中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030402

一次加入偶數個相同數之 M&m 數列穩定性探討

學校名稱：彰化縣立彰泰國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳則曲 國三 鄭尹宣 國二 蔡泓致	陳曉煒 林育帆

關鍵詞：M&m 數列、n 次穩定、穩定值

摘要

本研究針對 M&m 數列在未穩定前有一半的中位數是來自於兩數相加除以 2，致使數列在穩定性上不易有明確的規律，在不改變數列的運算規則下，我們改以每一次加入偶數個或更多個相同數的做法，探討能否加快 M&m 數列的穩定速度？並利用已知的原數列數字間的差距比例來找出穩定次數及穩定值的數學規律性。當原數列為 2k+1 項，每一次加入N個相同數，我們得出研究結果：

一、若 N 為偶數（N<2k+1），1≤穩定次數≤$\left[\frac{2k}{N}\right]+3$。

二、若 N>2k+1

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則穩定次數=1，穩定值為原數列中位數。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等，則穩定次數=3，穩定值為數列所加入的第一組相同數字。

壹、研究動機

國三統計資料分析單元中，曾介紹了有關平均數與中位數的概念。在龍騰數亦優 23 期動手玩數學專欄中一道中位數與平均數的遊戲，給定三個已知數，$a_1 = 53, a_2 = 13, a_3 = 41$，依照數列前 k+1 項的平均數=數列前 k 項的中位數之運算規則，依序發展可以得到一個數列$\langle a_n \rangle$：$53,13,41,57,\cdots$ 不禁讓我們對此數列產生高度的好奇，在此規則運算下，數列是否存在一定的規律？中位數與平均數最後是否趨於一致？

後來，更進一步在網路上搜尋到有關 M&m 數列的相關研究，特別是在臺灣 2008 年國際科展作品《M&m Sequences 之研究》一文中，將原數列(a , b , c)利用線性變換成($-x$, 1 , x)來探討此數列穩定的相關性質。文中提出若 x ≥41.625，則由($-x$, 1 , x)起始所形成的 M&m 數列，一定會收斂在 41.625 且穩定長度為 73，這個結果激發我們對收斂到穩定值的速度，是否能有辦法更加快？以及 x<41.625 時，是否仍具有收斂到穩定值的一般性質？我們對這樣的問題感到興趣，嘗試想探討在不改變數列的運算規則之下，每一次加入偶數個相同數，探討能否加快 M&m 數列的穩定速度，於是開啟了我們的研究之路。

貳、研究目的

一、探討原數列為$2k+1$項，一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律。

二、探討原數列為$2k+1$項，一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數與 N 之關聯。

參、研究設備及器材

一、Excel 統計軟體

肆、研究過程或方法

一、彙整相關文獻

M&m 數列是由 Shultz 和 Shiflett(2005)提出的一種特殊數列。M&m 數列中的 M 與 m 分別代表平均數及中位數，此數列剛開始先取三數 a、b、c，第四個數 d 必須滿足其與前三個數的平均數（即$\frac{a+b+c+d}{4}$）要等於前三個數所成數列（即 a、b、c）的中位數，第五個數則要滿足其與前四個數的平均數要等於前四個數所成數列（即 a、b、c、d）的中位數，依次類推，所形成之數列即為 M&m 數列。在臺灣 2008 年國際科展作品《M&m Sequences 之研究》一文中，將原數列(a , b , c)利用線性變換成$(-x , 1 , x)$來探討此數列穩定的相關性質。文中提出若 $x \geq 41.625$，則由 $(-x, 1, x)$ 起始所形成的 M&m 數列，一定會收斂在 41.625 且穩定長度為 73（本研究定義為 70 次穩定)，如圖 4-1 所示；當 $x<41.625$ 時，節點部分可以找出收斂值及穩定長度，而其餘部分並無明顯規則性。M&m 數列在未穩定前有一半的中位數m_q（q為偶數）是來自於兩數相加除以 2，致使數列在穩定性上不容易有明確的規律，我們將 $x \geq 41.625$ 的$(-x , 1 , x)$數列轉換成原三數(a , b , c)差距比值呈現，即$\frac{b-a}{c-b}=\frac{x-1}{1+x}=\frac{41.625-1}{1+41.625}=\frac{325}{341}$，發現僅在$\frac{325}{341}\leq\frac{b-a}{c-b}<1$ 範圍中可以明確得知穩定次數為 70 次。

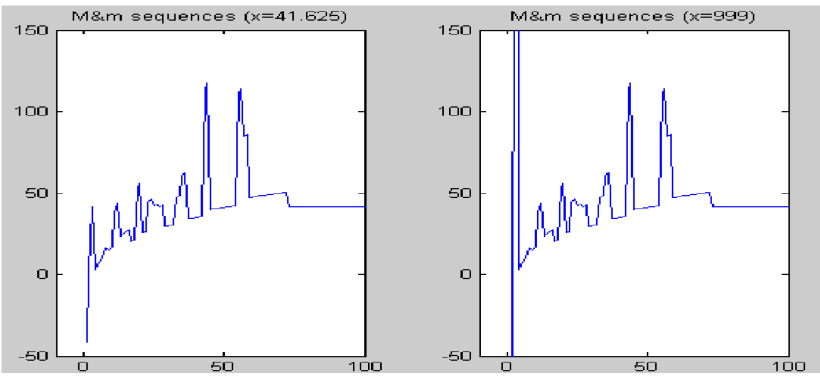


圖 4-1 左圖表示 x=41.625；右圖表示 x=999（資料來源取自《M&m Sequences 之研究》）

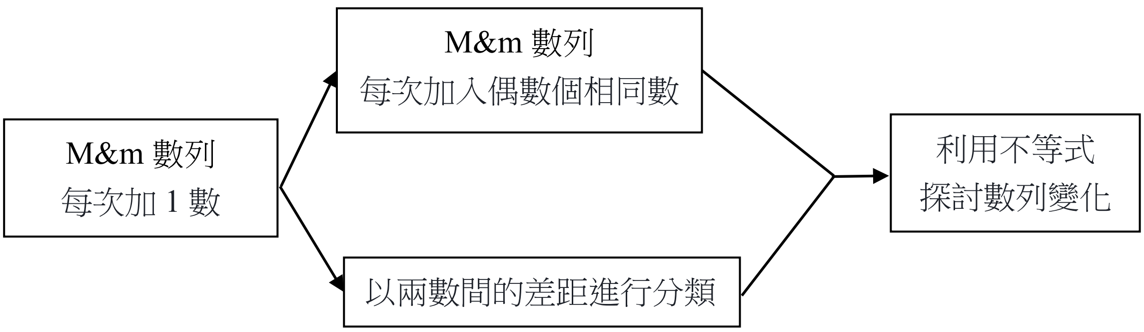
在 105 學年度台中市中小學科學展覽高中組作品《均中求穩》一文中，利用 Excel 的統計指令快速求得數列的各項數值的變化規則，試圖探討數列中位數與平均數最後是否會相同？他們發現原數列在(1,1+k,1+k)~(1,1+k,2k+1)間，穩定次數和穩定值有對稱的情形發生，如圖 4-2 所示。

原數列	1	1	1	1	1	1
	6	6	6	6	6	6
	6	7	8	9	10	11
每一次加入的數值	11	10	9	8	7	6
	6	8.5	11	11	8.5	6
	6	9.5	13	13	9.5	6
	6	12.25	11.5	11.5	12.25	6
	6	13.75	12.5	12.5	13.75	6
	6	13	18	18	13	6
	6	14	20	20	14	6
	6	12.25	13.75	13.75	12.25	6
	6	12.75	14.25	14.25	12.75	6
	6	24.63	18	18	24.63	6
	6	26.88	19	19	26.88	6
	6	12.25	16.25	16.25	12.25	6

左右對稱

圖 4-2 原數列(1,6,6)~(1,6,11)的穩定情形

而本研究想探討若在不改變 M&m 數列的演算規則下，改為一次加入偶數個或更多個相同數，探討對數列穩定性之影響？並利用已知的原數列數字間的差距比例來找出穩定次數及穩定值的數學規律性。



二、名詞釋義

(一)$\mathbf{m}_i$：指加入第 i 組相同數字後，所得數列的中位數。其中m_0代表原始數列中位數。

$\boldsymbol{M_i}$：指加入第 i 組相同數字後，所得數列的平均數。

$\boldsymbol{x_i}$：在$M_{k+1} = \mathrm{m}_k$的運算規則下，原數列所加入的第 i 組相同數字之值。

(二)**n次穩定**：當$n = \min\{k \in \mathrm{N}: x_k = x_{k+\ell}, \forall \ell \in \mathrm{N}\}$，則數列為$n$次穩定。

以原數列$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 9$為例，根據數列前 k+1 項的平均數=數列前 k 項的中位數之運算規則，即$M_{k+1} = \mathrm{m}_k$，在每一次加入 2 個相同數下，我們依序可以求得$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$的值如下:

Step1. $x_1 = \frac{1}{2}[5 \times 2 - (1 + 2 + 9)] = \mathbf{-1}$。

將數列由小到大排列$-1, -1, 1, 2, 9$的中位數$\mathrm{m}_1 = 1$。

Step2. $x_2 = \frac{1}{2}[7 \times 1 - (-1 - 1 + 1 + 2 + 9)] = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$。

將數列由小到大排列$-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1, -1, 1, 2, 9$的中位數$\mathrm{m}_2 = -1$。

Step3. $x_3 = \frac{1}{2}\left[9 \times (-1) - \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 1 - 1 + 1 + 2 + 9\right)\right] = \mathbf{-8}$。

將數列由小到大排列$-8, -8, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1, -1, 1, 2, 9$的中位數$\mathrm{m}_3 = -1$。

Step4. $x_4 = \frac{1}{2}\left[11 \times (-1) - \left(-8 - 8 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 1 - 1 + 1 + 2 + 9\right)\right] = \mathbf{-1}$。

將數列由小到大排列$-8, -8, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1, -1, -1, -1, 1, 2, 9$的中位數$\mathrm{m}_4 = -1$。

往後依照相同的規則運算得到數列 1,2,9,**-1,-1**,$-\frac{3}{2}$,$-\frac{3}{2}$,**-8,-8**,**-1,-1** ,**-1,-1**⋯，所以我們可以得知$x_4 = x_5 = -1$，且$k \geq 4$的x_k值皆為-1 達到穩定，故數列為 **4 次穩定**。

(三)$\boldsymbol{Q_i}$：若數列為 i 次穩定，則令穩定值$Q_i = x_i$。

三、研究內容

性質一、在原始數列三數為$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)}$，在每一次加入偶數 N 個相同數時，若 $\boldsymbol{a_3 - a_2 = a_2 - a_1}$，則數列為 1 次穩定。

【證明】原始數列三數$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，$\mathrm{m}_0 = a_2$

若$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$，即$a_3 - \mathrm{m}_0 = \mathrm{m}_0 - a_1$

則依據$M_2 = \mathrm{m}_1$運算規則

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_0 - (a_1 + a_2 + a_3)] = \frac{1}{\mathrm{N}}[\mathrm{N}\mathrm{m}_0 + (\mathrm{m}_0 - a_1) - (a_3 - \mathrm{m}_0)] = \mathrm{m}_0$$

$\therefore \mathrm{m}_1 = a_2$

依據$M_3 = \mathrm{m}_2$，可得$x_2 = x_1$。重複相同運算，可得$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = \mathrm{m}_0$。

故數列為1次穩定，且穩定值為m_0。

性質二、在原始數列三數為$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)}$，在每一次加入偶數 N 個相同數下，若 $\boldsymbol{a_3 - a_2 > a_2 - a_1}$，則數列中位數$\boldsymbol{\{\mathrm{m}_k\}_{k=0}^{\infty}}$為單調遞減數列；反之則為單調遞增數列。

【證明】

$$依據 M_{k+1} = \frac{\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k} x_i + \mathrm{N}x_{k+1} + (a_1 + a_2 + a_3)}{\mathrm{N}(k+1)+3} = \mathrm{m}_k$$

$$\Longrightarrow x_{k+1} = \frac{1}{\mathrm{N}}\left[(\mathrm{N}k + \mathrm{N} + 3)\mathrm{m}_k - \mathrm{N}\sum_{i=1}^{k} x_i - (a_1 + a_2 + a_3)\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_0 - (a_1 + a_2 + a_3)] = \frac{(\mathrm{N}+2)a_2 - a_1 - a_3}{\mathrm{N}} = a_2 + \frac{(a_2 - a_1) - (a_3 - a_2)}{\mathrm{N}} < a_2$$

利用數學歸納法證明:

1. $\mathrm{m}_1 < \mathrm{m}_0$恆成立

   當$x_1 \geq a_1$時，$\mathrm{m}_1 = x_1 < a_2 = \mathrm{m}_0$；當$x_1 < a_1$時，若$\mathrm{N} = 2$，則$\mathrm{m}_1 = a_1 < a_2 = \mathrm{m}_0$。若$\mathrm{N} > 2$，則$\mathrm{m}_1 = x_1 < a_2 = \mathrm{m}_0$。

2. 假設$\mathrm{m}_k < \mathrm{m}_{k-1} (k > 1)$成立

3. 證明$\mathrm{m}_{k+1} < \mathrm{m}_k$亦成立

   $$\because M_k = \frac{\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k} x_i + a_1 + a_2 + a_3}{\mathrm{N}k + 3} = \mathrm{m}_{k-1}$$

$$\Rightarrow x_{k+1}=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[(\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_k-\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k}x_i-(a_1+a_2+a_3)\right]$$

$$=\frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_k-(\mathrm{N}k+3)\mathrm{m}_{k-1}]=\frac{1}{\mathrm{N}}[\mathrm{N}\mathrm{m}_k+(\mathrm{N}k+3)(\mathrm{m}_k-\mathrm{m}_{k-1})]<\mathrm{m}_k$$

$\therefore \mathrm{m}_{k+1}<\mathrm{m}_k$，$\forall \mathrm{k}\in\mathrm{N}$，故數列中位數$\{\mathrm{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$為單調遞減數列。

性質三、在原始數列三數為$\boldsymbol{a_1,a_2,a_3}$，每一次加入偶數 N 個相同數時，若 k 為最小正整數使得$\mathbf{m}_{\boldsymbol{k}}=\mathbf{m}_{\boldsymbol{k-1}}$時，則數列為$\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$次穩定

【證明】由$M_k=\mathrm{m}_{k-1}$運算規則

$$\because M_k=\frac{1}{\mathrm{N}k+3}\left(\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k}x_i+a_1+a_2+a_3\right)=\mathrm{m}_{k-1}$$

$$且M_{k+1}=\frac{1}{\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3}\left(\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k+1}x_i+a_1+a_2+a_3\right)=\mathrm{m}_k$$

若$\mathrm{m}_k=\mathrm{m}_{k-1}$，則$x_{k+1}=\frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_k-(\mathrm{N}k+3)\mathrm{m}_{k-1}]=\mathrm{m}_k$。

即新加入的數是中位數m_k。所以可得$\mathrm{m}_{k+1}=\mathrm{m}_k$，這又導致$x_{k+2}=\mathrm{m}_{k+1}$，故$x_{k+2}=x_{k+1}$。

重複上述作法，可得$x_{k+1+\ell}=x_{k+1}$，$\forall \ell\in\mathrm{N}$，故數列為 k+1 次穩定。

性質四、假設兩數列$\boldsymbol{a_1,a_2,a_3(a_1<a_2<a_3)}$與$\boldsymbol{b_1,b_2,b_3(b_1<b_2<b_3)}$，滿足$\boldsymbol{\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\frac{b_3-b_2}{b_2-b_1}}$，若在一次加入偶數 N 個相同的數，前者所得之 M&m 數列為 n 次穩定，則後者所得之 M&m 數列亦為 n 次穩定

