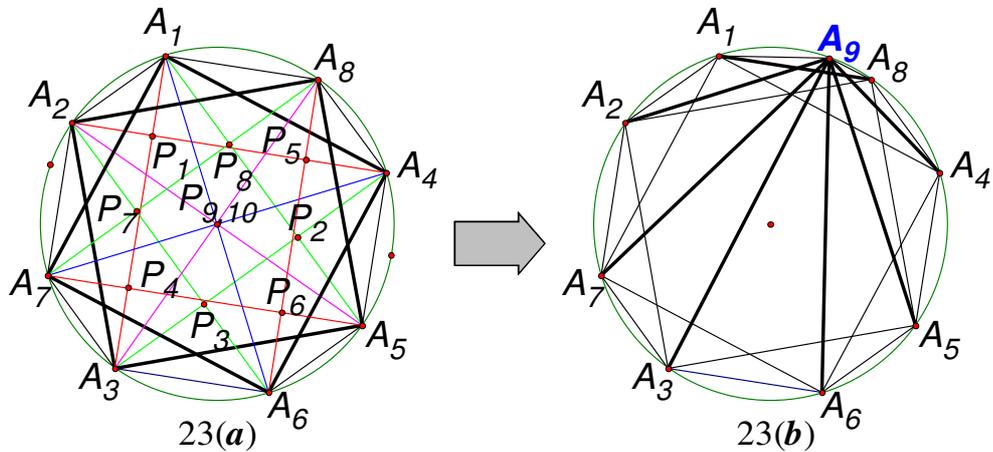


圖 23(a)及(b) 從特定圓內接八邊形到九邊形，**粗黑線**都是無法互相垂直的對角線

當十、十四、十八邊形出現時，才会有新的正交點出現。參考圖 24(a)至(d)中由特定圓內接九邊形⇒十邊形⇒十一邊形⇒十二邊形時內部正交點（**紅色點**）逐次增加的情形。

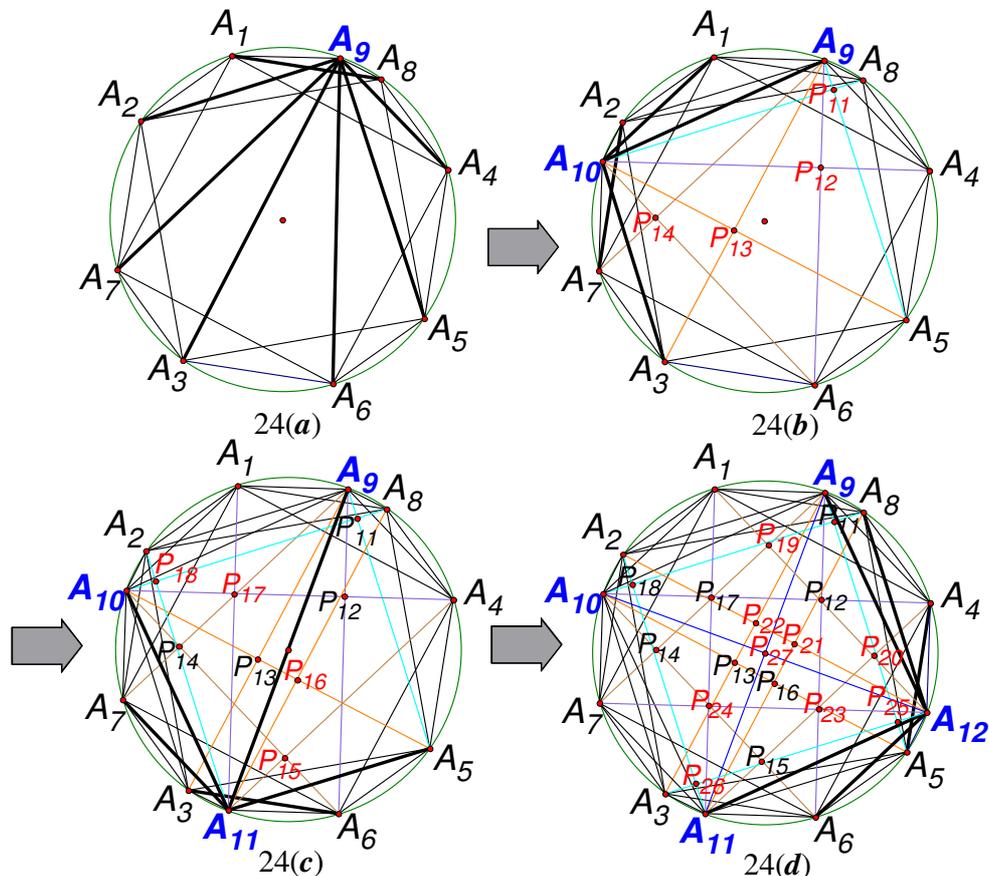


圖 24(a)至(d) 特定圓內接九邊形到十二邊形中內部正交點（ $P_{11} \sim P_{27}$ ）**逐次產生**的順序示意圖

同樣的作法，由特定圓內接十三邊形到十六邊形、圓內接十七邊形到二十邊形、…… 如此以 **4 的倍數** 為一循環作下去，正交點數的增加就會如同表格二所示。另外，我們又發現表格二中從八邊形到九邊形增加的正交點數開始會有一致的遞迴規律性，但四邊形到五邊形、五邊形到六邊形，這兩次增加的正交點數卻沒有符合前面所提的規律性，於是修改如下：

正交點數產生的規律分析(二)：

利用特定圓內接八邊形中會有 2 個最大正方形的結果，搭配下一個特定圓內接九邊形不會增加新的正交點的情況，我們反推到特定圓內接四邊形應該會有 1 個正方形，也就是該四邊形自己本身，正交點數為 1，下一個特定圓內接五邊形就不會增加新的正交點，如圖 25(a)至(d)所示。其中，圓內接正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 只有 1 個正交點 P_1 ，圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 則沒有新的正交點，一直到圓內接六邊形 $A_1A_6A_2A_3A_4A_5$ 就會產生 2 個新的正交點， $P_{A6,2}$ 和 $P_{A6,3}$ （下標 A6,2、A6,3 代表第六點 A_6 產生的第 2、3 個正交點），此時共有 3 個正交點，接下來圓內接七邊形又產生 2 個新的正交點， $P_{A7,4}$ 和 $P_{A7,5}$ ，共有 5 個正交點，最後圓內接八邊形會產生 5 個新的正交點， $P_{A8,6}$ 、 $P_{A8,7}$ 、 $P_{A8,8}$ 、 $P_{A8,9}$ 和 P_{10} （正方形 $A_5A_6A_7A_8$ 產生的）。