【證明】設原始數列三數a_1,a_2,a_3經過$y=f(x)=px+q$線性轉換後，得到新原始數列b_1,b_2,b_3分別為pa_1+q,pa_2+q,pa_3+q。

$\because (pa_3+q)-(pa_2+q):(pa_2+q)-(pa_1+q)=p(a_3-a_2):p(a_2-a_1)=a_3-a_2:a_2-a_1$

$\therefore$原始數列差距比不受線性轉換影響而改變。

$$依據M_{k+1}=\mathrm{m}_k\Rightarrow x_{k+1}=\frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)\mathrm{m}_k-\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k}x_i-(a_1+a_2+a_3)]$$

$$則x_1=\frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}+3)m_0-(a_1+a_2+a_3)]=\frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}+3)a_2-(a_1+a_2+a_3)]$$

$$\Rightarrow y_1 = f(x_1) = \frac{1}{\mathrm{N}}[(\mathrm{N}+3)(pa_2+q)-(pa_1+q+pa_2+q+pa_3+q)] = \frac{1}{\mathrm{N}}(px_1+q)$$

∴新數列與原數列有相同的線性變化關係，且存在$y_k = f(x_k) = px_k + q$的線性關係。

若原數列為$k+1$次穩定，則由性質三得知$\mathrm{m}_k = \mathrm{m}_{k-1} \Rightarrow M_{k+1} = M_k$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3}\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i + a_1 + a_2 + a_3\right) = \frac{1}{\mathrm{N}k+3}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + a_1 + a_2 + a_3\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + a_1 + a_2 + a_3\right) = (\mathrm{N}k+3)x_{k+1}$$

然而在新數列中，我們發現

$$M'_k = \frac{p\left(\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k} x_i + a_1 + a_2 + a_3\right) + (\mathrm{N}k+3)q}{\mathrm{N}k+3} = \frac{p(\mathrm{N}k+3)x_{k+1} + (\mathrm{N}k+3)q}{\mathrm{N}k+3} = px_{k+1} + q = \mathrm{m}'_{k-1}$$

$$M'_{k+1} = \frac{p\left(\mathrm{N}\sum_{i=1}^{k+1} x_i + a_1 + a_2 + a_3\right) + (\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)q}{\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3} = \frac{p(\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)x_{k+1} + (\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3)q}{\mathrm{N}k+\mathrm{N}+3}$$

$$= px_{k+1} + q = \mathrm{m}'_k$$

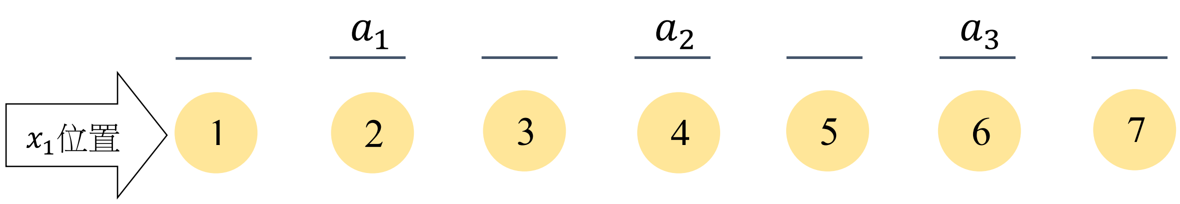
$\because \mathrm{m}'_k = \mathrm{m}'_{k-1}$

∴新數列與原數列的穩定次數皆為$k+1$次，且穩定值$Q'_{k+1} = f(Q_{k+1}) = pQ_{k+1} + q$。

(一)每一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律

研究 1-1-1、N=2，原數列為a_1, a_2, a_3之情形

發現原數列a_1，a_2，a_3，在每一次加入 2 個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1的位置，穩定值受到x_1、x_2的影響。



1. 若$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$，則$x_1 = a_2$，即x_1落在 ④，數列為 1 次穩定，穩定值$Q_1 = x_1$。
2. 若$a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$，則x_1落在的位置可能為 ①②③⑤⑥⑦，共 6 種可能。

(1) 若x_1落在 ②③⑤⑥，則$\mathrm{m}_1 = x_1$

由性質二可知$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = x_1$，再根據性質三，求得數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3 = x_1$。

(2) 若x_1落在 ①，則$\mathrm{m}_1 = a_1$。此時，x_2會有兩種可能：

當$x_2 < x_1$，則由性質二可知$\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4 = x_1$。

當$x_1 \le x_2 < a_1$，則由性質二可知$\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_2$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4 = x_2$。

(3) 若x_1落在 ⑦，則$\mathrm{m}_1 = a_3$。此時，x_2會有兩種可能：

當$x_2 > x_1$，則由性質二可知$\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4 = x_1$。

當$a_3 < x_2 \le x_1$，則由性質二可知$\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_2$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4 = x_2$。

說明我們依據原數列三數間的差距情形，將討論步驟做了分類，如圖 4-3 所示：

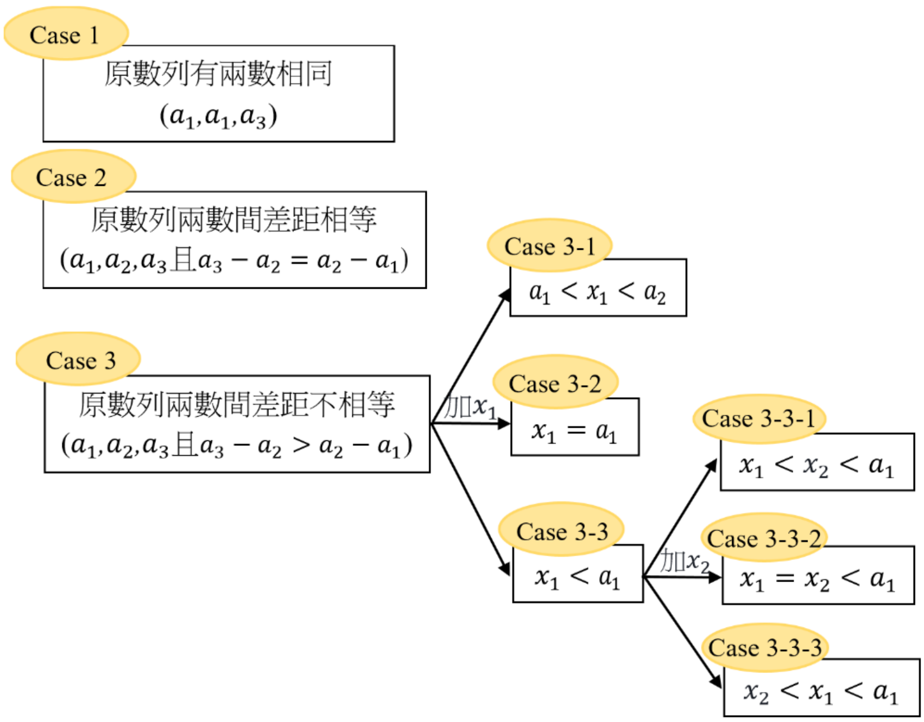


圖 4-3 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入 2 個相同數之步驟

1. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 = a_2 < a_3)$

設$a_1 = a_2 = a$，此時$\mathrm{m}_0 = a$

$$x_1 = \frac{1}{2}(5a - a - a - a_3) = \frac{3a - a_3}{2} = a + \frac{a - a_3}{2} < a \Rightarrow \frac{3a - a_3}{2}, \frac{3a - a_3}{2}, a, a, a_3$$

$\therefore \mathrm{m}_1 = a = \mathrm{m}_0$，根據性質三，故數列為 2 次穩定，且穩定值$Q_2 = a_1$。

2. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，若$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

根據性質一，故數列為 1 次穩定，且穩定值$Q_1 = a_2$。

3. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，若$a_3 - a_2 > a_2 - a_1$

則由性質二得知$x_1 < a_2 = \mathrm{m}_0$，此時x_1會有下列三種情況：

(1) $a_1 < x_1 < a_2$，此時數列為a_1, x_1, x_1, a_2, a_3

∵中位數為單調遞減數列且由性質三可知$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = x_1$

∴數列穩定次數為 2+1=3 次，且穩定值$Q_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$。

(2) $x_1 = a_1$，此時數列為a_1, a_1, a_1, a_2, a_3

同理，因為$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = a_1$，所以數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$。

(3) $x_1 < a_1$，此時數列為x_1, x_1, a_1, a_2, a_3

同理，因為$\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$，所以數列為 3+1=4 次穩定。

接下來，我們將上述的三種情況進一步透過不等式，來探討數列間的差距範圍大小對穩定值有何影響？

①$a_1 < x_1 < a_2$，此時數列為a_1, x_1, x_1, a_2, a_3

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 < \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2} \Rightarrow 2a_1 < 4a_2 - a_1 - a_3 \Rightarrow 3a_1 < 4a_2 - a_3 \Rightarrow a_3 - a_2 < 3(a_2 - a_1)$$

綜合(1)和 ①的結果，我們得知當數列間的差距在$a_3 - a_2 < 3(a_2 - a_1)$的情況下，數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{4a_2 - a_1 - a_3}{2} = x_1$。

②$x_1 = a_1$，此時數列為a_1, a_1, a_1, a_2, a_3

同理可知，當數列間的差距在$a_3 - a_2 = 3(a_2 - a_1)$的情況下，數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{4a_2 - a_1 - a_3}{2} = x_1$。

③$x_1 < a_1$，此時數列為x_1, x_1, a_1, a_2, a_3

$$\Rightarrow \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2} < a_1 \Rightarrow a_3 - a_2 > 3(a_2 - a_1)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(7a_1 - 5a_2) < \frac{1}{2}(7a_1 - 5a_1) = a_1$$

此時x_2會有下列三種情況：

i. $x_1 < x_2 < a_1$，此時數列為$x_1, x_1, x_2, x_2, a_1, a_2, a_3$

$$\Rightarrow \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2} < \frac{7a_1 - 5a_2}{2} \Rightarrow 9a_2 - a_3 < 8a_1 \Rightarrow a_3 - a_2 > 8(a_2 - a_1)$$

$$\because \mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_2 \ \therefore \text{穩定值} Q_4 = x_2 = \frac{7a_1 - 5a_2}{2}$$

ii. $x_2 = x_1$，此時數列為$x_1, x_1, x_1, x_1, a_1, a_2, a_3$

$$\Rightarrow a_3 - a_2 = 8(a_2 - a_1)$$

$$\because \mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_1 \ \therefore \text{穩定值} Q_4 = x_1 = \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2}$$

iii. $x_2 < x_1$，此時數列為$x_2, x_2, x_1, x_1, a_1, a_2, a_3$

$$\Rightarrow a_3 - a_2 < 8(a_2 - a_1)$$

$$\because \mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2 = x_1 \ \therefore \text{穩定值} Q_4 = x_1 = \frac{4a_2 - a_1 - a_3}{2}$$

研究 1-1-2、N=4，原數列為a_1, a_2, a_3之情形

發現一 加入的第一組相同數字x_1即為新數列的中位數m_1，如圖 4-4 所示。

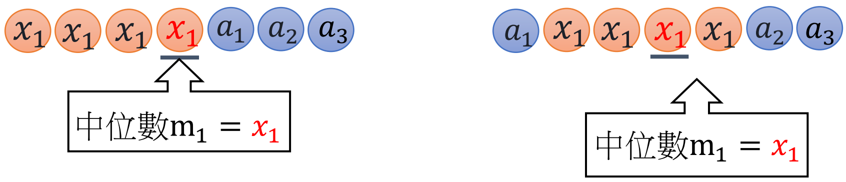


圖 4-4 原數列a_1,a_2,a_3第一次加入 4 個相同數後的新數列中位數

發現二 原數列a_1，a_2，a_3，在每一次加入 4 個相同數下，當數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等為 1 次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為 3 次穩定，且穩定值為x_1。

說明

1. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 = a_2 < a_3)$

設$a_1 = a_2 = a$，此時$\mathrm{m}_0 = a$

$$x_1 = \frac{1}{4}(7a - a - a - a_3) = \frac{5a - a_3}{4} = a + \frac{a - a_3}{4} < a \Rightarrow x_1, x_1, x_1, x_1, a, a, a_3，\therefore \mathrm{m}_1 = x_1。$$

$$x_2 = \frac{1}{4}[11x_1 - (a + a + a_3 + 4x_1)] = \frac{27a - 11a_3}{16}$$

$$\because x_2 - x_1 = \frac{7a - 7a_3}{16} = \frac{7}{16}(a - a_3) < 0 \ \therefore x_2 < x_1 \Rightarrow x_2, x_2, x_2, x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, a, a, a_3$$

$\therefore \mathrm{m}_2 = x_1 = \mathrm{m}_1$，根據性質三，故數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{5a - a_3}{4} = x_1$。

2. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，若$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

根據性質一，故數列為 1 次穩定，且穩定值$Q_1 = a_2$。

3. 考慮$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，若$a_3 - a_2 > a_2 - a_1$

則由性質二得知$x_1 < a_2 = \mathrm{m}_0$，此時x_1會有下列三種情況：

(1) $a_1 < x_1 < a_2$，此時數列為$a_1, x_1, x_1, x_1, x_1, a_2, a_3$

∵中位數為單調遞減數列，且在一次加入 4 個相同數時，使得新中位數向原數列中位數左移 2 個數字，可知$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = x_1$。

∴由性質三可推得數列穩定次數為 2+1=3 次，且穩定值$Q_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$。

(2) $x_1 = a_1$，此時數列為$a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_3$

同理，因為$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = a_1$，所以數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$。

(3) $x_1 < a_1$，此時數列為$x_1, x_1, x_1, x_1, a_1, a_2, a_3$

同理，因為$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = x_1$，所以數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \mathrm{m}_2 = x_1$。

接下來，我們將上述的三種情況進一步透過不等式，來探討數列間的差距範圍大小對穩定值有何影響？

①$a_1 < x_1 < a_2$，此時數列為$a_1, x_1, x_1, x_1, x_1, a_2, a_3$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{6a_2 - a_1 - a_3}{4}$$

$$\Rightarrow a_1 < \frac{6a_2 - a_1 - a_3}{4} \Rightarrow 4a_1 < 6a_2 - a_1 - a_3 \Rightarrow 5a_1 < 6a_2 - a_3 \Rightarrow a_3 - a_2 < 5(a_2 - a_1)$$

綜合(1)和 ①的結果，我們得知當數列間的差距在$a_3 - a_2 < 5(a_2 - a_1)$的情況下，數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \frac{6a_2 - a_1 - a_3}{4} = x_1$。

②$x_1 = a_1$，此時數列為$a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_3$

同理可知，當數列間的差距在$a_3 - a_2 = 5(a_2 - a_1)$的情況下，數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \frac{6a_2 - a_1 - a_3}{4} = a_1 = x_1$。

③$x_1 < a_1$，此時數列為$x_1, x_1, x_1, x_1, a_1, a_2, a_3$

同理，當$a_3 - a_2 > 5(a_2 - a_1)$的情況下，數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \frac{6a_2 - a_1 - a_3}{4} = x_1$。

研究 1-1-3、N=6，原數列為$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$之情形

發現原數列a_1，a_2，a_3，在每一次加入 6 個相同數下，當數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等為 1 次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為 3 次穩定，且穩定值為x_1，與每一次加入 4 個相同數的結果一致。

說明

1. 原數列$a_1, a_2, a_3 (a_1 = a_2 < a_3)$

   數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{7a - a_3}{6} = x_1$。

2. 原數列$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，且$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