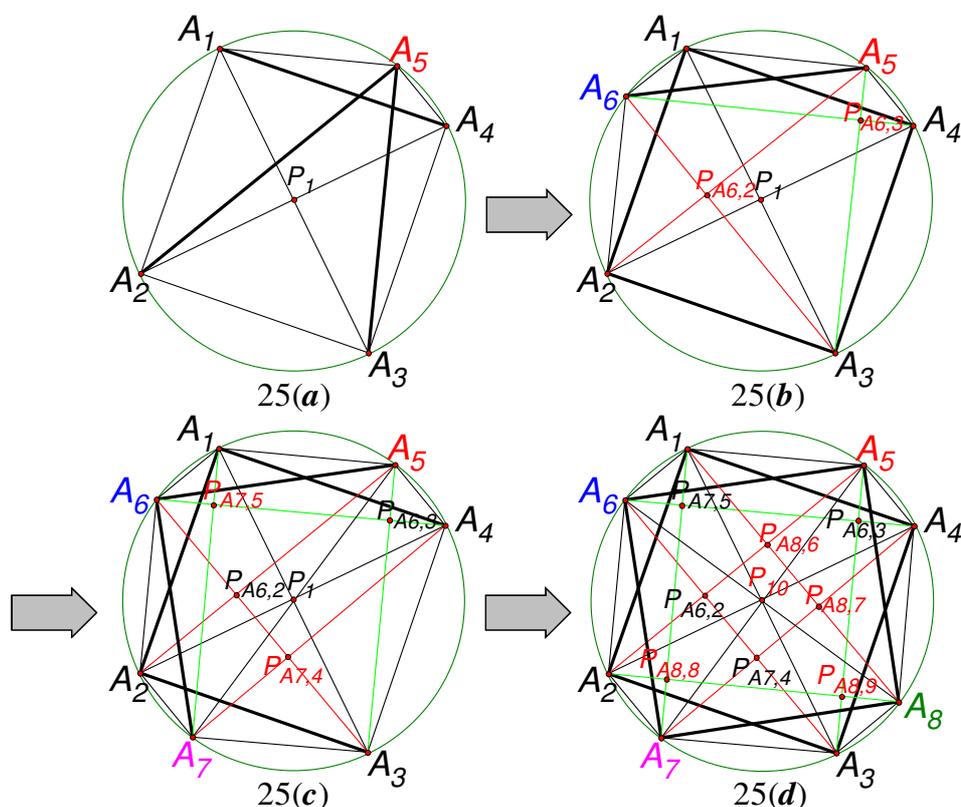


圖 25(a)至(d) 符合遞迴規律的特定圓內接五邊形到八邊形中的正交點產生順序示意圖

圖 21 中的等角平行八邊形是圖 25 中特定圓內接八邊形的特例情形，且 8 個頂點產生的順序不相同。於是我們修改表格二中四、五邊形的**正交點數**以及**增加的個數**如表格三。

表格三：正交點生成規律表(二)

邊數	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十
正交點數	1	1	3	5	10	10	14	18	27	27	33	39	52	52	60	68	85
增加個數		0	2	2	5	0	4	4	9	0	6	6	13	0	8	8	17
增加個數的變化規律					2	2	4		2	2	4		2	2	4		

由表格三的結果，我們觀察數字的變化，得到如下的推論：

推論 8：參考圖 25(a)至(d)與表格三

參考圖 25 的作法得到的特定圓內接 n 邊形， $n = 4, 5, 6, \dots$ 。設 a_n 代表特定圓內接 n 邊形的正交點數，則此 a_n 的遞迴一般式為

- (1) $a_{4k+1} = a_{4k}$; (2) $a_{4k+2} = a_{4k} + 2k$; (3) $a_{4k+3} = a_{4k} + 4k$;
 (4) $a_{4(k+1)} = a_{4k} + 8k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

說明：1. 首先，我們稱對角線互相垂直的圓內接等腰梯形為正交等腰梯形，往後也用此稱呼來說明，且一組正交等腰梯形的兩腰線段長即為兩條在同一個圓中相交成 90° 圓內角所對應的弦。

2. 如圖 25，從最原始的第一個正方形開始，之後邊數 n 以每 4 個為一循環，即 $n = 5, 6, 7, 8$ 為一循環，下一循環為 $n = 9, 10, 11, 12$ ，...，以此類推。

3. 若要構成新的正交等腰梯形必須至少要多一個腰線段長，如果只有新增一個點，就無法構成一個新腰線段長，所以 $a_{4k+1} = a_{4k}$ ，如圖 23(b)。