   數列為1次穩定，且穩定值$Q_1 = a_2 = \mathrm{m}_0$。

3. 原數列$a_1, a_2, a_3 (a_1 < a_2 < a_3)$，且$a_3 - a_2 > a_2 - a_1$

(1) 若$a_3 - a_2 < 7(a_2 - a_1)$，則$a_1 < x_1 < a_2$

   數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{8a_2 - a_1 - a_3}{6} = x_1$。

(2) 若$a_3 - a_2 = 7(a_2 - a_1)$，則$x_1 = a_1$

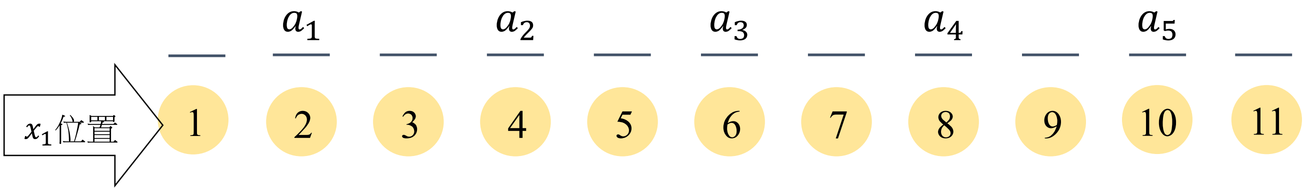
   數列為3次穩定，穩定值$Q_3 = a_1 = x_1$。

(3) 若$a_3 - a_2 > 7(a_2 - a_1)$，則$x_1 < a_1$

   數列為 3 次穩定，且穩定值$Q_3 = \dfrac{8a_2 - a_1 - a_3}{6} = x_1$。

研究 1-2-1、N=2，原數列為$\boldsymbol{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}$之情形

發現原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 2 個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1、x_2的位置，穩定值受到x_1、x_2、x_3的影響。



1. 若$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) = (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$，則$x_1 = a_3$，即$x_1$落在 ⑥，數列為 1 次穩定，穩定值$Q_1 = x_1$。

2. 若$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)\neq(a_5-a_4)+2(a_4-a_3)$，則$x_1$落在的位置可能為 ①②③④⑤⑦⑧⑨⑩⑪，共 10 種可能。

(1) 若x_1落在 ④⑤⑦⑧，則$\mathrm{m}_1=x_1$

由性質二可知$\mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1=x_1$，再根據性質三，求得數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3=x_1$。

(2) 若x_1落在 ②③⑨⑩，則$\mathrm{m}_1=a_2$或$\mathrm{m}_1=a_4$。

由性質二可知，x_2落在的位置可能為 ①②③⑨⑩⑪，共 6 種可能。

i. 當x_2落在 ②③⑨⑩，則由性質二可知$\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2=x_1$或$x_2$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4=x_1$或x_2。

ii. 當x_2落在 ①⑪，則由性質二可知$\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2=x_1$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4=x_1$。

(3) 若x_1落在 ①⑪，則$\mathrm{m}_1=a_2$或$\mathrm{m}_1=a_4$。

由性質二可知，x_2落在的位置可能為 ①②③⑨⑩⑪，共 6 種可能。

i. 當x_2落在 ②③⑨⑩，則由性質二可知$\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2=x_2$，再根據性質三，求得數列為 3+1=4 次穩定，且穩定值$Q_4=x_2$。

ii. 當x_2落在 ①⑪，則$\mathrm{m}_2=a_1$或$\mathrm{m}_2=a_5$。此時，x_3會有兩種可能：

當$x_3>x_2$或$x_3<x_2$，則由性質二可知$\mathrm{m}_4=\mathrm{m}_3=x_1$或$x_2$，再根據性質三，求得數列為 4+1=5 次穩定，且穩定值$Q_5=x_1$或x_2。

當$a_5<x_3\leq x_2$或$x_2\leq x_3<a_1$，則由性質二可知$\mathrm{m}_4=\mathrm{m}_3=x_3$，再根據性質三，求得數列為 4+1=5 次穩定，且穩定值$Q_5=x_3$。

說明

我們更進一步嘗試將原數列個數延伸至五數，探討原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5時，在每一次固定加入 2、4，甚至是 6 個以上的相同數後，數列的穩定情形是否也存在一定的規則？

然而，當原數列為五個數時，數列間的差距大小及原數列的分類狀況相較於原數列三個數更顯複雜，其所需討論的情況高達上千種。礙於篇幅的關係，我們依據原數列相同數字個數（原數列 4 個數相同、3 個數相同、2 組 2 個數相同、2 個數相同及原數列 5 數皆不相同），對原數列所有可能情況進行分類，並透過原數列中位數與左、右兩邊數字差距和之關係及性

質一至性質三，來推得數列穩定次數及穩定條件如下：

1. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為一次穩定(原數列中位數與左、右兩邊數字差距和相等)

(1) $a_2=a_3=a_4=a$時，即原數列為a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a-a_1=a_5-a$

(2) $a_2=a_3=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a-a_1=2(b-a)$

(3) $a_1=a_2=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3-a=b-a_3$

(4) $a_3=a_4=a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)=a_5-a$

(5) $a_4=a_5=a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)=2(a-a_3)$

(6) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)=(a_5-a_4)+2(a_4-a_3)$

2. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為二次穩定($\mathrm{m}_1=\mathrm{m}_0$)

(1) $a_2=a_3=a_4=a_5=a$時，即原數列a_1,a,a,a,a

(2) $a_1=a_2=a$，$a_3=a_4=a_5=b$時，即原數列a,a,b,b,b

(3) $a_3=a_4=a_5=a$時，即原數列a_1,a_2,a,a,a

(4) $a_2=a_3=a_4=a$時，即原數列a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a-a_1\neq a_5-a$

(5) $a_2=a_3=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a-a_1<2(b-a)$

(6) $a_3=a_4=a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)>a_5-a$

3. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為三次穩定($\mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1$)

(1) $a_2=a_3=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a-a_1>2(b-a)$

(2) $a_1=a_2=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3-a\neq b-a_3$

(3) $a_3=a_4=a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)<a_5-a$且$a_2\leq x_1<a$

(4) $a_4=a_5=a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)\neq 2(a-a_3)$且①$a_2\leq x_1<a_3$或②$a_3<x_1\leq a$

(5) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)\neq(a_5-a_4)+2(a_4-a_3)$且①$a_2\leq x_1<a_3$或②$a_3<x_1\leq a_4$

4. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為四次穩定($\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2$)

(1) $a_3=a_4=a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)<a_5-a$且①$x_1<a_1$，$a_1\leq x_2<a_2$或②$a_1\leq x_1<a_2$

(2) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) < 2(a - a_3)$

且①$x_1 < a_1$，$a_1 \le x_2 < a_2$或②$a_1 \le x_1 < a_2$

(3) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$且

①$x_1 < a_1$，$a_1 \le x_2 < a_2$或②$a_1 \le x_1 < a_2$或③$x_1 > a_5$，$a_4 < x_2 \le a_5$或④$a_4 < x_1 \le a_5$

5. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為五次穩定($\mathrm{m}_4 = \mathrm{m}_3$)

(1) $a_3 = a_4 = a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) < a_5 - a$且

$x_1 < a_1$，$x_2 < a_1$

(2) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) < 2(a - a_3)$

且$x_1 < a_1$，$x_2 < a_1$

(3) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$且

①$x_1 < a_1$，$x_2 < a_1$或②$x_1 > a_5$，$x_2 > a_5$

6. 我們以原數列a_1,a_2,a,a,a_5此型態為例，說明在不同條件下，數列穩定次數介於 1~5 次，並求得數列的穩定值。

例一 1 次穩定之條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) = a_5 - a$

以原數列1,4,6,6,13，$\mathrm{m}_0 = 6$為例。

$\because (4-1) + 2(6-4) = 7 = 13 - 6$

$\therefore$由研究 2-1 結果可知，原數列1,4,6,6,13為 1 次穩定，且穩定值$Q_1 = 6$。

例二 2 次穩定之條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) > a_5 - a$

以原數列1,3,8,8,12，$\mathrm{m}_0 = 8$為例。

$\because (3-1) + 2(8-3) > 12 - 8$

$\therefore$由性質二可知$\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_0 = 8$，再根據性質三，求得原數列1,3,8,8,12為 2 次穩定，且穩定值$Q_2 = 8$。

例三 3 次穩定之條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) < a_5 - a$且$a_2 \le x_1 < a$

以原數列1,4,6,6,15，$\mathrm{m}_0 = 6$為例。

$\because (4-1) + 2(6-4) < 15 - 6$，$\therefore$由性質二可知$x_1 < 6$

根據$M_1=\mathrm{m}_0$之運算規則$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}[7\times 6-(1+4+6+6+15)]=5$

將數列由小到大排列 1，4，5，5，6，6，15，此時$\mathrm{m}_1=5$。

由性質二可知$\mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1=5$，再根據性質三，求得原數列1,4,6,6,15為 3 次穩定，且穩定值$Q_3=5$。

例四 4 次穩定之條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)<a_5-a$且 ①$x_1<a_1$，$a_1\le x_2<a_2$或

②$a_1\le x_1<a_2$

(1) 以原數列1,9,11,11,61，$\mathrm{m}_0=11$為例

$\because (9-1)+2(11-9)<61-11$，$\therefore$由性質二可知$x_1<11$

根據$M_1=\mathrm{m}_0$之運算規則$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}[7\times 11-(1+9+11+11+61)]=-8$

將數列由小到大排列-8，-8，1，9，11，11，61，此時$\mathrm{m}_1=9$。

根據$M_2=\mathrm{m}_1$之運算規則$\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}[9\times 9-(-8-8+1+9+11+11+61)]=2$

將數列由小到大排列-8，-8，1，2，2，9，11，11，61，此時$\mathrm{m}_2=2$。

由性質二可知$\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2=2$，再根據性質三，求得原數列1,9,11,11,61為 4 次穩定，且穩定值$Q_4=2$。

(2) 以原數列1,3,5,5,19，$\mathrm{m}_0=5$為例

$\because (3-1)+2(5-3)<19-5$，$\therefore$由性質二可知$x_1<5$

根據$M_1=\mathrm{m}_0$之運算規則$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}[7\times 5-(1+3+5+5+19)]=1$

將數列由小到大排列1，1，1，3，5，5，19，此時$\mathrm{m}_1=3$。

根據$M_2=\mathrm{m}_1$之運算規則$\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}[9\times 3-(1+1+1+3+5+5+19)]=-4$

將數列由小到大排列-4，-4，1，1，1，3，5，5，19，此時$\mathrm{m}_2=1$。

由性質二可知$\mathrm{m}_3=\mathrm{m}_2=1$，再根據性質三，求得原數列1,3,5,5,19為 4 次穩定，且穩定值$Q_4=1$。

例五 5 次穩定之條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)<a_5-a$且$x_1<a_1$，$x_2<a_1$

以原數列1,3,7,7,31，$\mathrm{m}_0=7$為例。

$\because (3-1)+2(7-3)<31-7$，$\therefore$由性質二可知$x_1<7$

根據$M_1=\mathrm{m}_0$之運算規則$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}[7\times 7-(1+3+7+7+31)]=0$

將數列由小到大排列0，0，1，3，7，7，31，此時$\mathrm{m}_1=3$。

根據$M_2=\mathrm{m}_1$之運算規則$\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}[9\times 3-(1+3+7+7+31)]=-11$

將數列由小到大排列-11，-11，0，0，1，3，5，5，19，此時$\mathrm{m}_2=1$。

由性質二可知$\mathrm{m}_4=\mathrm{m}_3=0$，再根據性質三，求得原數列1,3,7,7,31為 5 次穩定，且穩定值$Q_5=0$。

研究 1-2-2、N=4，原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5之情形

發現原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 4 個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1的位置，穩定值受到x_1、x_2的影響。

說明

透過原數列中位數與左、右兩邊數字差距和之關係及性質一至性質三，推得原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 4 個相同數下，數列穩定次數則介於 1~4 次間。我們將結果整理如下：

1. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為一次穩定(原數列中位數與左、右兩邊數字差距和相等)
   (1) $a_2=a_3=a_4=a$時，即原數列為a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a-a_1=a_5-a$
   (2) $a_2=a_3=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a-a_1=2(b-a)$
   (3) $a_1=a_2=a$，$a_4=a_5=b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3-a=b-a_3$
   (4) $a_3=a_4=a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a-a_2)=a_5-a$
   (5) $a_4=a_5=a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)=2(a-a_3)$
   (6) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)=(a_5-a_4)+2(a_4-a_3)$
2. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為二次穩定($\mathrm{m}_1=\mathrm{m}_0$)
   (1) $a_2=a_3=a_4=a_5=a$時，即原數列a_1,a,a,a,a
   (2) $a_3=a_4=a_5=a$時，即原數列a_1,a_2,a,a,a
   (3) $a_1=a_2=a$，$a_3=a_4=a_5=b$時，即原數列a,a,b,b,b

3. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為三次穩定($\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1$)

(1) $a_2 = a_3 = a_4 = a$時，即原數列a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a - a_1 \neq a_5 - a$且 ①$a_1 \leq x_1 < a$ 或 ②$a < x_1 \leq a_5$

(2) $a_2 = a_3 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a - a_1 \neq 2(b - a)$且 ①$a_1 \leq x_1 < a$或②$a < x_1 \leq b$

(3) $a_1 = a_2 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3 - a \neq b - a_3$且 ①$a \leq x_1 < a_3$或②$a_3 < x_1 \leq b$

(4) $a_3 = a_4 = a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) \neq a_5 - a$且 ①$a_1 \leq x_1 < a$或②$a < x_1 \leq a_5$

(5) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq 2(a - a_3)$ 且①$a_1 \leq x_1 < a_3$或 ②$a_3 < x_1 \leq a$

(6) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$且 ①$a_1 \leq x_1 < a_3$或②$a_3 < x_1 \leq a_5$

4. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為四次穩定($\mathrm{m}_3 = \mathrm{m}_2$)

(1) $a_2 = a_3 = a_4 = a$時，即原數列a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a - a_1 \neq a_5 - a$且①$x_1 < a_1$，或 ②$x_1 > a_5$

(2) $a_2 = a_3 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a - a_1 \neq 2(b - a)$且 ①$x_1 < a_1$或 ②$x_1 > b$

(3) $a_1 = a_2 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3 - a \neq b - a_3$且 ①$x_1 < a$或 ②$x_1 > b$

(4) $a_3 = a_4 = a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) \neq a_5 - a$且 ①$x_1 < a_1$或②$x_1 > a_5$

(5) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq 2(a - a_3)$ 且①$x_1 < a_1$或②$x_1 > a$

(6) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$且 ①$x_1 < a_1$或②$x_1 > a_5$

研究 1-2-3、N=6，原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5之情形

發現 當原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 N 個相同數(N=6)下，若中位數與左、右兩邊數字差距和相等時，數列必為 1 次穩定，且穩定值為m_0；若中位數與左、右兩邊數字差距和不相等時，數列必為 3 次穩定，且穩定值為x_1。

說明

當原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 N 個相同數(N=6)下，由於加入的數字個數夠多，不管x_1落在哪個範圍，我們透過數列的排列情形，可以得知$\mathrm{m}_1 = x_1$，如下圖 4-5 所示。故不管原始數列的類型為何，數列的穩定次數均落在 1 次或 3 次。我們將各分類情形的穩定次數整理如下：