4. 兩個點可以作出一個 90° 的弦，會和前面循環產生的任何一個正方形中的兩邊相交，且和另外未相交兩邊分別構成一個新的正交等腰梯形。若前面循環已有 k 個正

方形，則會形成 $2k$ 個新的正交等腰梯形，所以 $a_{4k+2} = a_{4k} + 2k$ ，如圖 26(a)至(c)。

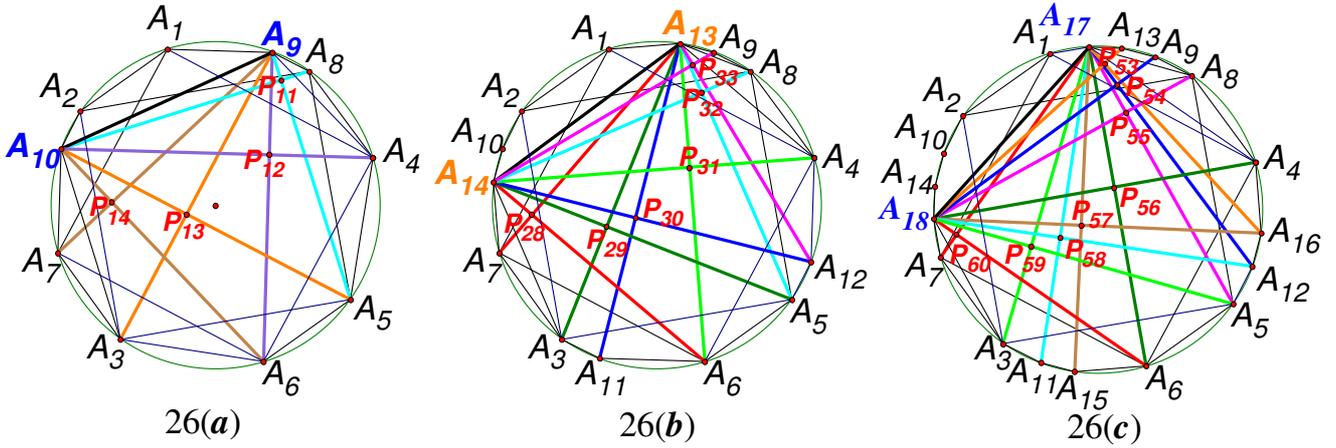


圖 26(a)至(c) 特定圓內接十、十四、十八邊形中分別會增加 4、6、8 個新正交點的順序示意圖

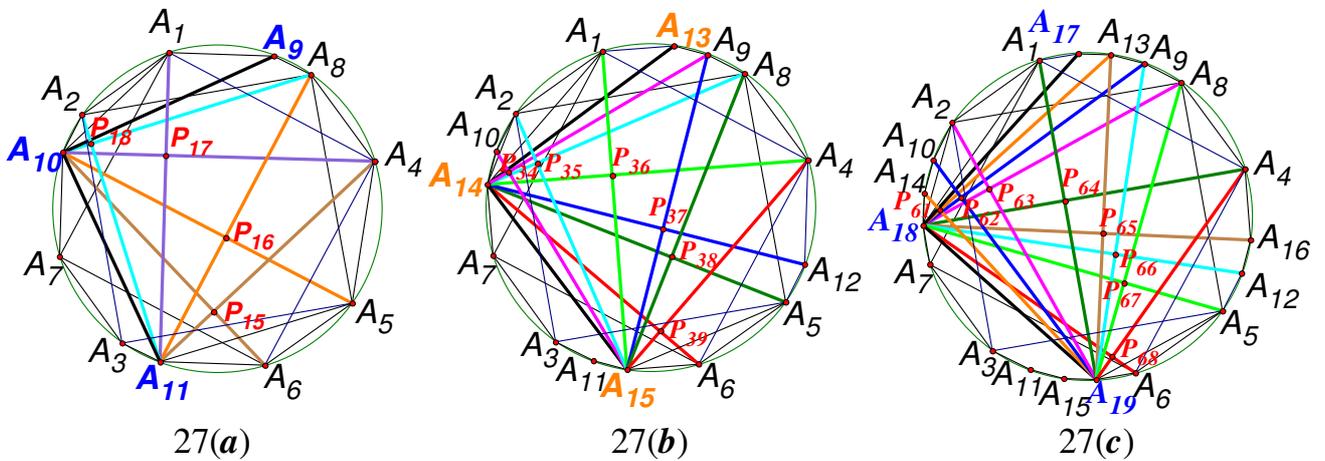


圖 27(a)至(c) 特定圓內接十一、十五、十九邊形中分別會增加 4、6、8 個新正交點的順序示意圖

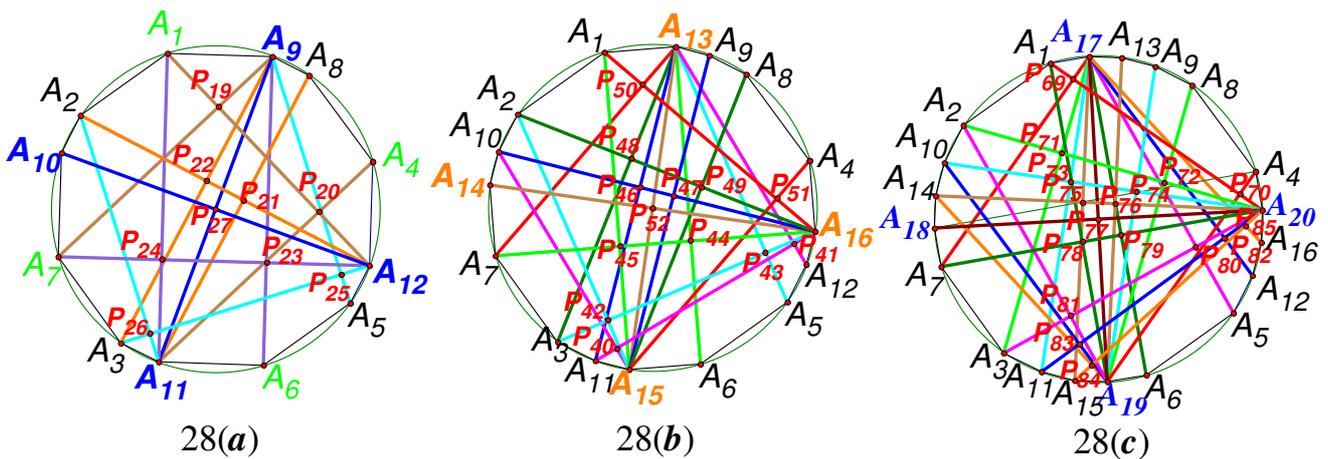


圖 28(a)至(c) 特定圓內接十二、十六、二十邊形中分別會增加 9、13、17 個新正交點的順序示意圖

5.承 4 的理由，因為有三個點，故可形成兩條互相垂直的 90° 弦，所以會形成 $4k$ 個正交等腰梯形，可得 $a_{4k+3} = a_{4k} + 4k$ ，如圖 27(a)至(c)。

6.同 4、5 的理由，因為有四個點會多出 $8k$ 個正交等腰梯形，且四個點可再構成一個

新的正方形，所以 $a_{4(k+1)} = a_{4k} + 8k + 1$ ，如圖 28(a)至(c)。

2. **特定圓內接多邊形與其衍生四邊形之間多點共圓的關係探討**：

回到最初正交等腰梯形與其衍生四邊形的圖形關係中，發現它們之間有五點共圓的關係，而形成**第 2 種圓**。說明如下：

推論 9：如圖 29

若圓內接等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 於 P ，則其**衍生四邊形 $EFGH$ 的內切圓圓心 O_1 、直角內角的頂點 G 、原等腰梯形的二條對角線與衍生四邊形一組不等長相鄰邊的 2 個交點 (R 和 S)、以及二條正交對角線交點 P** ，此五點共圓，且圓心為 $O_{(1,1)}$ 。

證明： $\because \angle FGH = 90^\circ = \angle FEH$ ， $\angle RPS = 90^\circ$

$$\therefore \angle FGH + \angle RPS = 180^\circ \Rightarrow P、R、G、S \text{ 四點共圓} \dots\dots\dots ①$$

再看四邊形 O_1PRG 中，

$$\because \angle FGH = 90^\circ \Rightarrow \angle RGO_1 = 45^\circ \quad (\because \overline{GO_1} \text{ 為 } \angle FGH \text{ 的角平分線})$$

$$\text{又 } \angle O_1PC = 45^\circ \quad \therefore \angle O_1PR = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$\text{故 } \angle O_1GR \text{ 和 } \angle O_1PR \text{ 互補} \Rightarrow O_1、P、R、G \text{ 四點共圓} \dots\dots\dots ②$$

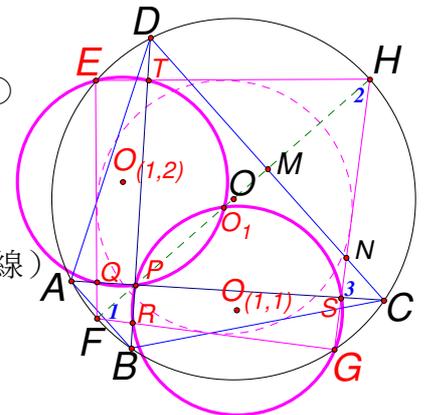


圖 29

由①、②知 $O_1、P、R、G、S$ 五點共圓 同理 $O_1、P、Q、E、T$ 五點也共圓 ■

由推論 9 及圖 29 得到五點共圓性質搭配第 2 個衍生四邊形，形成此圓內接四邊形 $ABCD$ 的外接圓 O 裡產生至少 6 個小圓：圓 $O_1、O_{(1,1)}、O_{(1,2)}、O'、O'_1$ 和 O'_2 ，如圖 30(a)及(b)。

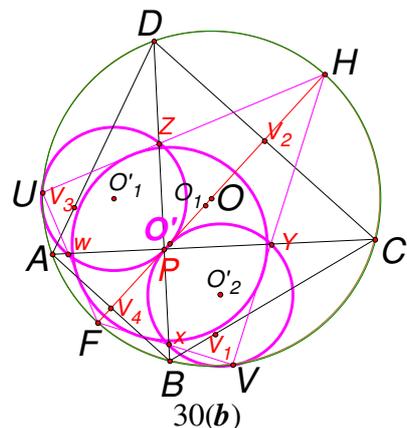
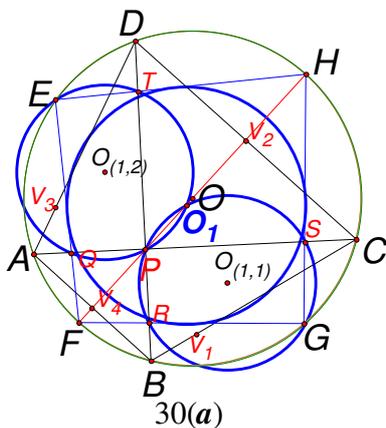


圖 30

3. **正交點正方形之第 3 種圓和第 1、2 種圓總數量與邊數 n 的關係探討**：

除了前面介紹的第 1、2 種圓外，特定圓內接 n 邊形內部的諸多正交點可形成正交點正方形，故又有內切圓與外接圓產生，統稱**第 3 種圓**，如圖 31(a)至(f)所示，為特定圓內接十二邊形中 27 個正交點共可形成 6 個小正交點正方形。我們將特定圓內接 n 邊形中第 1、2、3 種圓的總數量整理出與邊數 n 的遞迴一般式如**推論 10** 所述。

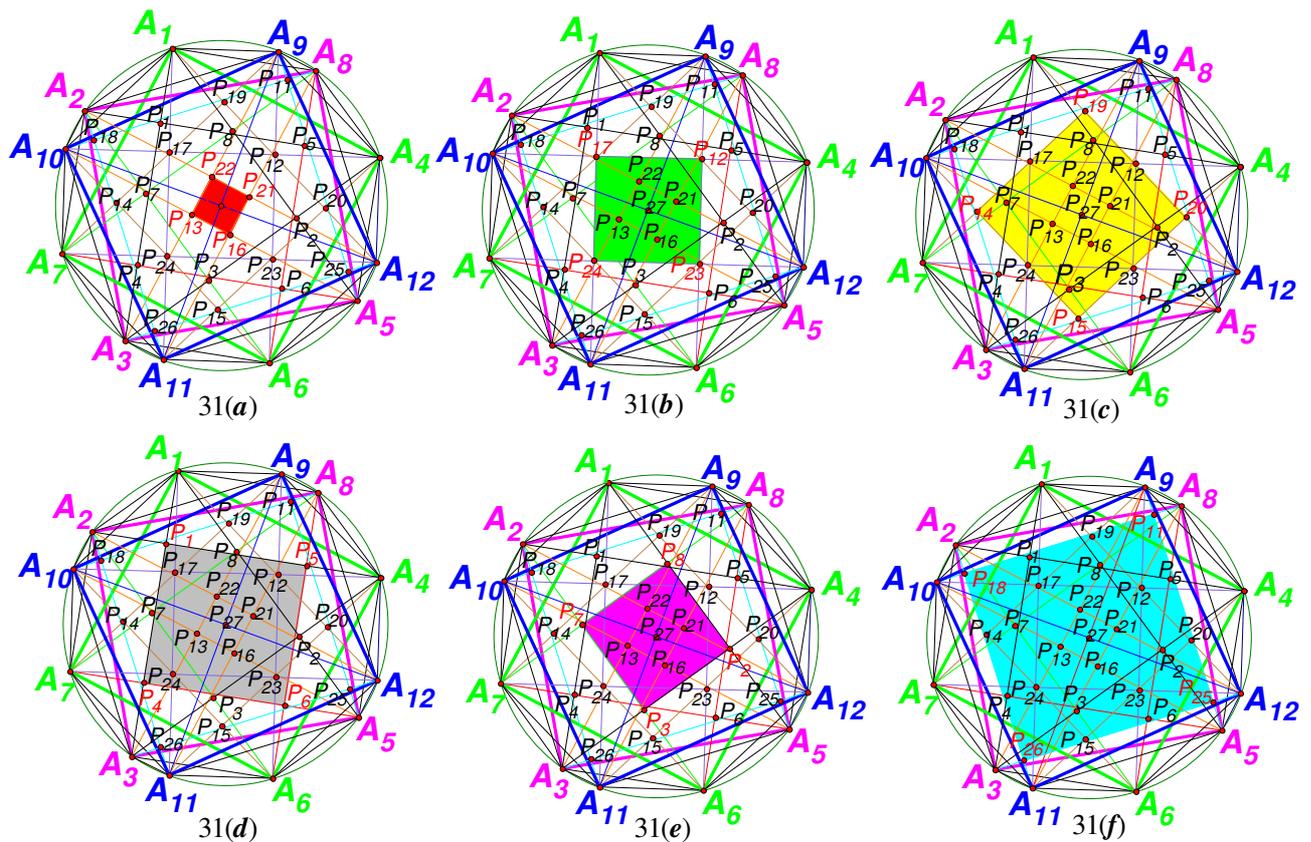


圖 31(a)至(f) 特定圓內接十二邊形中的 24 個正交點形成 6 個小正交點正方形

推論 10：

承**推論 8**與**9**，在一特定圓內接 n 邊形中，則第 1、2、3 種圓的總數量 T_n 為

$$T_n = 6 \left(a_n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 4 \times C_2^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}, \quad n = 4, 5, 6, \dots, \text{ 其中 } [] \text{ 為高斯符號； } C_y^x \text{ 為組合數。}$$

說明：(1)由 T_n 的前半部分 $6 \left(a_n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$ 說起，從 $n=4$ 開始， $(n, n+1, n+2, n+3) = (4, 5, 6, 7)$ 、

(8,9,10,11)、(12,13,14,15)、……，每四個一組，每一組都有相同數量的最大正方形形（ $\left[\frac{n}{4}\right]$ 個），扣掉該正方形的正交點，剩下的每一個正交點代表可以作出 6 個圓（二個**第 1 種圓**及四個**第 2 種圓**）。

(2) T_n 的後半部分 $4 \times C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]}$ ，在 $(n, n+1, n+2, n+3) = (4, 5, 6, 7)$ 這一組的特定圓內接 n 邊形中，只有一個最大的正方形，不會有小正交點正方形產生，故只有**第 1、2 種圓**；邊數 $n=8$ 以後的特定圓內接 n 邊形就會有 2 個(含)以上的最大正方形，這些最大正方形**兩兩的**頂點連線段會相交成小正交點正方形（如圖 31），有 $2 \times C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]}$ 個，又每個小正交點正方形會有其內切圓與外接圓，故共有 $2 \times C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]} \times 2 = 4 \times C_2^{\left[\frac{n}{4}\right]}$ 。

4. **正交點正方形與最大正方形的面積關係探討**：

推論 11：如圖 32 中的正交點正方形 $P_{11}P_{18}P_{25}P_{26}$ 、 $P_{13}P_{16}P_{21}P_{22}$ 、 $A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ (最大) 的面積

關係為
$$\frac{\text{正方形 } P_{13}P_{16}P_{21}P_{22} \text{ 面積}}{\text{正方形 } P_{11}P_{18}P_{25}P_{26} \text{ 面積}} = \frac{\overline{A_2A_{10}}^2}{A_2A_9^2} = \frac{1 - \cos \angle A_2OA_{10}}{1 - \sin \angle A_2OA_{10}}$$

$$\frac{\text{正方形 } P_{11}P_{18}P_{25}P_{26} \text{ 面積}}{\text{正方形 } A_9A_{10}A_{11}A_{12} \text{ 面積}} = 1 - \cos \angle A_2OA_9, \quad 0 < \angle A_2OA_9, \quad \angle A_2OA_{10} < 90^\circ。$$

證明：如圖 32，令圓 O 半徑為 R ，由餘弦定理可得

$$\begin{aligned} \overline{A_2A_{10}}^2 &= \overline{P_{22}P_{13}}^2 = \text{正方形 } P_{22}P_{13}P_{16}P_{22} \text{ 面積} \\ &= 2R^2 - 2R^2 \cos \angle A_2OA_{10} \\ &= 2R^2(1 - \cos \angle A_2OA_{10}) \end{aligned}$$