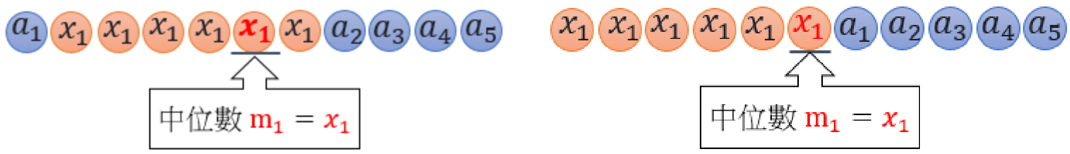


圖 4-5 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5第一次加入 6 個相同數後的新數列中位數

1. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為一次穩定(原數列中位數與左、右兩邊數字差距和相等)
   (1) $a_2 = a_3 = a_4 = a$時，即原數列為a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a - a_1 = a_5 - a$
   (2) $a_2 = a_3 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a - a_1 = 2(b - a)$
   (3) $a_1 = a_2 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3 - a = b - a_3$
   (4) $a_3 = a_4 = a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) = a_5 - a$
   (5) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) = 2(a - a_3)$
   (6) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) = (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$
2. 數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為三次穩定($\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1$)
   (1) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a$時，即原數列$a_1$,$a$,$a$,$a$,$a$
   (2) $a_3 = a_4 = a_5 = a$時，即原數列a_1,a_2,a,a,a
   (3) $a_1 = a_2 = a$，$a_3 = a_4 = a_5 = b$時，即原數列a,a,b,b,b
   (4) $a_2 = a_3 = a_4 = a$時，即原數列a_1,a,a,a,a_5，穩定條件為$a - a_1 \neq a_5 - a$
   (5) $a_2 = a_3 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a_1,a,a,b,b，穩定條件為$a - a_1 \neq 2(b - a)$
   (6) $a_1 = a_2 = a$，$a_4 = a_5 = b$時，即原數列為a,a,a_3,b,b，穩定條件為$a_3 - a \neq b - a_3$

(7) $a_3 = a_4 = a$，即原數列為a_1,a_2,a,a,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a - a_2) \neq a_5 - a$

(8) $a_4 = a_5 = a$，即原數列為a_1,a_2,a_3,a,a，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq 2(a - a_3)$

(9) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，穩定條件為$(a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) \neq (a_5 - a_4) + 2(a_4 - a_3)$

(二)原數列為$2k+1$項，一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數與 N 之關聯

發現一 若 N 為偶數且 N<2k+1，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{N}\right]$+3。([ ]為高斯符號)

發現二 若 N＞2k+1，則數列穩定次數必為 1 次或 3 次。

說明一 若 N 為偶數且 N<2k+1，我們分成下列幾種情況討論：

1. 若 N=2，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{2}\right]$+3=k+3

(1) 原數列中位數左、右兩側數字和相等

由性質一得知，數列穩定次數 1 次為最少次穩定，且穩定值為m_0。

(2) 當原數列中位數與左邊數字差距和小於右邊差距和

由性質二可知中位數向左單調遞減。最初原數列中位數左邊有 k 個數字，每加入一組數字後會使新中位數向左移動$\frac{N}{2} = 1$個數字。

若加入的前 k 組相同數字存在$x_1 < a_1$，$x_2 < a_1$，...，$x_k < a_1$的情況，則可以推得$m_{k+1} = m_{k+2} = x_i$，$i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$，故由性質三得知，數列穩定次數(k+2)+1=k+3 次為最多次穩定。

2. 若 N=4，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{4}\right]$+3=$\left[\frac{k}{2}\right]$+3

3. 若 N=6，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{6}\right]$+3=$\left[\frac{k}{3}\right]$+3

4. 若 N=2k，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{N}\right]$+3

若原數列中位數與左邊數字差距和小於右邊差距和，由性質二可知中位數向左單調遞減。每一次加入偶數 N 個相同數字，會使中位數向左移動$\frac{N}{2}$個數字，原始數列在m_0左邊有 k 個數字，因此最多經過$\left[\frac{2k}{N}\right]+1$次就會讓中位數碰到相同數字的其中一個，換句話說，

$\mathrm{m}_{\left[\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{N}}\right]+1} = \mathrm{m}_{\left[\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{N}}\right]+2} = x_i$，$i \in \{1,2,3,\dots,\left[\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{N}}\right],\left[\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{N}}\right]+1\}$，故由性質三可知，數列最多$\left[\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{N}}\right]$+3 次可達到穩定。

$\boxed{\text{說明二}}$若 N＞2k+1，則數列可分為下列兩種情形：

1. 數列為一次穩定，且穩定值為m_0

   在原數列為 2k+1 個數下，$\mathrm{m}_0 = a_{\frac{2k+2}{2}} = a_{k+1}$。若原數列中位數與左邊數字差距和等於右邊差距和，則依據$M_{k+1} = \mathrm{m}_k$的運算規則，我們可求得第一組加入的數字x_1為:

$$x_1 = \frac{1}{\mathrm{N}}\left[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0 - \sum_{i=1}^{2k+1} a_i\right] = \frac{1}{\mathrm{N}}\left[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0 - \sum_{i=1}^{2k+1}(a_i - \mathrm{m}_0) - (2k+1)\mathrm{m}_0\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0 - 0 - (2k+1)\mathrm{m}_0] = \frac{1}{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{N}\mathrm{m}_0 = \mathrm{m}_0$$

   故數列穩定次數為 1 次，且穩定值為m_0。

2. 數列為三次穩定，且穩定值為x_1

   若原數列中位數與左邊數字差距和小於右邊差距和，則由性質二可知中位數向左單調遞減。此時，原數列中位數左邊有 k 個數字，加入第 1 組數字後會使中位數向左移動$\frac{\mathrm{N}}{2}\ (\frac{\mathrm{N}}{2} > k)$個數字，則$\mathrm{m}_1 = x_1$。再加入第二組相同數字$x_2$後，使得$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_1 = x_1$，故數列穩定次數為 3 次，且穩定值為$x_1$。同理可證，當原數列中位數與左邊數字差距和大於右邊差距和時，則數列穩定次數亦為 3 次，且穩定值為x_1。

伍、研究結果

一、原數列為 2k+1 項，一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律

(一) 原數列a_1，a_2，a_3每一次加入 2 個相同數

數列的穩定次數取決於x_1的位置，故穩定次數介於 1~4 次，穩定值受到x_1、x_2的影響。

原數列三個數	n次穩定	穩定值
存在兩數相同($a_1 = a_2 < a_3$)	2	a_1
差距相等($a_2 - a_1 = a_3 - a_2$)	1	a_2

差距不相等 $a_2-a_1<a_3-a_2$	【情況一】 $a_1<x_1<a_2$	$a_3-a_2<3(a_2-a_1)$	3	$\frac{4a_2-a_1-a_3}{2}$
	【情況二】 $x_1=a_1$	$a_3-a_2=3(a_2-a_1)$	3	a_1、
	【情況三】 $x_1<a_1$	$3(a_2-a_1)<a_3-a_2\le 8(a_2-a_1)$	4	$\frac{7a_1-5a_2}{2}$
		$a_3-a_2>8(a_2-a_1)$		$\frac{4a_2-a_1-a_3}{2}$

(二) 原數列a_1，a_2，a_3每一次加入$\mathrm{N}\ge 4$個相同數

原數列三個數			n次穩定	穩定值
存在兩數相同($a_1=a_2<a_3$)			3	$\frac{(\mathrm{N}+1)a_2-a_3}{\mathrm{N}}$
差距相等($a_2-a_1=a_3-a_2$)			1	a_2
差距不相等 $a_2-a_1<a_3-a_2$	【情況一】 $a_1<x_1<a_2$	$a_3-a_2<(\mathrm{N}+1)(a_2-a_1)$	3	$\frac{(\mathrm{N}+2)a_2-a_1-a_3}{\mathrm{N}}$
	【情況二】 $x_1=a_1$	$a_3-a_2=(\mathrm{N}+1)(a_2-a_1)$		a_1
	【情況三】 $x_1<a_1$	$a_3-a_2>(\mathrm{N}+1)(a_2-a_1)$		$\frac{(\mathrm{N}+2)a_2-a_1-a_3}{\mathrm{N}}$

(三) 原數列a_1，a_2，a_3，a_4，a_5每一次加入 2 個相同數

數列的穩定次數取決於x_1、x_2的位置，故穩定次數介於 1~5 次，穩定值受到x_1、x_2、x_3的影響。

(四) 原數列a_1，a_2，a_3，a_4，a_5每一次加入 4 個相同數

數列的穩定次數取決於x_1的位置，故穩定次數介於 1~4 次，穩定值受到x_1、x_2的影響。

(五) 原數列a_1，a_2，a_3，a_4，a_5每一次加入$\mathrm{N}\ge 6$個相同數

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等時，數列必為 1 次穩定，穩定值=m_0。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等時，數列必為 3 次穩定，穩定值受到x_1的影響。

(六) 原數列 2k+1 項，一次加入偶數 N（N<2k+1）個相同數

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等時，數列必為 1 次穩定。

2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等時，數列的穩定次數取決於$x_1 \sim x_{\left[\frac{2k}{N}\right]}$的位置，穩定值受到$x_1 \sim x_{\left[\frac{2k}{N}\right]+1}$的影響。

二、原數列為 2k+1 項，一次加入偶數 N 個相同數，數列的穩定次數與 N 之關聯

(一) 每一次加入偶數 N（N<2k+1）個相同數，則 1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{N}\right]+3$。

(二) 每一次加入 N（N>2k+1）個相同數

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則數列必為 1 次穩定，穩定值=m_0（原數列的中位數）。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等，則數列必為 3 次穩定，穩定值=x_1（依照$M_{k+1}=\mathrm{m}_k$運算規則求得的第一組數字）。

陸、討論

一、探討每一次加入奇數個相同數對原數列a_1，a_2，a_3為起始的 M&m 數列穩定狀態之影響

(一)每一次加入 3 個相同數

原數列每一次加入 3 個相同數時，仍然存在數列為偶數項時，中位數是正中間兩數之平均為虛擬數值的情形，造成部分規律性不明確。但相較於 Shultz 和 Shiflett(2005)及臺灣 2008 年國際科展作品《M&m Sequences 之研究》，兩篇文獻每一次加入 1 數，僅在$\frac{325}{341} \le \frac{a_2-a_1}{a_3-a_2} <1$，數列固定為 70 次穩定的結果，本研究發現若$\frac{1}{4} \le \frac{a_2-a_1}{a_3-a_2} <1$，則數列必為 3 次穩定。不僅擴大數列能達固定穩定次數的範圍外，更大幅提升數列的穩定速度。

說明

由研究 1-1-1 至 1-1-3 中對原數列a_1，a_2，a_3每一次加入 2、4 或 6 個相同數時，確實能有效加快數列的穩定速度並找到數列的穩定規則。然而我們不禁好奇，若改以每一次加入 3、5 或 7 個以上奇數個相同數時，是否也能加快數列的穩定速度並找出數列的穩定規則呢？於是我們對原數列a_1，a_2，a_3每一次加入 3 個相同數時，M&m Sequences 的穩定情形做更進一步探討。

經過多次反覆的觀察及數據分析，我們發現 $x \ge \frac{5}{3}$時，由$(-x,1,x)$起始所形成的 M&m 數列，

一定會收斂在$\frac{5}{3}$且數列為 3 次穩定。以本研究從原數列三數間差距比值的觀點來看，即$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}=\frac{x-1}{1+x}=\frac{\frac{5}{3}-1}{1+\frac{5}{3}}=\frac{1}{4}$，發現在$\frac{1}{4}\leq\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}<1$ 範圍中，數列必為 3 次穩定，且穩定值為$\frac{5}{3}$。對此結果我們將說明整理如下：

考慮原數列a_1,a_2,a_3，其中$a_3-a_2>a_2-a_1$。

若$\frac{1}{4}\leq\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}<1$，則$a_2-a_1<a_3-a_2\leq 4(a_2-a_1)$

$$x_1=\frac{1}{3}(6a_2-a_1-a_2-a_3)=\frac{5a_2-a_1-a_3}{3}=\frac{3a_2+(a_2-a_1)-(a_3-a_2)}{3}<a_2$$

$$\because x_1-a_1=\frac{5a_2-4a_1-a_3}{3}=\frac{4(a_2-a_1)-(a_3-a_2)}{3}\geq 0,\quad \therefore x_1\geq a_1$$

我們分成兩種情況討論：

1. $a_1<x_1<a_2$，此時數列為a_1,x_1,x_1,x_1,a_2,a_3

   由性質二可知$x_2<\mathrm{m}_1=x_1$

   $\because \mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1=x_1$ ∴由性質三可知數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3=\mathrm{m}_2=x_1$。

2. $x_1=a_1$，此時數列為a_1,a_1,a_1,a_1,a_2,a_3

   同理，$\because x_2<\mathrm{m}_1=a_1$，$\therefore \mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1=a_1$。故數列為 2+1=3 次穩定，且穩定值$Q_3=\mathrm{m}_2=x_1$。

(二)每一次加 5 個相同數

由研究 1-1-2 的結果可知，當**<u>每一次加入的相同數字個數>原數列個數</u>**時，若數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等，則數列為 1 次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為 3 次穩定，且穩定值為x_1。

說明

有別於每一次加入 3 個相同數，仍受到有一半中位數源自於兩數相加除 2，所造成部分規律性不明確。當第一次加入 5 個相同數x_1時，由於加入的數字個數夠多，不管x_1落在哪個範圍，我們透過數列的排列情形，得知$\mathrm{m}_1=x_1$確實存在於數列中，如下圖 6-1 所示，改善了數列為偶數項時，中位數是正中間兩數之平均為虛擬數值的情形。所以由研究 1-1-2 的結果可得知，若數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等，則數列為 1 次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為 3 次穩定，且穩定值為x_1。

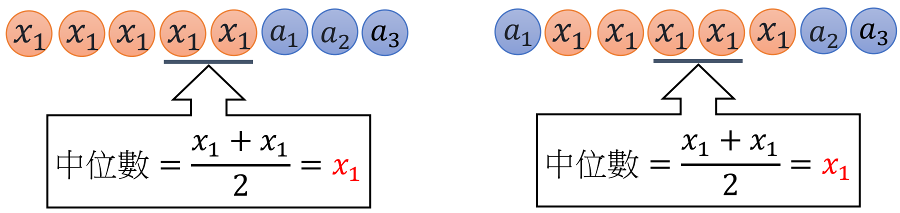


圖 6-1 原數列a_1,a_2,a_3第一次加入 5 個相同數後的新數列中位數

二、探討原數列a_1,a_2,a_3,a_4為起始的 M&m 數列之穩定性

在原數列為偶數項時，我們亦想探討如何加快數列的穩定速度。於是我們先加入 1 個數使數列成為 5 項，爾後以每一次固定加入 2、4 或 6 等偶數個相同數的方式，讓數列保持為奇數項，再藉由原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為起始的 M&m 數列之研究結果，求得**原數列 4 數的穩定次數=原數列 5 數的穩定次數+1**。

舉例

以原數列$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 12$，$\mathrm{m}_0 = 7$為例。首先加入 1 數，爾後則每一次固定加入 2 個相同數為例，根據$M_{k+1} = \mathrm{m}_k$之運算規則，我們可以求得各次加入的相同數字：

$x_1 = 5 \times 7 - (3 + 5 + 9 + 12) = \mathbf{6}$，數列由小到大排列 3，5，**6**，9，12，$\mathrm{m}_1 = 6$

$x_2 = \frac{1}{2}[7 \times 6 - (3 + 5 + 6 + 9 + 12)] = \frac{7}{2}$，數列由小到大排列 3，$\frac{7}{2}$，$\frac{7}{2}$，5，**6**，9，12，$\mathrm{m}_2 = 5$

由性質二可知$\mathrm{m}_4 = \mathrm{m}_3 = \frac{7}{2}$，再根據性質三得數列為 4+1=5 次穩定。

對照到原數列五數 3,5,6,9,12，每一次加入 2 個相同數的情況。因為$3 \le x_1 = \frac{7}{2} < 5$，由研究 1-2-1 可知，數列為 4 次穩定。我們發現原數列 4 數的穩定次數=原數列 5 數的穩定次數+1。