同理 正方形 $P_{11}P_{18}P_{25}P_{26}$ 面積

$$= 2R^2(1 - \cos \angle A_2OA_9),$$

又 $\angle A_2OA_{10} + \angle A_2OA_9 = 180^\circ$

$$\therefore \frac{\text{正方形 } P_{13}P_{16}P_{21}P_{22} \text{ 面積}}{\text{正方形 } P_{11}P_{18}P_{25}P_{26} \text{ 面積}} = \frac{1 - \cos \angle A_2OA_{10}}{1 - \sin \angle A_2OA_{10}} \quad \text{同理} \quad \frac{\text{正方形 } P_{11}P_{18}P_{25}P_{26} \text{ 面積}}{\text{正方形 } A_9A_{10}A_{11}A_{12} \text{ 面積}} = 1 - \cos \angle A_2OA_9 \quad \blacksquare$$

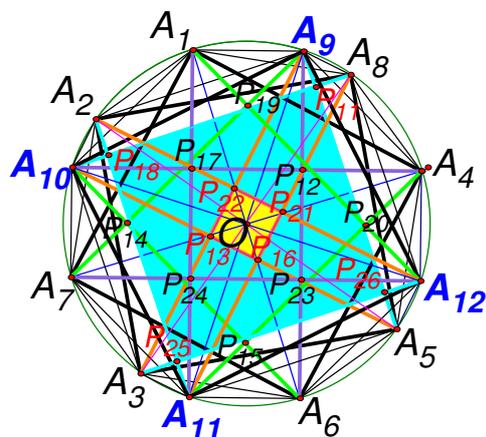


圖 32

伍、研究結果

由布拉美古塔定理的圓內接四邊形開始，定義「布拉美古塔線」得到 2 種圓內接「衍生四邊形」，經探討後得到以下的幾何結果：

一、若 2 種衍生四邊形皆為圓外切鳶形 \Leftrightarrow 原圓內接四邊形為正交等腰梯形。

二、承一的圓內接正交等腰梯形，利用作法一推廣得到：

1. **特定圓內接五邊形**，具有 2 個等腰梯形搭配各自的衍生四邊形，其內切圓(第 1 種圓)

半徑分別與其衍生四邊形的邊長、對角線、非直角內角、等腰梯形的腰長及外接圓半徑 R 有關。

2. 延伸作法一得到特定圓內接六、七、八邊形，則其**衍生四邊形**與**第 1 種圓**的歸屬關係為：

特定圓內接五邊形 \subseteq 特定圓內接六邊形 \subseteq 特定圓內接七邊形 \subseteq 特定圓內接八邊形。

3. (1) **第 1 種圓**相關性質以及衍生四邊形與原等腰梯形面積關係一般式如下**表格四**所示：

表格四：**第 1 種圓**半徑、面積以及衍生四邊形與原等腰梯形面積關係一般式

	關係式 (n =邊數, i =該 n 邊形的第 i 個衍生四邊形)	分析
第 1 種圓 半徑 r_i^n	$r_i^n = \frac{\overline{F_i^n H_i^n}}{F_i^n G_i^n + F_i^n I_i^n} \times R$	和衍生四邊形的 邊長、對角線、非直角內角、該等腰梯形腰長 及外接圓半徑 R 有關。
	$r_i^n = \tan(\angle F_i^n G_i^n H_i^n) \sqrt{1 - \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times R$	
	$r_i^n = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \tan(\angle F_i^n G_i^n H_i^n) \sqrt{1 - \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times \text{等腰梯形}_i^n \text{的腰長}$	
第 1 種圓 O_i^n 面積	$\text{圓}O_i^n = \frac{\sin^2(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{1 + \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times \text{圓}O$	和衍生四邊形的 非直角內角之 \sin 值 有關
衍生四邊形與原等腰梯形面積關係	$\frac{\text{衍生四邊形}E_i^n F_i^n G_i^n H_i^n \text{面積}}{\text{等腰梯形}_i^n \text{面積}} = \frac{\sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{\sin^2(\text{等腰梯形}_i^n \text{頂角})}$	面積比值和衍生四邊形 非直角內角 及該等腰梯形 頂角之 \sin 值 有關

(2)由 P.7 作法一得到的特定圓內接八邊形就是**等角平行八邊形**。

(3)由作法一得到特定圓內接 n 邊形中任意二個衍生四邊形之**第 1 種圓**半徑**比值**為

$$\frac{r_i^n}{r_j^n} = \frac{\sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{\sin(\angle F_j^n G_j^n H_j^n)} \times \sqrt{\frac{1 + \sin(\angle F_j^n G_j^n H_j^n)}{1 + \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}},$$
 其大小經推導是近乎相同的。(本文提供特定

圓內接五~八邊形的結果，其餘 n 邊形的結果經**窮舉法得證**並顯示在實驗日誌附件中)

三、利用表格三及圖 25 的作法，推廣到特定圓內接 n 邊形中，探討結果得到：

1. 正交點數 a_n 與邊數 n 的遞迴一般式為

$$\textcircled{1} a_{4k+1} = a_{4k} \quad ; \quad \textcircled{2} a_{4k+2} = a_{4k} + 2k \quad ; \quad \textcircled{3} a_{4k+3} = a_{4k} + 4k \quad ;$$

$$\textcircled{4} a_{4(k+1)} = a_{4k} + 8k + 1 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2. 衍生四邊形與原正交等腰梯形間有**五點共圓**的關係，形成**第 2 種圓**。

3. 正交點正方形的內切圓與外接圓統稱**第 3 種圓**，搭配**第 1 種圓**與**第 2 種圓**，使得特定

$$\text{圓內接 } n \text{ 邊形內部至少有 } T_n \text{ 個多生圓， } T_n = 6 \left(a_n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 4 \times C_2^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor}, \quad n = 4, 5, 6, \dots,$$

即所謂**布拉美古塔「多生圓」多邊形**。

4. 特定圓內接 n 邊形中正交點正方形們之間、與最大正方形的面積比值皆和正交點正方形**邊**所對**弧的圓心角**之**餘弦函數**有關。

陸、未來展望

- 一、從推論 7 的推導過程我們觀察到衍生四邊形的非直角內角與原等腰梯形的上底、下底有一定的二次函數關係，未來可以繼續探討這些關係式。
- 二、在畫特定圓內接 n 邊形時觀察到**新正交點的產生軌跡連線段**似乎會形成像風車型的圖形，參考圖 33(a)至(d)，又像立交橋形狀的內旋輪線[6]，這也是未來可以探討的方向之一。

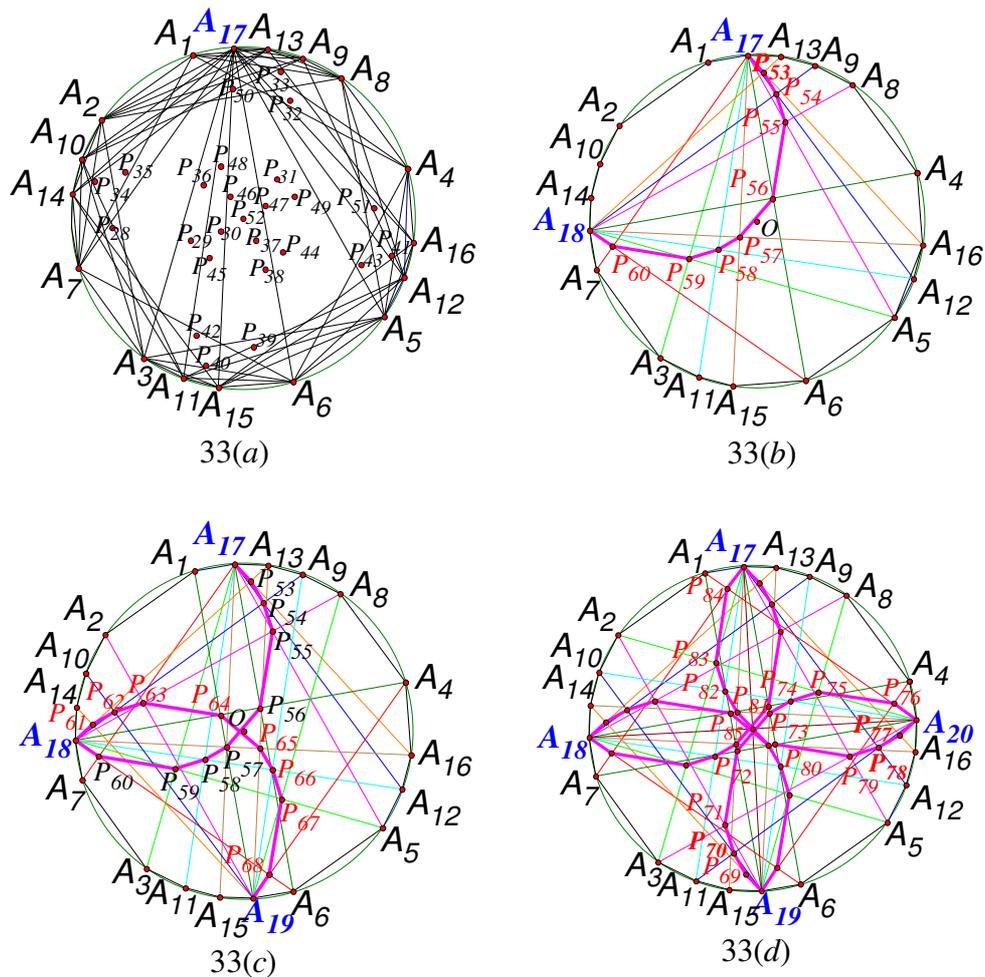


圖 33(a)至(d) 分別是特定圓內接十七、十八、十九、二十邊形產生新正交點的軌跡連線段

柒、參考資料

- [1] 笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年
- [2] 高中數學第三冊第一章，三角，南一書局。
- [3] 黃家禮等編著，[托勒密定理]，幾何明珠，2013 年
- [4] 楊晉魁、劉珊伶，「布拉美古塔」下的多生圓 → 布拉美古塔定理的「多生圓」多邊形，
新竹縣第 59 屆科展國中組數學科第二名，2019 年 5 月。
- [5] 國中數學第五冊，新北市康軒文教公司。
- [6] 蔣迅，數學之美：立交橋布局中的迷人曲線，<https://kknews.cc/news/5ooov66.html>。

【評語】 030405

1. 本研究延伸 2019 年新竹縣賽的作品，「布拉美古塔」下的多生圓→布拉美古塔定理的「多生圓」多邊形 4]：從布拉美古塔定理出發，藉由重新定義「布拉美古塔線」，並利用此直線作出圓上的二種衍生四邊形，探討此衍生四邊形的相關性質，並推廣到圓內接五、六、七、八邊形上。試圖在特定圓內接 n 邊形中，找出新發現與其規律性。本研究進一步利用對四邊作垂直線，且此垂直線與外接圓的四個交點連成的四邊形。
2. 在這份幾何題材的作品中，探討 Brahmagupta Theorem 為基礎，進行平面幾何作圖上的性質探討，與所學相關，是一份有趣的科展題目，有完整的論證推導，延續之前的科展研討。
3. 整體表現優良，展現了很好的數學能力，探討的一些關於布拉美古塔定理的自然推廣，成果與使用工具有豐富幾何與三角知識，是一不錯作品。

壹、研究動機： 布拉美古塔定理引出特定圓內接 n 邊形的新發現。

貳、研究目的與架構：

- 一、布拉美古塔線的圓外切衍生四邊形之充分必要條件及相關性質。
- 二、具有第 1 種圓的特定圓內接五、六、七、八邊形的相關性質探討。
- 三、特定圓內接 n 邊形中 \Rightarrow 1. 正交點數與邊數 n 的關係； 2. 內部多點共圓的關係(第 2 種圓)； 3. 第 1、2 種圓與正交點正方形的第 3 種圓之數量和邊數 n 的關係； 4. 正交點正方形間的面積關係探討。

布拉美古塔線與衍生四邊形

一、布拉美古塔線的圓外切衍生四邊形形成之充分必要條件及相關性質 (推論 1&2)

二、具有第 1 種圓的衍生四邊形之特定圓內接五、六、七、八邊形的相關性質探討 (性質 1 及推論 3~7)

三、特定圓內接 n 邊形

三-2 發現多點共圓 (第 2 種圓) (推論 9)

三-1 正交點數與邊數 n 的關係探討 (推論 8)

三-3 正交點正方形的內切圓與外接圓 (統稱第 3 種圓)

三-3 第 1、2、3 種圓數量與邊數 n 的關係 (推論 10)

三-4 小正交點正方形們與最大正方形的面積關係 (推論 11)

參、研究過程、方法與推論結果：

名詞定義與已知性質、定理[1]、[2]、[3]、[5]

1. 引理 1. 圓外切四邊形的兩組對邊和會相等。(如圖 1)

引理 2. 圓外切四邊形的面積 $= \frac{1}{2} \times S \times r$ 。(如圖 1)

引理 3. 圓內接四邊形的兩組對角分別互補。(如圖 1)

2. 布拉美古塔定理：如圖 2，在一個具有正交對角線的圓內接四邊形中，過其對角線交點作任一邊垂直線必過其對邊中點。布拉美古塔線則是指過對角線交點對一邊作的垂直線。

3. 衍生四邊形：將圖 2 中的四條布拉美古塔線與圓 O 的四個交點連成的四邊形，如圖 3。

4. 餘弦定理：如圖 4

5. 托勒密定理：如圖 5

研究推論及結果：

每一個衍生四邊形可以有一個內切圓 (第 1 種圓)