若以原數列$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 12$，$\mathrm{m}_0 = 7$為例。首先加入 1 數，爾後則每一次固定加入 4 個相同數為例，根據$M_{k+1} = \mathrm{m}_k$之運算規則，我們可以求得各次加入的相同數字：

$x_1 = 5 \times 7 - (3 + 5 + 9 + 12) = \mathbf{6}$，數列由小到大排列 3，5，**6**，9，12

此時，我們從研究 1-2-2 結果可知，原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入 4 個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1的位置，也就是說，我們可藉由原數列四數所加入x_2之位置，來求得數列的穩定次數。

$x_2 = \frac{1}{4}[9 \times 6 - (3 + 5 + 6 + 9 + 12)] = \frac{19}{4}$，數列由小到大排列 3，$\frac{19}{4}$，$\frac{19}{4}$，$\frac{19}{4}$，$\frac{19}{4}$，5，**6**，9，12

由性質二可知$m_3 = m_2 = \frac{19}{4}$，再根據性質三得數列為 3+1=4 次穩定。

對照到原數列五數 3,5,6,9,12，每一次加入 4 個相同數的情況。因為$3 \leq x_1 = \frac{19}{4} < 6$，由研究 1-2-2 可知，數列為 3 次穩定。同樣的，我們發現原數列 4 數的穩定次數=原數列 5 數的穩定次數+1。

三、**探討 M&m 數列在每一次分別加入 1 到 6 個相同數時，數列中位數的變化情況**

藉由 Excel 的製圖功能，做原數列 1,2,14 每一次分別加入 1 至 6 個相同數時的中位數變化的折線圖，其中橫軸代表中位數所在的項數，縱軸代表中位數的值，如下圖 6-2 至 6-7 所示。觀察數列中位數的變化情形，我們可以發現：

1. 每一次加入的數字個數≤原始數列個數

每一次加入 1 或 3 個相同數時，因受限於有一半中位數源自於數列正中間兩數相加除 2，可能產生虛擬數值的情形，造成數列規律性不明確，數列中位數向左單調遞減，直到數列達到穩定，如下圖 6-2 和圖 6-4 所示。然而本研究改以每一次加入 2 個相同數，使數列保持為奇數項，由下圖 6-3，可以發現數列中位數快速達到一致，有效加快數列的穩定速度。

2. 每一次加入的數字個數>原始數列個數

由於每一次加入的數字個數夠多，不管x_1落在原數列的哪個範圍，我們可以得知$m_2 = m_1 = x_1$，如下圖 6-5 至 6-7 所示，故數列皆為 3 次穩定。

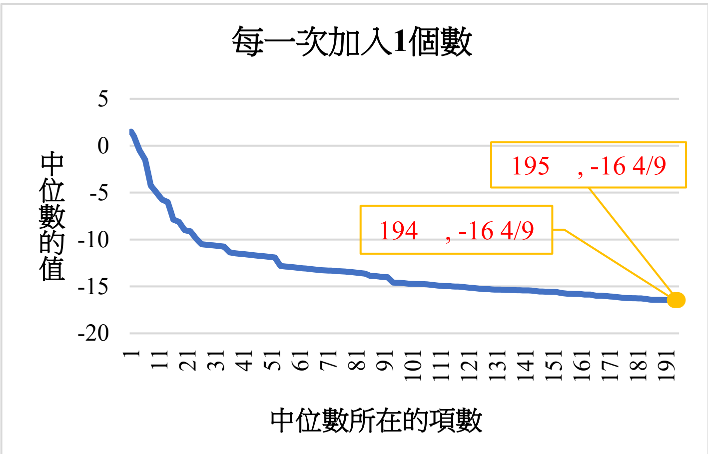


圖 6-2

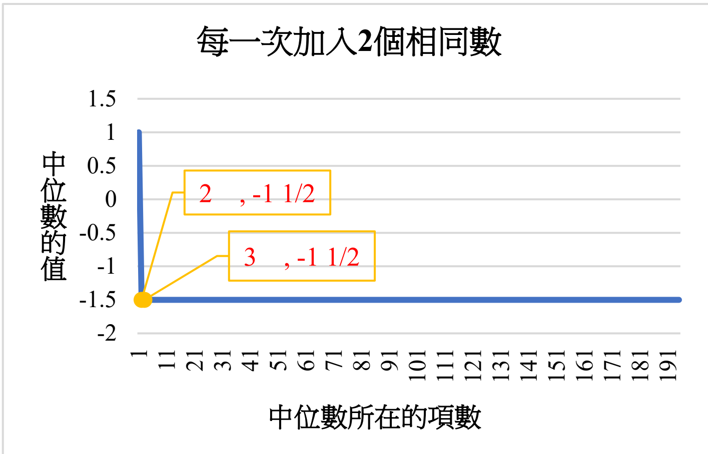


圖 6-3

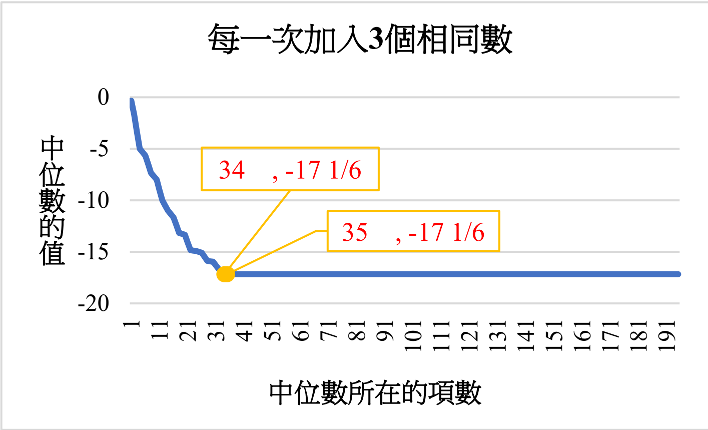


圖 6-4

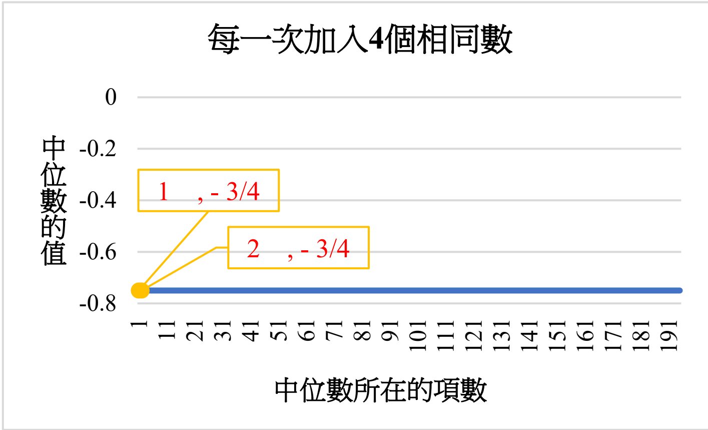


圖 6-5

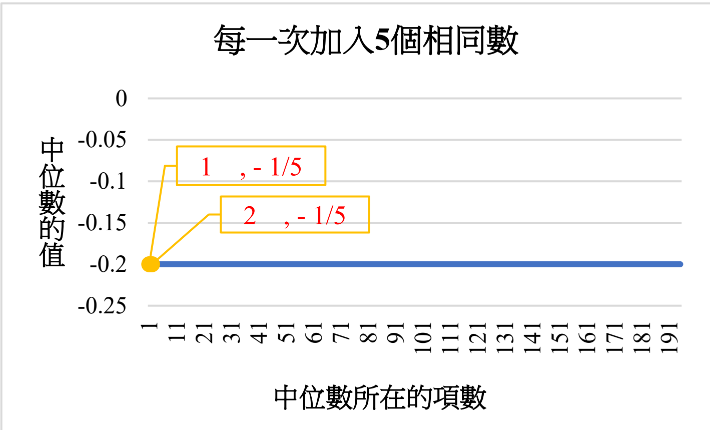


圖 6-6

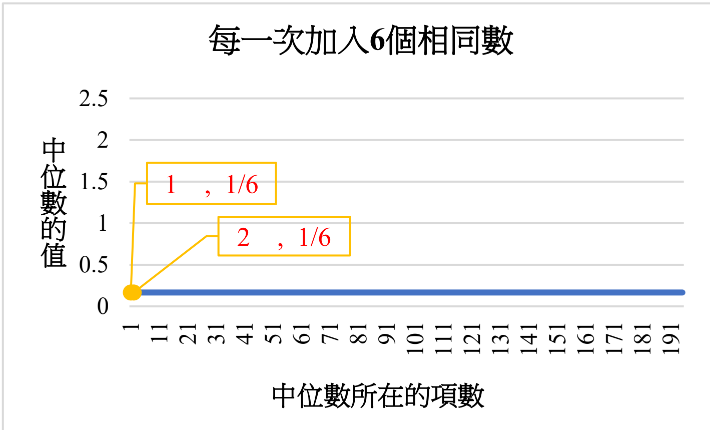


圖 6-7

四、探討文獻中 M&m 數列達到穩定時的分布情形

數字個數	數列數值	數列中位數
	1	
	2	
	15	2
1	-10	1 1/2
2	- 1/2	1
3	-1 1/2	1/4
4	-4 1/4	- 1/2
5	-5 3/4	-1
6	-5	-1 1/2
7	-6	-2 7/8
8	-16 5/8	-4 1/4
9	-19 3/8	-4 5/8
10	-9 1/8	-5
11	-9 7/8	-5 3/8
12	-10 5/8	-5 3/4
13	-11 3/8	-5 7/8
14	-7 7/8	-6
15	-8 1/8	-6 15/16
16	-23 13/16	-7 7/8
17	-25 11/16	-8
18	-10 1/2	-8 1/8
19	-10 3/4	-8 5/8
20	-19 5/8	-9 1/8
21	-20 5/8	-9 1/2
22	-18 1/2	-9 7/8
23	-19 1/4	-9 15/16
24	-11 9/16	-10
25	-11 11/16	-10 1/4
26	-17 1/4	-10 1/2
27	-17 3/4	-10 9/16
83	-32 3/32	-18 7/8
84	-24 1/4	-18 15/16
85	-24 3/8	-19
86	-24 1/2	-19 1/16
87	-24 5/8	-19 1/8
88	-24 3/4	-19 3/16
91	-22 5/32	-19 9/32
92	-22 7/32	-19 5/16
93	-22 9/32	-19 11/32
94	-22 11/32	-19 3/8
95	-22 13/32	-19 13/32
96	-22 15/32	-19 7/16
97	-22 17/32	-19 29/64
98	-21 1/64	-19 15/32
99	-21 3/64	-19 1/2
100	-22 11/16	-19 17/32
167	-32 207/256	-20 15/16
168	-22 119/128	-20 243/256
169	-22 61/64	-20 123/128
170	-22 125/128	-20 249/256
171	-23	-20 63/64
172	-23 3/128	-20 255/256
173	-23 3/64	-21 3/512
174	-22 371/512	-21 1/64
175	-22 381/512	-21 1/32
176	-23 13/16	-21 3/64
177	-23 27/32	-21 27/512
178	-22 55/512	-21 15/256
179	-22 61/512	-21 1/16
180	-21 99/128	-21 17/256
199	-27 125/512	-21 23/64
200	-22 19/128	-21 93/256
201	-22 5/32	-21 853/2048
202	-32 561/2048	-21 481/1024
203	-32 779/2048	-21 241/512
204	-21 43/64	-21 483/1024
205	-21 345/512	-21 1011/2048
206	-26 131/2048	-21 33/64
207	-26 221/2048	-21 17/32
208	-24 13/16	-21 35/64
209	-24 27/32	-21 579/1024
210	-25 511/1024	-21 299/512
276	-22 549/2048	-22 17/128
277	-22 551/2048	-22 273/2048
278	-22 553/2048	-22 137/1024
279	-22 555/2048	-22 275/2048
280	-22 557/2048	-22 69/512
281	-22 559/2048	-22 277/2048
282	-22 561/2048	-22 139/1024
283	-22 563/2048	-22 279/2048
284	-22 565/2048	-22 35/256
285	-22 567/2048	-22 73/512
286	-23 425/512	-22 19/128
287	-23 431/512	-22 39/256
288	-23 73/256	-22 5/32
289	-23 75/256	-22 5/32
290	-22 5/32	-22 5/32
291	-22 5/32	-22 5/32
292	-22 5/32	-22 5/32
293	-22 5/32	-22 5/32

表 6-1 原數列 1,2,15 每一次加入 1 個數之 M&m 數列

文獻中，對於任意起始三數的 M&m 數列最後都是否都會趨於穩定？我們先將原數列數字差距化為最簡比來看，若數列未穩定前中位數出現分數，分母必為2^n，使得加入數值小數位數增加的速度會遠低於數列增加的個數，再加上數列中位數的產生會以單調遞減(或遞增)型態緩慢往最終值收斂，使得穩定數列的中位數等於平均數。故我們的看法是，對於任意起始三數的 M&m 數列最後都會收斂，但因受限於數列穩定前有一半中位數源自於數列正中間兩數相加除 2，可能產生虛擬數值的情形，所以其收斂的特性並無簡單規則可尋。此看法與 Shultz 和 Shiflett(2005)，及臺灣 2008 年國際科展作品《M&m Sequences 之研究》兩篇文獻相同。

以原數列 1,2,15 為例，$m_1 \sim m_{84}$的變化為 $1\frac{1}{2} \sim -18\frac{15}{16}$、$m_{85} \sim m_{172}$的變化為 $-19 \sim -20\frac{255}{256}$、$m_{173} \sim m_{290}$的變化為 $-21\frac{3}{512} \sim -22\frac{5}{32}$。

將原數列 1,2,15 每一次加入 1 個數的 M&m 數列，透過 Excel 的函數計算公式求出每一次加入數列的值，如上表 6-1 所示。從 Excel 數據中得知$x_{290+\ell} = x_{290}$，$\forall \ell \in N$，故數列為 290 次穩定。而我們更進一步藉由 Excel 的製圖功能，將原數列 1,2,15 之 M&m 數列做次數分配，可以發現當數列達到穩定時，次數分配近似於左右對稱，如下圖 6-8 所示。