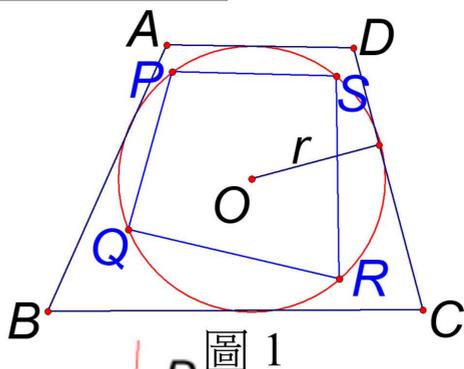


圖 1

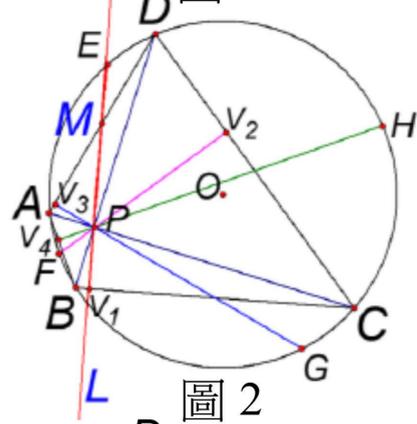


圖 2

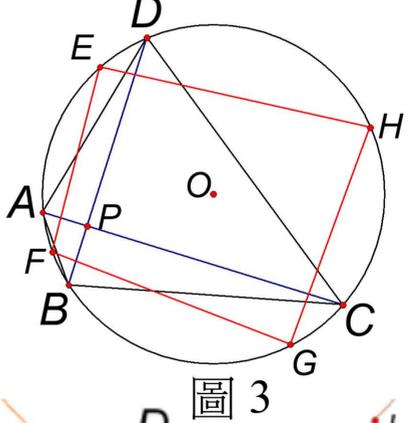


圖 3

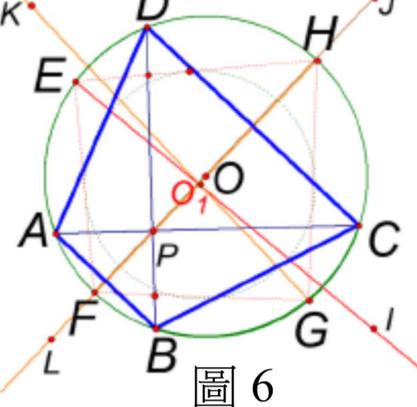


圖 4

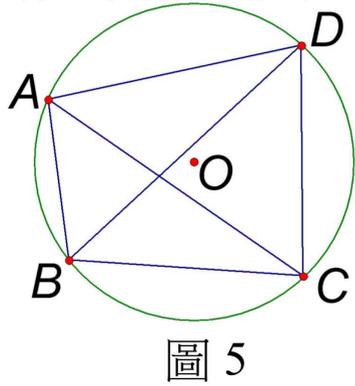


圖 5

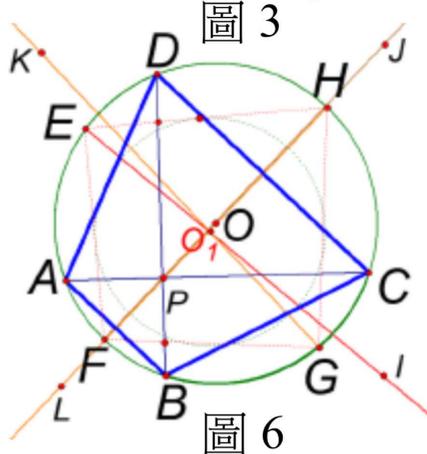


圖 6

一、推論 1、2：如圖 6，衍生四邊形為鳶形 \Leftrightarrow 原圓內接四邊形為正交等腰梯形

二、性質 1：如圖 7，圓內接五邊形 $ABCDE$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ 且 $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 於 P_1 ，若 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ 則過 D 作 \overline{CE} 的垂線必通過 A 點。 \rightarrow 此為作法一

1. 推論 3 ~ 5：如圖 8、9，特定圓內接五邊形中會出現兩個不同的等腰梯形搭配各自的衍生四邊形，其內切圓（第 1 種圓）半徑分別與其衍生四邊形的邊長、對角線、非直角內角、等腰梯形的腰長及外接圓半徑 R 有關。

2. 承作法一作出特定圓內接六、七、八邊形，則其衍生四邊形與第 1 種圓的歸屬關係為：
五邊形 \subseteq 六邊形 \subseteq 七邊形 \subseteq 八邊形

3. (1) 第 1 種圓相關性質及衍生四邊形與原等腰梯形面積關係一般式表格一所示：

表格一：第 1 種圓半徑、面積以及衍生四邊形與原等腰梯形面積關係

	關係式 (n =邊數, i =該 n 邊形的第 i 個衍生四邊形)	分析
第 1 種圓 半徑 r_i^n	$r_i^n = \frac{\overline{F_i^n H_i^n}}{\overline{F_i^n G_i^n} + \overline{F_i^n I_i^n}} \times R$	和衍生四邊形的邊長、對角線、非直角內角、該等腰梯形腰長及外接圓半徑 R 有關。
	$r_i^n = \left \tan(\angle F_i^n G_i^n H_i^n) \right \sqrt{1 - \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times R$	
	$r_i^n = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left \tan(\angle F_i^n G_i^n H_i^n) \right \sqrt{1 - \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times \text{等腰梯形}_i^n \text{的腰長}$	
第 1 種圓 O_i^n 面積	$\text{圓 } O_i^n = \frac{\sin^2(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{1 + \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)} \times \text{圓 } O$	和衍生四邊形的非直角內角之 \sin 值有關
衍生四邊形與原等腰梯形面積關係	$\frac{\text{衍生四邊形 } E_i^n F_i^n G_i^n H_i^n \text{ 面積}}{\text{等腰梯形}_i^n \text{ 面積}} = \frac{\sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{\sin^2(\text{等腰梯形}_i^n \text{ 頂角})}$	面積比值和衍生四邊形非直角內角及該等腰梯形頂角之 \sin 值有關

(2) 推論 6：特定圓內接八邊形為等角平行八邊形，如圖 10。

(3) 推論 7：作法一得到的特定圓內接 n 邊形之所有第 1 種圓半徑比值為：(參考圖 8、9)

$$0.987 < \frac{r_i^n}{r_j^n} = \frac{\sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}{\sin(\angle F_j^n G_j^n H_j^n)} \times \sqrt{\frac{1 + \sin(\angle F_j^n G_j^n H_j^n)}{1 + \sin(\angle F_i^n G_i^n H_i^n)}} < 1.01$$