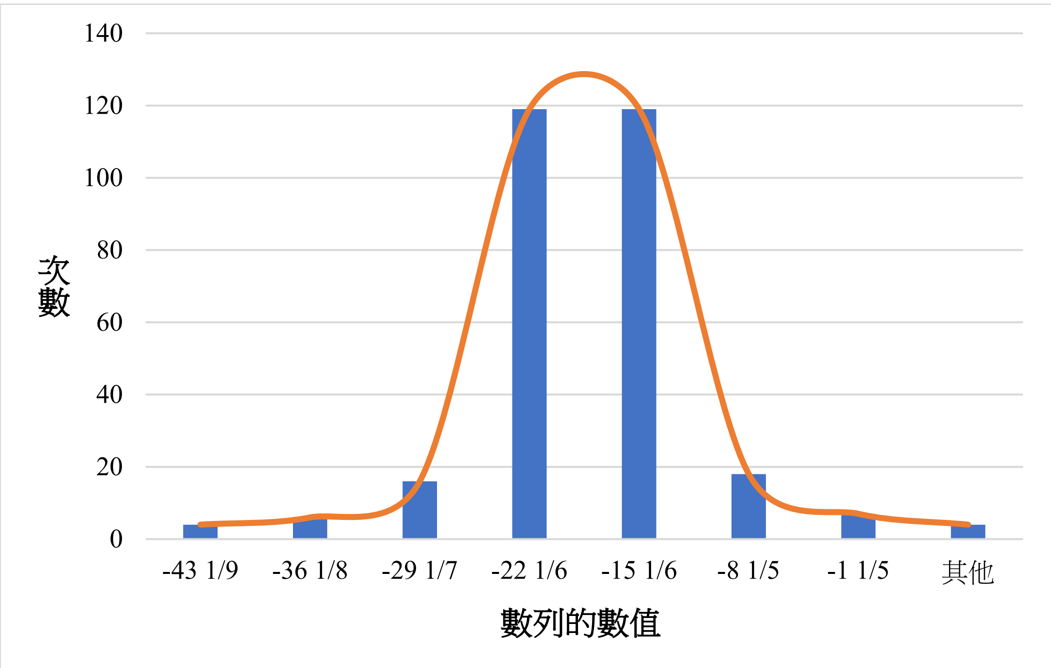


圖 6-8 原數列 1,2,15 每一次加入 1 個數之 M&m 數列次數分配圖

柒、結論

M&m 數列是一個概念簡單，但充滿挑戰性的數列，一開始在數列未穩定前，有一半的中位數m_q（q為偶數）是來自於兩數相加除以 2，雖然文獻[2]猜測數列最後皆會收斂到一定值，但在穩定性上卻不易有簡單、明確的規律。而本研究在不改變數列的運算規則下，改以每一次加入偶數個或更多個相同數的做法，並利用已知的原數列數字間的差距比例，來找出穩定次數及穩定值的數學規律性。當原數列為 2k+1 項，每一次加入 N 個相同數，我們得知：

一、若 N 為偶數（N<2k+1），1≤穩定次數≤$\left\lceil\frac{2k}{N}\right\rceil+3$，及穩定值的計算方式。

二、若 N>2k+1

1.中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則穩定次數=1，穩定值=m_0。

2.中位數與左、右兩邊數字差距和不相等，則穩定次數=3，穩定值=x_1。

利用本研究的做法，我們可以大幅加快 M&m 數列的穩定速度，並得出明確的穩定規則，這個發現是異於文獻[2][3]之地方；另外，本研究雖只討論加入偶數 N 之結果，但實際上，如本文第陸之討論處所述，對奇數 N，亦有類似的結果。此時，當$N=1$時，即退化到文獻[1][2][3]之結果。未來，擬進一步修習電腦程式與函數的泛函性質，建立計算穩定次數和穩定值的數學模式及相互之間的關係，以及探討由收斂到定值的 M&m 數列，所造出的映射之性質[5]。

捌、參考資料

1. 許志農 (2014)：動手玩數學專欄。**龍騰數亦優**，23，38。
2. H. S. Shultz and R. C. Shiflett (2005): M&m Sequences. *The College Mathematics Journal*, 36(3), 191-198.
3. 林子瑜 (2008)：M&m Sequences 之研究。臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會高中組第二名。
4. 均中求穩 (2016)：105 學年度台中市公私立中小學科學展覽會高中(職)組(C0111)佳作。
http://140.128.183.25/signup_cal.php?caltype=7
5. M. Chamberl and & M. Martelli (2007): The mean-median map. *Journal of Difference Equations and Applications*, 13(7), 577-583.

【評語】030402

考慮由長度為 2k+1 的數列開始，每次加入 n 個相同的數字，使得每次所得出的新數列的平均值都會是前一個數列的中位數這樣的數列建構過程，在第幾步才會達到穩定（從某一步之後所加入的數字均相同）的問題。問題非常的有趣。原始的問題是考慮每次加入 1 個數，探討數列是否會趨於穩定，如果會趨向穩定，需要增加多少項，但這個問題有一定的複雜度，趨於穩定的速度也很慢。作者們改變了變化規則，將每次增加 1 個數的規則改為一次加入偶數多個相同的數字，希望讓趨於穩定的速度加快。這個變形的問題確實也正如同作者們所預期的，很快就會趨於穩定。作者們針對起始數列長度為 3、每次增加 2 個、4 個、6 個數的各種情況都給出了完整的分析，對於起始數列長度為 2k+1 的一般化的情況也做了討論。作品研究成果詳細完整，文中部份研究結果亦涵蓋已知相關參考論文成果，值得嘉許。美中不足的是，說明過於繁複，作品中有許多的論述其實是可以用更一般化的性質來取代的，分為不同情況來表述讓作品看起來有些雜亂無章。針對一般化的狀況，是不是可以給出一些好的性質來簡化論述？如果能夠針對這一點將作品適當的改寫，應該會更好。

作品海報

摘要

本研究針對M&m數列在未穩定前有一半的中位數是來自於兩數相加除以2，致使數列在穩定性上不易有明確的規律，在不改變數列的運算規則下，我們改以每一次加入偶數個或更多個相同數的做法，探討能否加快M&m數列的穩定速度？並利用已知的原數列數字間的差距比例來找出穩定次數及穩定值的數學規律性。當原數列為2k+1項，每一次加入N個相同數，我們得出研究結果：

一、若N為偶數（N<2k+1），1≤穩定次數≤$\left[\frac{2k}{N}\right]+3$。

二、若N>2k+1

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則穩定次數=1，穩定值為原數列中位數。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等，則穩定次數=3，穩定值為數列所加入的第一組相同數字。

壹、研究動機

動手玩數學專欄中一道中位數與平均數的遊戲

給定$a_1=53, a_2=13, a_3=41$，依照數列前k+1項的平均數=數列前k項的中位數之運算規則，可以得到一個數列$\langle a_n\rangle$：53,13,41,57,⋯，不禁讓我們對此數列產生高度的好奇。

M&m數列的相關研究

進一步在網路搜尋到臺灣2008年國際科展作品《M&m Sequences之研究》，文中將原數列(a,b,c)利用線性變換成$(-x,1,x)$來探討此數列穩定的相關性質，提出若$x\geq 41.625$，則由$(-x,1,x)$起始所形成的M&m數列，必會收斂在41.625且穩定長度為73。這個結果激發我們對**收斂到穩定值的速度，是否能有辦法更加快？**以及$x<41.625$時，是否仍具有**收斂到穩定值的一般性質？**這樣的問題感到興趣。於是我們嘗試在不改變數列的運算規則之下，透過每一次加入偶數個相同數，探討能否加快M&m數列的穩定速度，就此開啟我們的研究之路。

貳、研究目的

一、探討原數列為2k+1項，一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律。
二、探討原數列為2k+1項，一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數與N之關聯。

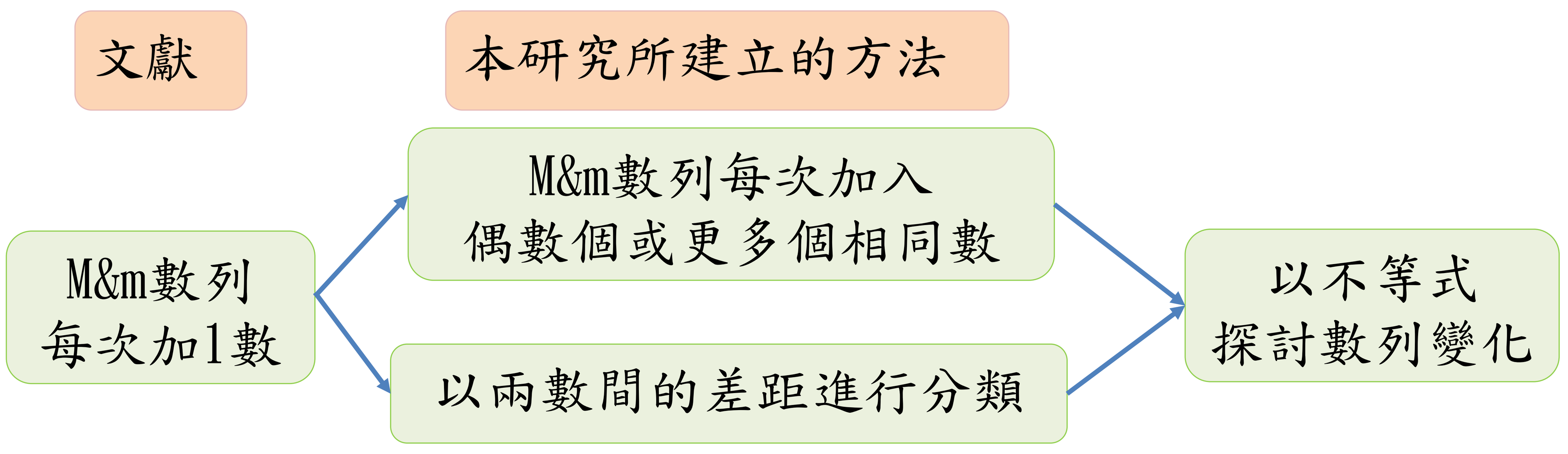
參、研究過程與方法

一、彙整相關文獻

M&m數列是由Shultz和Shiflett(2005)提出的一種特殊數列。M&m數列中的M與m分別代表平均數及中位數，此數列剛開始先取三數a、b、c，第四個數d必須滿足其與前三個數的平均數（即$\frac{a+b+c+d}{4}$）要等於前三個數所成數列（即a,b,c）的中位數，第五個數則要滿足其與前四個數的平均數要等於前四個數所成數列（即a,b,c,d）的中位數，依次類推，所形成之數列即為M&m數列。

臺灣2008年國際科展作品《M&m Sequences之研究》一文中，將原數列(a,b,c)利用線性變換成$(-x,1,x)$來探討此數列穩定的相關性質，提出若$x\geq 41.625$，則由$(-x,1,x)$起始所形成的M&m數列，一定會收斂在41.625且穩定長度為73（本研究定義為70次穩定）；當$x<41.625$時，則無明顯規則性。我們將$x\geq 41.625$的$(-x,1,x)$數列轉換成原數列三數(a,b,c)差距比值呈現，即$\frac{b-a}{c-b}=\frac{x-1}{1+x}=\frac{41.625-1}{1+41.625}=\frac{325}{341}$，發現僅在$\frac{325}{341}\leq\frac{b-a}{c-b}<1$範圍中可以明確得知穩定次數可以為70次。

105學年度台中市中小學科展高中組作品《均中求穩》一文中，利用Excel的統計指令快速求得數列的各項數值的變化規則，發現原數列在(1,1+k,1+k)~(1,1+k,2k+1)間，穩定次數和穩定值有對稱的情形發生。



二、名詞釋義

(一) $\mathbf{m}_i$：加入第i組相同數字後，所得數列的中位數。其中m_0代表原始數列的中位數。
$\mathbf{M}_i$：加入第i組相同數字後，所得數列的平均數。
$\boldsymbol{x_i}$：$M_{k+1}=m_k$運算規則下，原數列加入的第i組相同數字之值。

(二) ***n*次穩定**：當$\boldsymbol{n=\min\{k\in N: x_k=x_{k+\ell},\forall\ell\in N\}}$，則數列為$n$次穩定。

(三) $\boldsymbol{Q_i}$：若數列為i次穩定，則令穩定值$Q_i=x_i$。

三、研究內容

性質一、在原始數列三數為$a_1,a_2,a_3(a_1<a_2<a_3)$，在每一次加入偶數N個相同數時，若$a_3-a_2=a_2-a_1$，則數列為1次穩定。

$x_1=\frac{1}{N}[(N+3)m_0-(a_1+a_2+a_3)]=\frac{1}{N}[Nm_0+(m_0-a_1)-(a_3-m_0)]=m_0$，$\therefore m_1=a_2$。

依據$M_3=m_2$，可得$x_2=x_1$。重複相同運算，可得$x_1=x_2=x_3=\cdots=m_0$。故數列為1次穩定，且穩定值為m_0。

性質二、在原始數列三數為$a_1,a_2,a_3(a_1<a_2<a_3)$，在每一次加入偶數N個相同數下，若$a_3-a_2>a_2-a_1$，則數列中位數$\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$為單調遞減數列；反之則為單調遞增數列。

$$\because M_k=\frac{N\sum_{i=1}^{k}x_i+a_1+a_2+a_3}{Nk+3}=m_{k-1}$$

$$\Longrightarrow x_{k+1}=\frac{1}{N}\left[(Nk+N+3)m_k-N\sum_{i=1}^{k}x_i-(a_1+a_2+a_3)\right]=\frac{1}{N}[Nm_k+(Nk+3)(m_k-m_{k-1})]<m_k$$

$\therefore m_{k+1}<m_k$，$\forall k\in N$，故數列中位數$\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$為單調遞減數列。

性質三、在原始數列三數為a_1,a_2,a_3，每一次加入偶數N個相同數時，若k為最小正整數使得$m_k=m_{k-1}$時，則數列為k+1次穩定。

$$\because M_k=\frac{1}{Nk+3}\left(N\sum_{i=1}^{k}x_i+a_1+a_2+a_3\right)=m_{k-1}\text{且}M_{k+1}=\frac{1}{Nk+N+3}\left(N\sum_{i=1}^{k+1}x_i+a_1+a_2+a_3\right)=m_k$$

若$m_k=m_{k-1}$，則$x_{k+1}=\frac{1}{N}[(Nk+N+3)m_k-(Nk+3)m_{k-1}]=m_k$，可得$m_{k+1}=m_k$，這又導致$x_{k+2}=m_{k+1}$，故$x_{k+2}=x_{k+1}$。重複作法，可得$x_{k+1+\ell}=x_{k+1}$，$\forall\ell\in N$，故數列為k+1次穩定。

性質四、假設兩數列$a_1,a_2,a_3(a_1<a_2<a_3)$與$b_1,b_2,b_3(b_1<b_2<b_3)$，滿足$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\frac{b_3-b_2}{b_2-b_1}$，若在一次加入偶數N個相同的數，前者所得之M&m數列為n次穩定，則後者所得之M&m數列亦為n次穩定。

設原數列三數a_1,a_2,a_3經過$y=f(x)=px+q$線性轉換後，得新原數列b_1,b_2,b_3為pa_1+q,pa_2+q,pa_3+q。

若原數列為k+1次穩定，則由性質三得知$m_k=m_{k-1}\Rightarrow M_{k+1}=M_k\Rightarrow N(\sum_{i=1}^{k}x_i+a_1+a_2+a_3)=(Nk+3)x_{k+1}$

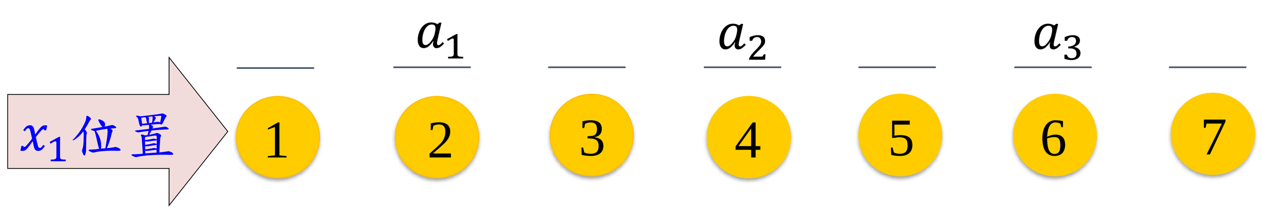
$$\text{得}M'_k=\frac{p(Nk+3)x_{k+1}+(Nk+3)q}{Nk+3}=px_{k+1}+q=m'_{k-1}\text{且}M'_{k+1}=\frac{p(Nk+N+3)x_{k+1}+(Nk+N+3)q}{Nk+N+3}=px_{k+1}+q=m'_k$$

$\because m'_k=m'_{k-1}$，$\therefore$新數列與原數列的穩定次數皆為$k+1$次，且穩定值$Q'_{k+1}=f(Q_{k+1})=pQ_{k+1}+q$。

(一)每一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律

研究1-1-1、N=2，原數列為a_1,a_2,a_3之情形

發現 原數列a_1,a_2,a_3，在每一次加入2個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1的位置，穩定值受到x_1、x_2的影響。



依據原數列三數間的差距情形，將數列分成三類進行討論，如圖3-1，並得到結果如表3-1：

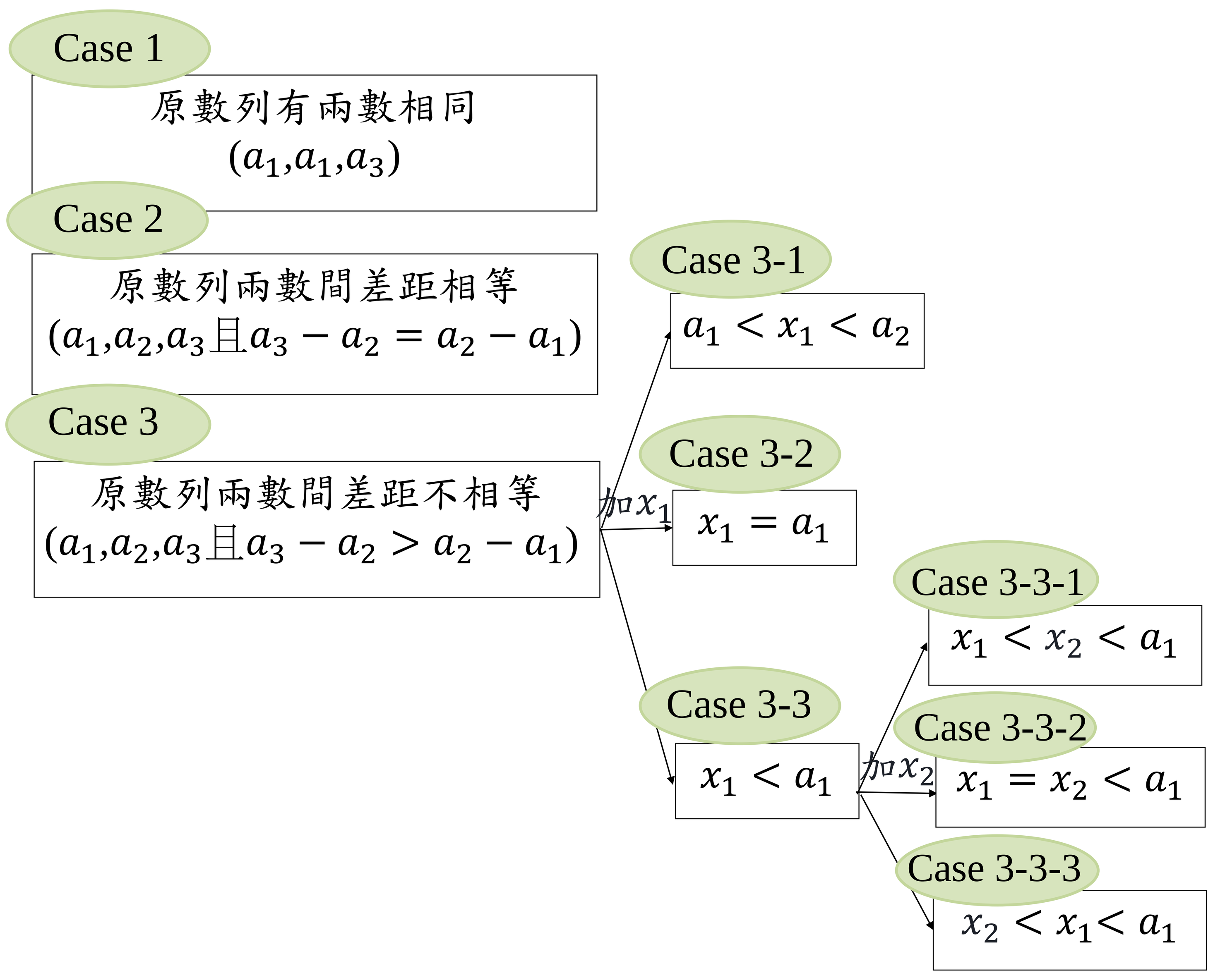


圖3-1 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入2個相同數之步驟

原數列三個數			n次穩定	穩定值
存在兩數相同($a_1=a_2<a_3$)			2	a_1
差距相等($a_2-a_1=a_3-a_2$)			1	a_2
差距不相等 $a_2-a_1<a_3-a_2$	【情況一】 $a_1<x_1<a_2$	$a_3-a_2<3(a_2-a_1)$	3	$\frac{4a_2-a_1-a_3}{2}$
	【情況二】 $x_1=a_1$	$a_3-a_2=3(a_2-a_1)$	3	a_1
	【情況三】 $x_1<a_1$	$3(a_2-a_1)<a_3-a_2\le 8(a_2-a_1)$	4	$\frac{7a_1-5a_2}{2}$
		$a_3-a_2>8(a_2-a_1)$		$\frac{4a_2-a_1-a_3}{2}$

表3-1 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入2個相同數之穩定情形

研究1-1-2、N=4，原數列為a_1,a_2,a_3之情形

發現一 加入的第一組相同數字x_1即為新數列的中位數m_1，如圖3-2所示。

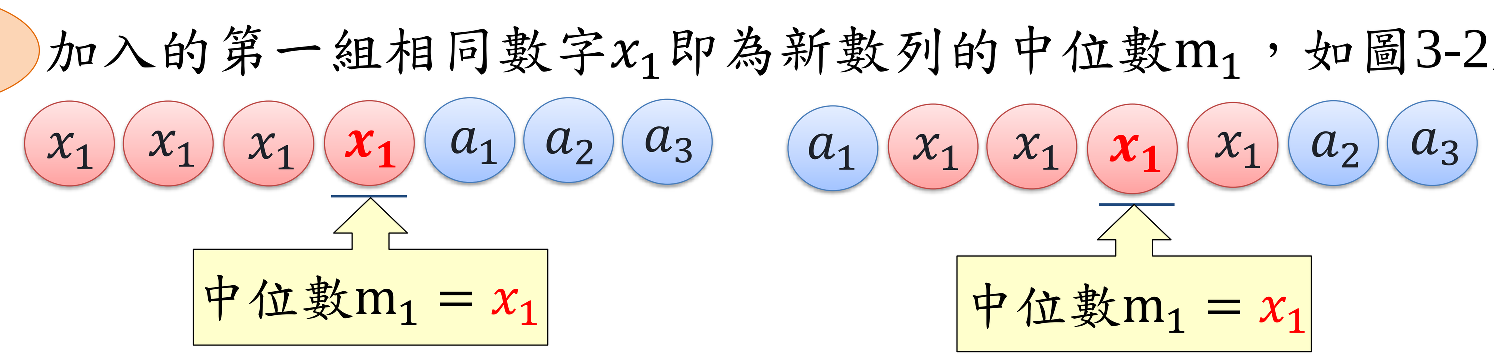


圖3-2 原數列a_1,a_2,a_3第一次加入4個相同數後的新數列中位數

發現二 原數列a_1,a_2,a_3，在每一次加入4個相同數下，當數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等為1次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為3次穩定，且穩定值為x_1。

研究1-1-3、N=6，原數列為a_1,a_2,a_3之情形

發現 原數列a_1,a_2,a_3，在每一次加入6個相同數下，當數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等為1次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為3次穩定，且穩定值為x_1，與每一次加入4個相同數的結果一致。

研究1-2-1、N=2，原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5之情形

發現 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入2個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1、x_2的位置，穩定值受到x_1、x_2、x_3的影響。

依據原數列相同數字個數（原數列4個數相同、3個數相同、2組2個數相同、2個數相同及原數列5數皆不相同，共九類），對原數列所有可能情況進行分類，並透過原數列中位數與左、右兩邊數字差距和之關係及性質一至性質三，來推得數列穩定次數及穩定條件如下：

1. 若原數列中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則數列為1次穩定。

2. 依據性質三，若$m_k=m_{k-1}$，k≤4且k為正整數，則數列為k+1次穩定。

研究1-2-2、N=4，原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5之情形

發現 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入4個相同數下，數列的穩定次數取決於x_1的位置，穩定值受到x_1、x_2的影響。

研究1-2-3、N=6，原數列為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5之情形

發現 當原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5在每一次加入N個相同數(N=6)下，若中位數與左、右兩邊數字差距和相等時，數列必為1次穩定，且穩定值為m_0；若中位數與左、右兩邊數字差距和不相等時，數列必為3次穩定，且穩定值為x_1。

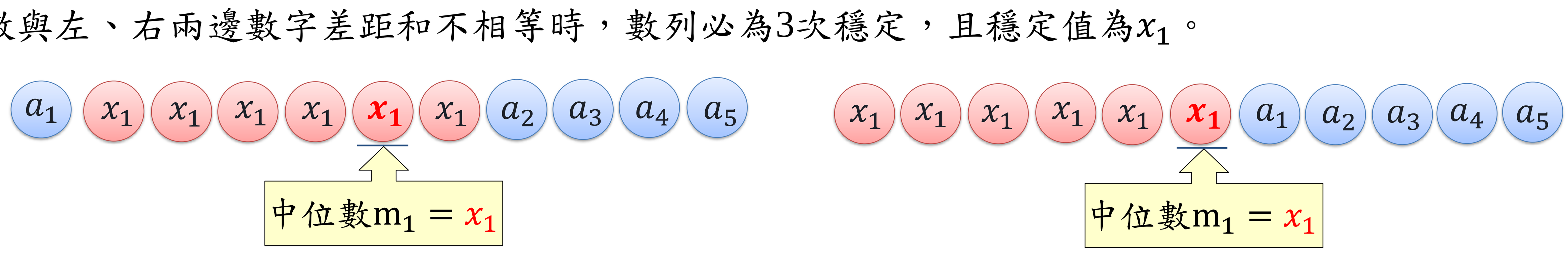


圖3-3 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5第一次加入6個相同數後的新數列中位數

(二)原數列為2k+1項，一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數與N之關聯

發現一 若N為偶數且N<2k+1，則1≤穩定次數≤ $\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]$+3。（[ ]為高斯符號）

1. 原數列中位數左、右兩側數字和相等

   由性質一得知，數列穩定次數**1次**為最少次穩定，且穩定值為m_0。

2. 當原數列中位數與左邊數字差距和小於右邊差距和

   由性質二可知中位數向左單調遞減。每一次加入偶數N個相同數字，會使中位數向左移動$\frac{\mathrm{N}}{2}$個數字，原始數列在m_0左邊有k個數字，因此最多經過$\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]$+1次就會讓中位數碰到相同數字的其中一個，換句話說，$\mathrm{m}_{\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]+1}=\mathrm{m}_{\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]+2}=x_i$，$i\in\{1,2,3,\ldots,\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right],\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]+1\}$，故由性質三可知，數列最多$\left[\frac{2k}{\mathrm{N}}\right]$**+3次**可達到穩定。

發現二 若N>2k+1，則數列穩定次數必為1次或3次。

1. 數列為一次穩定，且穩定值為m_0

$$x_1=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0-\sum_{i=1}^{2k+1}a_i\right]=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0-\sum_{i=1}^{2k+1}(a_i-\mathrm{m}_0)-(2k+1)\mathrm{m}_0\right]=\frac{1}{\mathrm{N}}[(2k+1+\mathrm{N})\mathrm{m}_0-0-(2k+1)\mathrm{m}_0]=\frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{N}\mathrm{m}_0=\mathrm{m}_0$$

2. 數列為三次穩定，且穩定值為x_1

原數列中位數左邊有k個數字，加入第1組數字後會使中位數向左移動$\frac{\mathrm{N}}{2}$($\frac{\mathrm{N}}{2}>k$)個數字，則$\mathrm{m}_1=x_1$。再加入第二組相同數字x_2後，使得$\mathrm{m}_2=\mathrm{m}_1=x_1$，故數列穩定次數為3次，且穩定值為$x_1$。

肆、研究結果

一、原數列為2k+1項，一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數和穩定值之規律

(一) 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入2個相同數，穩定次數取決於x_1的位置，故穩定次數介於1~4次，穩定值受到x_1、x_2的影響。

(二) 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入$N\geq 4$個相同數，可將穩定結果整理如表4-1。

(三) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5每一次加入2個相同數，穩定次數取決於x_1、x_2的位置，故穩定次數介於1~5次，穩定值受到x_1、x_2、x_3的影響。

(四) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5每一次加入4個相同數，穩定次數取決於x_1的位置，故穩定次數介於1~4次，穩定值受到x_1、x_2的影響。

(五) 原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5每一次加入$N\geq 6$個相同數，穩定次數必為1次或3次。

原數列三個數			n次穩定	穩定值
存在兩數相同($a_1=a_2<a_3$)			3	$\frac{(N+1)a_2-a_3}{N}$
差距相等($a_2-a_1=a_3-a_2$)			1	a_2
差距不相等 $a_2-a_1<a_3-a_2$	【情況一】 $a_1<x_1<a_2$	$a_3-a_2<(N+1)(a_2-a_1)$	3	$\frac{(N+2)a_2-a_1-a_3}{N}$
	【情況二】 $x_1=a_1$	$a_3-a_2=(N+1)(a_2-a_1)$		a_1
	【情況三】 $x_1<a_1$	$a_3-a_2>(N+1)(a_2-a_1)$		$\frac{(N+2)a_2-a_1-a_3}{N}$

表4-1 原數列a_1,a_2,a_3每一次加入$N\geq 4$個相同數之穩定情形

(六) 原數列2k+1項，一次加入偶數N（N<2k+1）個相同數

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等時，數列必為1次穩定。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等列的穩定次數取決於x_1~$x_{\left[\frac{2k}{N}\right]}$的位置，穩定值受到$x_1$~$x_{\left[\frac{2k}{N}\right]+1}$的影響。

二、原數列為2k+1項，一次加入偶數N個相同數，數列的穩定次數與N之關聯

(一) 每一次加入偶數N（N<2k+1）個相同數，則$1\leq$穩定次數$\leq\left[\frac{2k}{N}\right]+3$。

(二) 每一次加入N（N>2k+1）個相同數

1. 中位數與左、右兩邊數字差距和相等，則數列必為1次穩定，穩定值=m_0（原數列的中位數）。
2. 中位數與左、右兩邊數字差距和不相等，則數列必為3次穩定，穩定值=x_1（依照$M_{k+1}=m_k$運算規則求得的第一組數字）。

伍、討論

一、探討每一次加入奇數個相同數對原數列a_1,a_2,a_3為起始的M&m數列穩定狀態之影響

(一) 每一次加入3個相同數

相較於Shultz和Shiflett(2005)及臺灣2008年國際科展作品《M&m Sequences之研究》，兩篇文獻每一次加入1數，僅在$\frac{325}{341}\leq\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}<1$，數列固定為70次穩定的結果，本研究發現若$\frac{1}{4}\leq\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}<1$，則數列必為3次穩定。不僅擴大數列能達固定穩定次數的範圍外，更大幅提升數列的穩定速度。

(二) 每一次加入5個相同數

當每一次加入的相同數字個數>原數列個數時，若數列原始中位數與左、右兩邊數字差距相等，則數列為1次穩定，且穩定值為m_0；其餘皆為3次穩定，且穩定值為x_1。

二、探討原數列a_1,a_2,a_3,a_4為起始的M&m數列之穩定性

先加入1個數使數列成為5項，爾後以每一次固定加入2、4或6等偶數個相同數的方式，讓數列保持為奇數項，再藉由原數列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5為起始的M&m數列之研究結果，求得原數列4數的穩定次數=原數列5數的穩定次數+1。