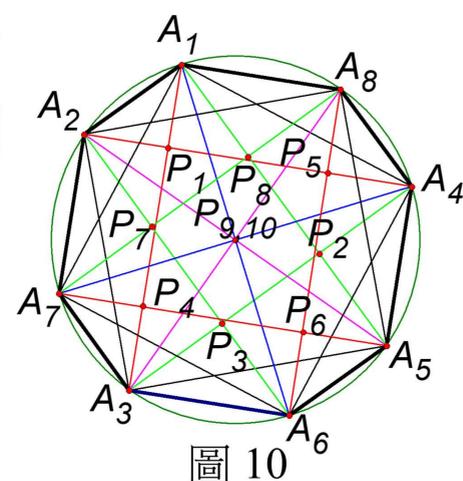


圖 10

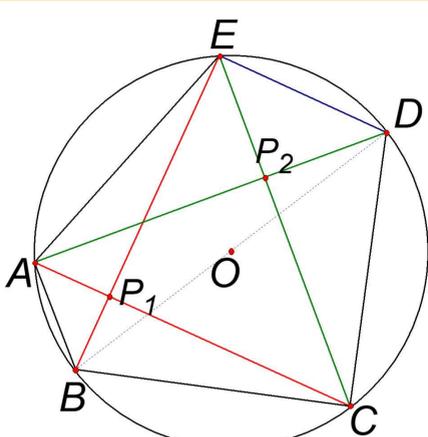


圖 7

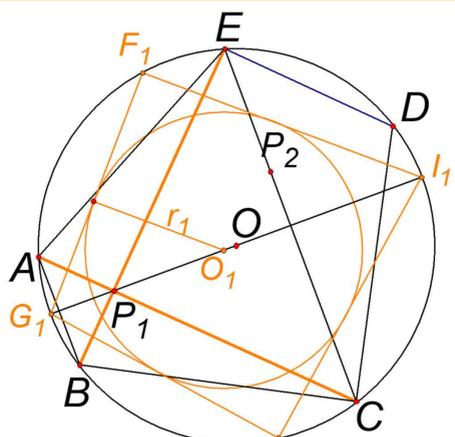


圖 8

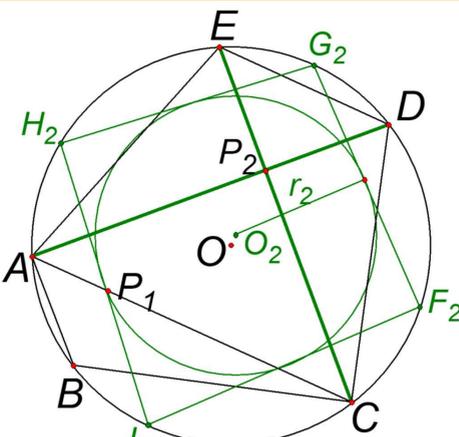


圖 9

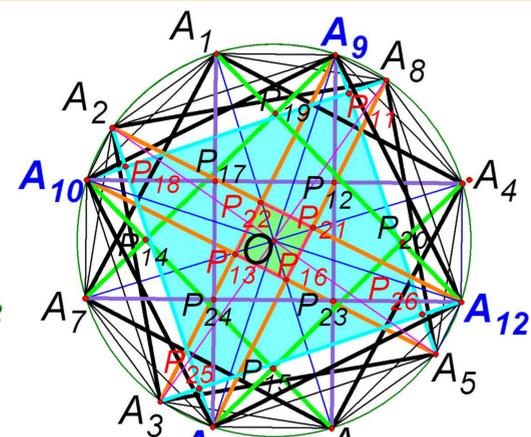


圖 11

三、特定圓內接 n 邊形：利用表格二及圖 12，得到

表格二：修改作法一前後得到正交點數的規律比較表

邊數	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十
作法 1 的正交點數	1	2	3	5	10	10	14	18	27	27	33	39	52	52	60	68	85
增加個數	1	1	2	5	0	4	4	9	0	6	6	13	0	8	8	17	
修改後的正交點數	1	1	3	5	10	10	14	18	27	27	33	39	52	52	60	68	85
增加個數	0	2	2	5	0	4	4	9	0	6	6	13	0	8	8	17	

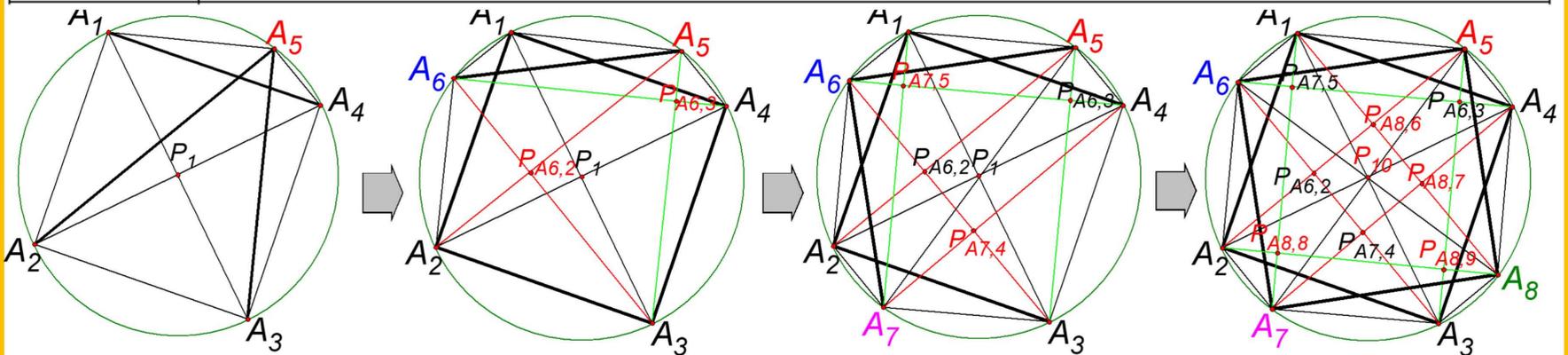


圖 12

1.推論 8：特定圓內接 n 邊形中， $n=4,5,6,\dots$ ，正交點數 a_n 的遞迴一般式為 (1) $a_{4k+1} = a_{4k}$ (2) $a_{4k+2} = a_{4k} + 2k$

(3) $a_{4k+3} = a_{4k} + 4k$ (4) $a_{4(k+1)} = a_{4k} + 8k + 1$ ， $k=1,2,3,\dots$

2.推論 9：如圖 13，正交等腰梯形與其衍生四邊形有**五點共圓**的現象，如圖 13，此種圓稱為**第 2 種圓**

3.推論 11：特定圓內接 n 邊形中的正交點正方形，其面積關係為：

以特定圓內接十二邊形為例， $\frac{\text{正方形 } P_{13}P_{16}P_{21}P_{22} \text{ 面積}}{\text{正方形 } P_{11}P_{18}P_{25}P_{26} \text{ 面積}} = \frac{\overline{A_2A_{10}}^2}{\overline{A_2A_9}^2} = \frac{1 - \cos \angle A_2OA_{10}}{1 - \sin \angle A_2OA_{10}}$
(參考圖 11)

☆正交點正方形的內切圓與外接圓統稱為**第 3 種圓**。

4.推論 10：由推論 8、9，在特定圓內接 n 邊形中，**第 1、2、3 種圓**的

數量為： $T_n = 6 \left(a_n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 4 \times C_2^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor}$ ， $n=4,5,6,\dots$

肆、未來展望：

1. 衍生四邊形的非直角內角與原等腰梯形的上底、下底可能有二次函數關係。

2. 在畫特定圓內接 n 邊形時觀察到**新正交點的產生軌跡連線段**似乎會形成像風車型的圖形。

伍、參考文獻：（只列出最重要的三個）

[1] 笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年

[4] 楊晉魁、劉珊伶，「布拉美古塔」下的多生圓 → 布拉美古塔定理的

「多生圓」多邊形，新竹縣第 59 屆科展國中組數學科第二名，2019 年 5 月。

[5] 國中數學第五冊，新北市康軒文教公司。

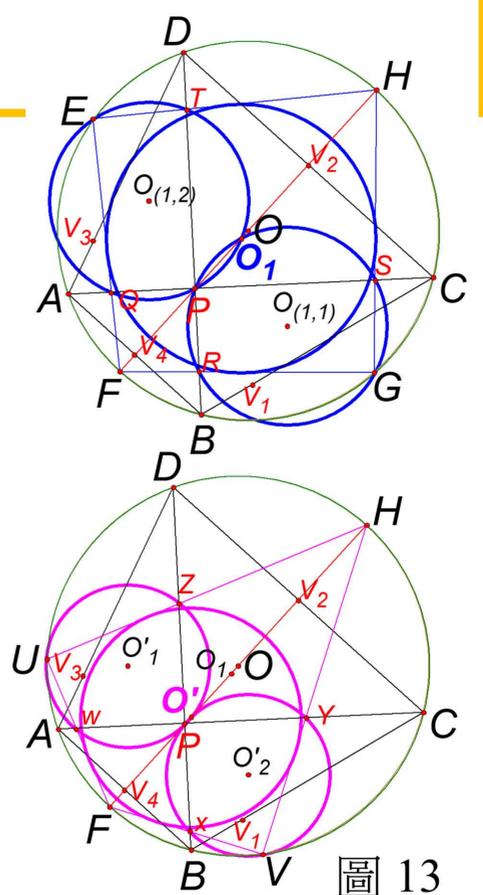


圖 13