三、探討M&m數列在每一次分別加入1到6個相同數時，數列中位數的變化情況，以原數列1,2,14為例

(一) 每一次加入的數字個數≤原始數列個數

每一次加入1或3個相同數時，數列規律性不明確，如下圖5-1和圖5-3所示。而本研究改以每一次加入2個相同數，使數列保持為奇數項，由下圖5-2，發現數列中位數快速達到一致，有效加快數列的穩定速度。

(二) 每一次加入的數字個數>原始數列個數

由於每一次加入的數字個數夠多，不管x_1落在原數列的哪個範圍，可得$m_2=m_1=x_1$，如下圖5-4至5-6所示，故數列皆為3次穩定。

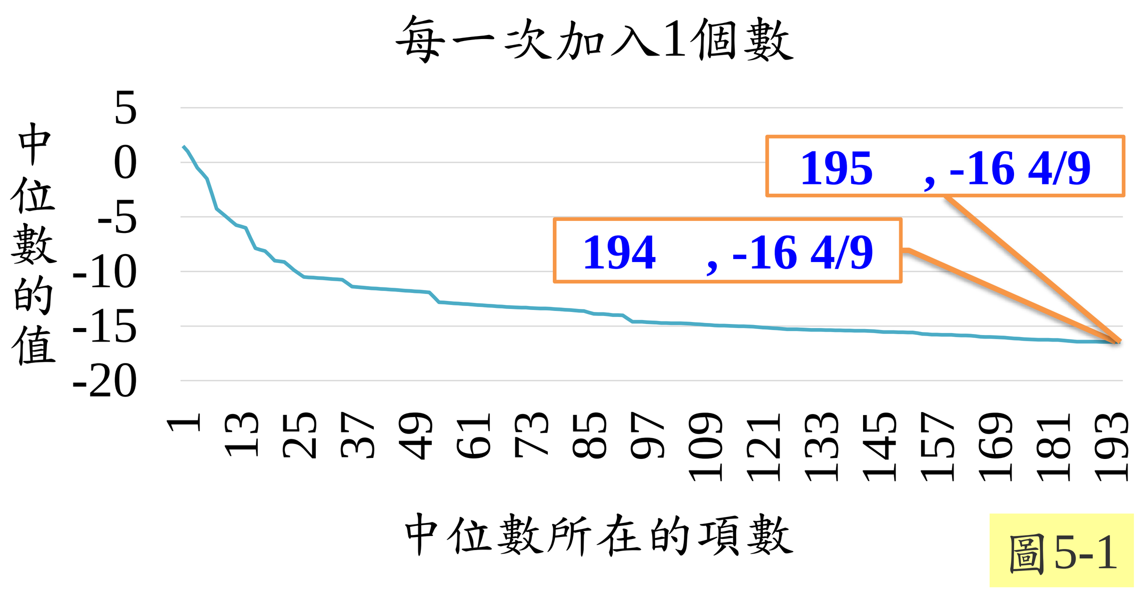


圖5-1

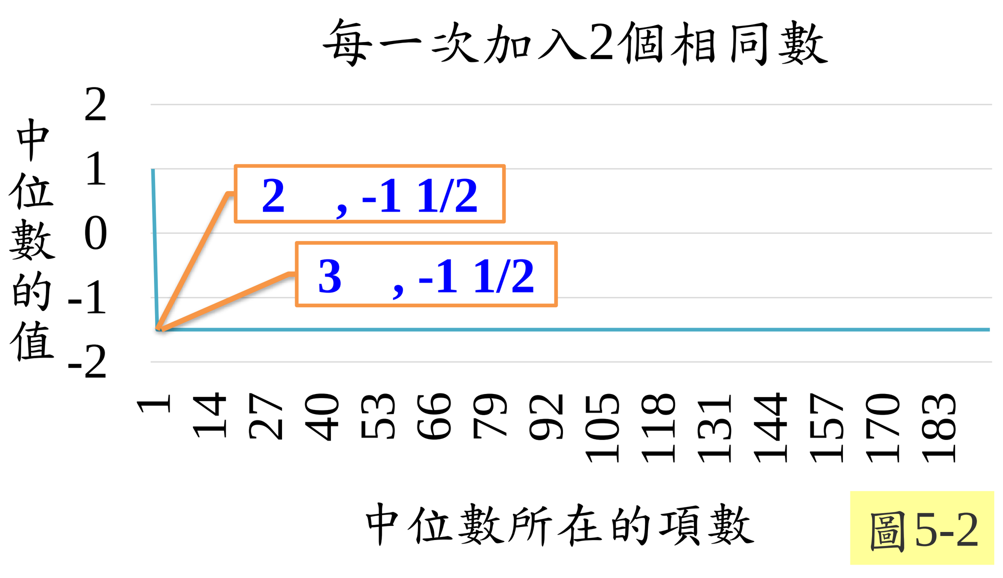


圖5-2

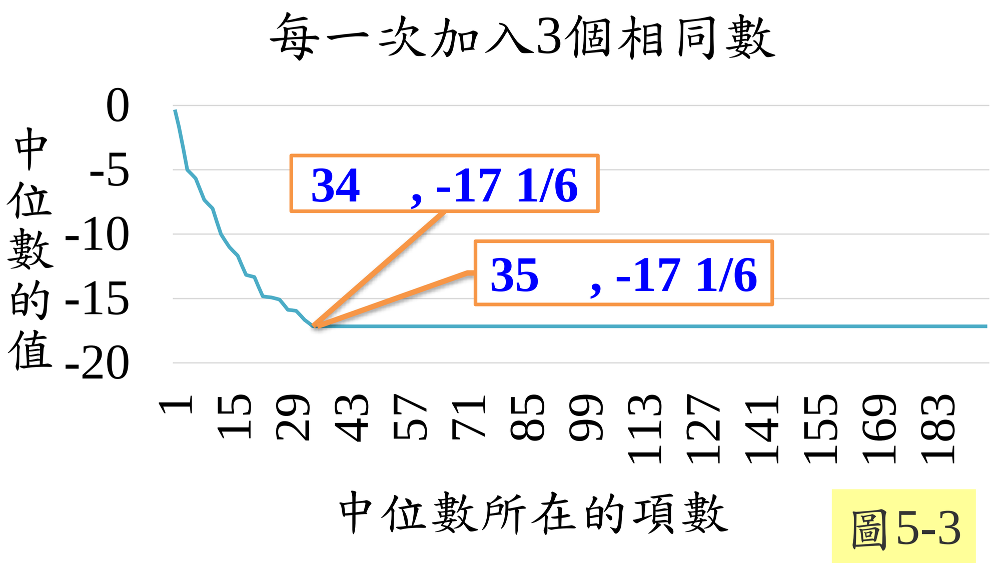


圖5-3

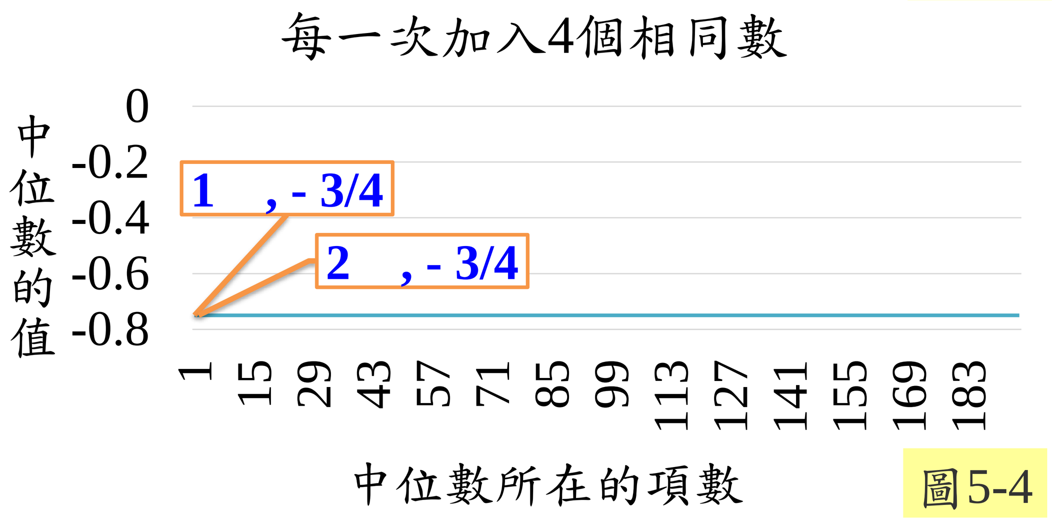


圖5-4

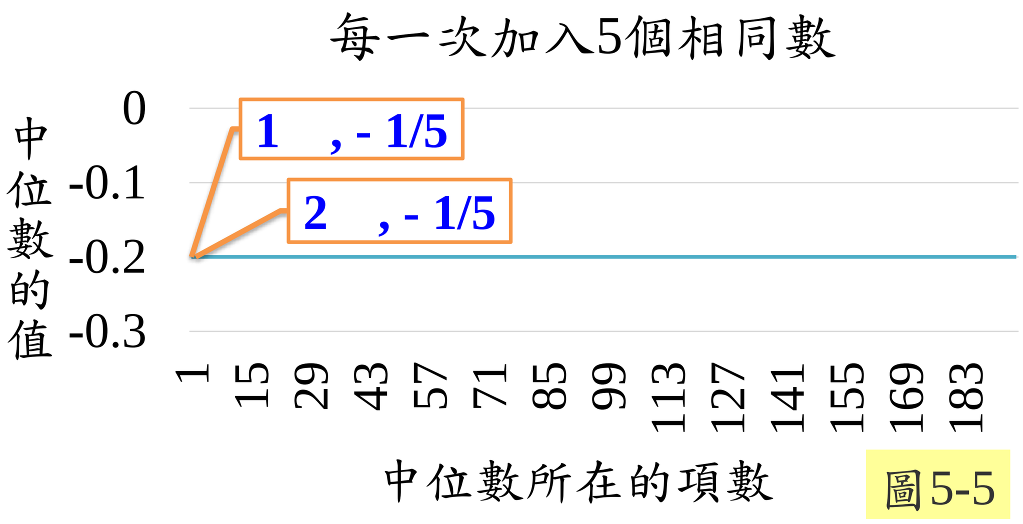


圖5-5

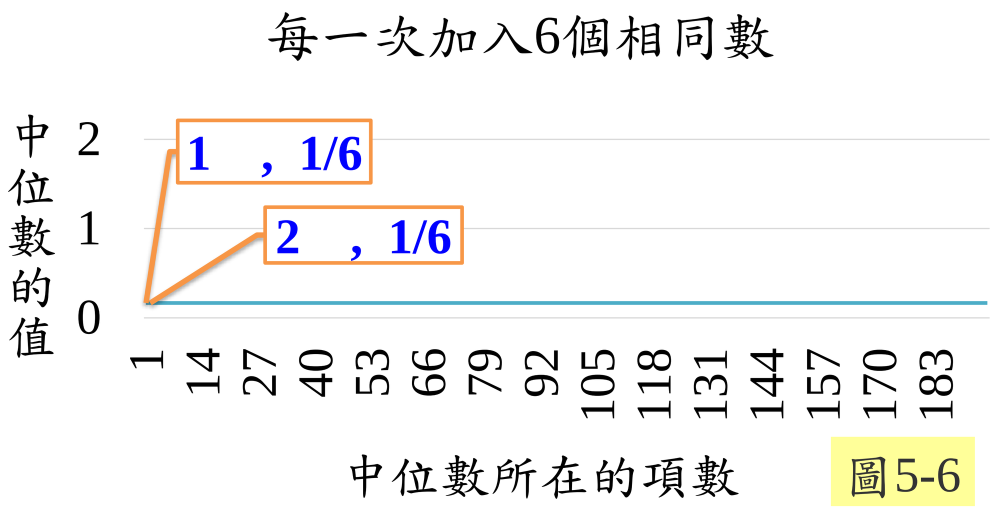


圖5-6

四、探討文獻中M&m數列達到穩定時的分布情形

將原數列數字差距化為最簡比來看，若數列未穩定前中位數出現分數，分母必為2^n，使得加入數值小數位數增加的速度會遠低於數列增加的個數，再加上數列中位數的產生會以單調遞減（或遞增）型態緩慢往最終值收斂，使得穩定數列的中位數等於平均數。

我們將原數列1,2,15之M&m數列做次數分配，可以發現當數列達到穩定時，次數分配近似於左右對稱，如下圖5-7所示。

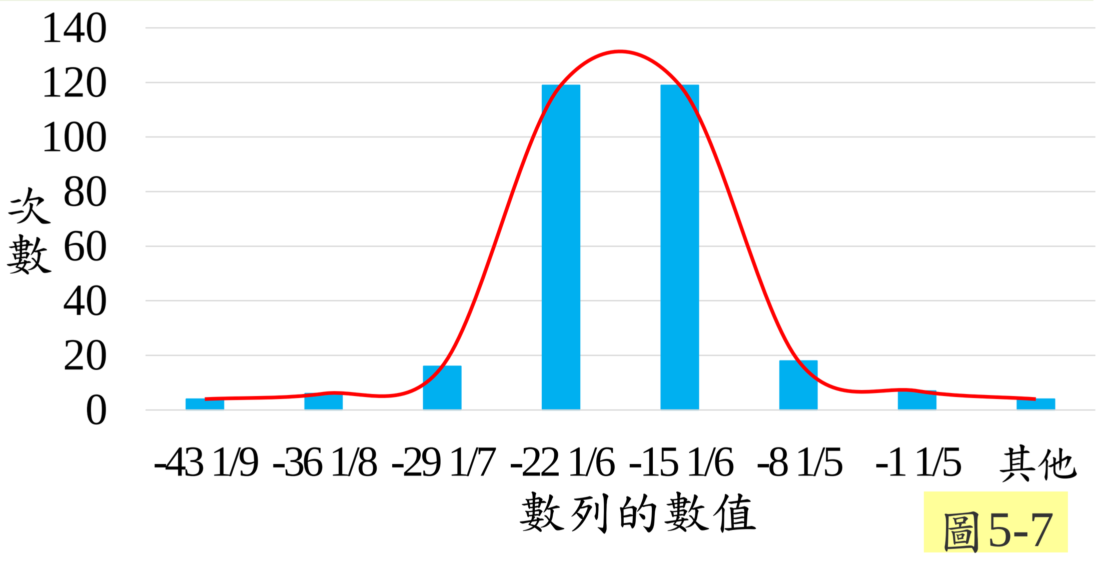


圖5-7

陸、結論

利用本研究的做法，我們可以大幅加快M&m數列的穩定速度，並得出明確的穩定規則，這個發現是異於文獻[2][3]之地方；另外，本研究雖只討論加入偶數N之結果，但實際上，如本文第伍之討論處所述，對奇數N，亦有類似的結果。此時，當N＝1時，即退化到文獻[1][2][3]之結果。未來，擬進一步修習電腦程式與函數的泛函性質，建立計算穩定次數和穩定值的數學模式及相互之間的關係，以及探討由收斂到定值的M&m 數列，所造出的映射之性質[5]。

柒、參考資料

1. 許志農 (2014)：動手玩數學專欄。**龍騰數亦優**，23，38。
2. H. S. Shultz and R. C. Shiflett (2005): M&m Sequences. *The College Mathematics Journal*, 36(3), 191-198.
3. 林子瑜 (2008)：M&m Sequences之研究。臺灣二OO八年國際科學展覽會高中組第二名。
4. 均中求穩 (2016)：105學年度台中市公私立中小學科學展覽會高中(職)組(C0111)佳作。 http://140.128.183.25/signup_cal.php?caltype=7
5. M. Chamberl and & M. Martelli (2007): The mean-median map. *Journal of Difference Equations and Applications*, 13(7), 577-583.