中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030401

當螞蟻遇上門格海綿－挖洞立體圖形頂點間的最短距離探討

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 許景捷	林靖捷
國三 林志翰	黃彩霞
國三 李昕恩	

關鍵詞：立體圖形、最短路徑、門格海棉

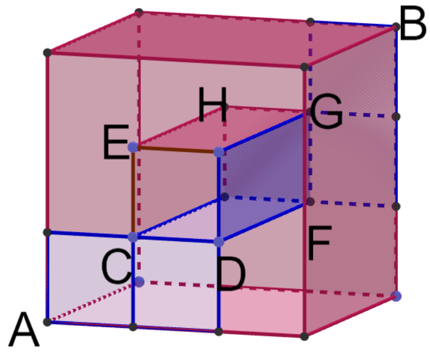
摘要

本研究旨在求得螞蟻在挖洞立體圖形之頂點間爬行的最短路徑。我們從一條通道的正方體開始研究，先後探討通道位置在中央、通道位置任意偏移、通道位置在中央旋轉時的最短路徑，同時研究了圓柱中央挖圓柱通道時的最短路徑，然後進一步探討正方體兩條中央通道與三條中央通道的情形，最後研究螞蟻在門格海棉之頂點間爬行的最短路徑。

壹、研究動機

在一次的課程中，老師要我們思考以下題目：

如圖 0-0，在邊長為 3 的正立方體表面上挖出一個邊長為 1 的正四角柱通道，找出螞蟻如何在最遠兩頂點(A、B)間行走最短的距離。我們的解法如下：



(圖 0-0)

我們分為兩種情況討論

1. 路徑不經過通道

如同一般正方體的走法，路徑長為$\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}\fallingdotseq 6.70$

2. 路徑經過通道

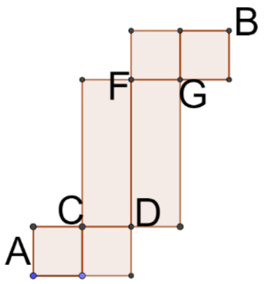
圖 0-0 為立體圖，由圖 0-0 可以發現從 A 點進入通道必經過$\overline{CD}$或$\overline{CE}$，爬出通道到 B 點必經過$\overline{GF}$或$\overline{GH}$，而經過$\overline{CD}$再經$\overline{GF}$的距離較短，同理經過$\overline{CE}$再經$\overline{GH}$也較短，故會繪出兩種展開圖，分別是 A 經過$\overline{CD}$再經$\overline{GF}$到 B(圖 0-1)及 A 經過$\overline{CE}$再經$\overline{GH}$到 B(圖 0-1′)，因為對稱性，只要討論其中一張即可。

我們發現$\overline{AB}$通過不存在的區域，故選擇離$\overline{AB}$最近的 C 點、G 點(其餘在$\overline{CD}$上的任意點K(非C)均可由鏢形ACPK得知$\overline{AC}+\overline{CP}<\overline{AK}+\overline{KP}$，同理$\overline{FG}$上的任意點S(非G)由鏢形PGBS得知$\overline{PG}+\overline{GB}<\overline{PS}+\overline{SB}$)。

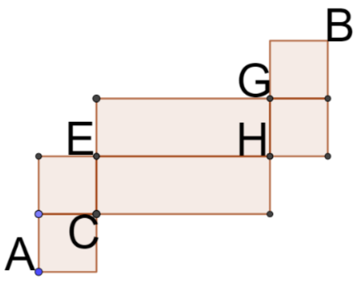
故在此情況下，走通道內的最短路徑為$A\longrightarrow C\longrightarrow G\longrightarrow B$。($\longrightarrow$表示點與點之間的路徑銜接)

$\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}=2\sqrt{3}+\sqrt{13}\fallingdotseq 6.43<3\sqrt{5}$

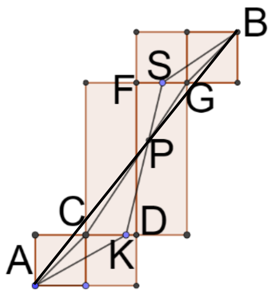
故最短路徑長為 $2\sqrt{2}+\sqrt{13}$



(圖 0-1)



(圖 0-1′)



(圖 0-2)

在解完此題目後，我們對螞蟻於不同的挖洞條件下行走的最短路徑充滿好奇，甚至聯想到這隻螞蟻如果走進門格海綿，它走兩頂點間的最短距離會是一個定數，還是永遠到不了的無限長度？於是我們針對這個主題展開了一連串相關的研究。本研究運用到國中數學課本第三冊畢氏定理與第六冊立體圖形。

貳、研究目的

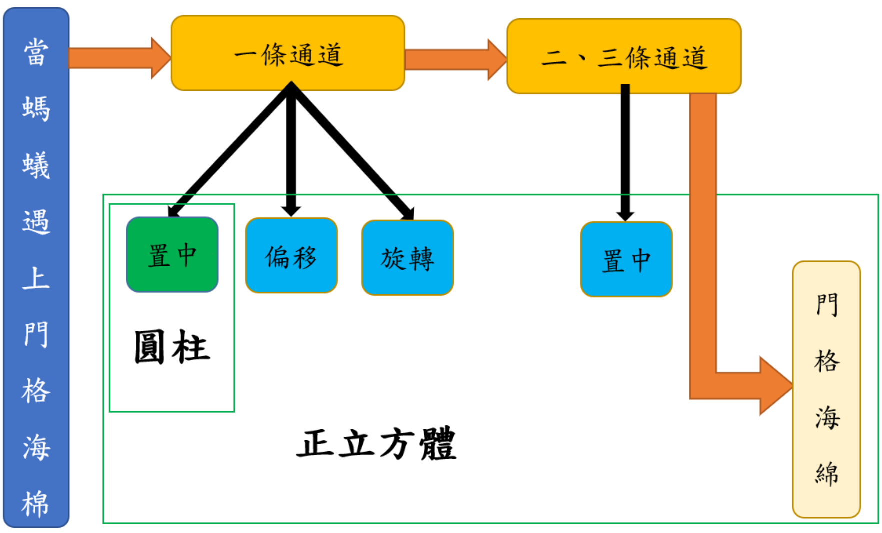
一、在正方體中挖一條四角柱通道，於置中、偏移、旋轉等情況下，找出兩最遠頂點螞蟻爬行的最短路徑。

二、在圓柱中挖一條圓柱通道，找出兩最遠端點螞蟻爬行的最短路徑。

三、在正方體中挖兩條、三條置中的通道，找出兩最遠頂點螞蟻爬行的最短路徑。

四、在門格海綿中，找出兩最遠頂點螞蟻爬行的最短路徑。

我們將研究過程的順序製作成下表：



參、研究器材與設備

紙、筆、電腦 (Geogebra、 MicrosoftWord)、百利智慧片 、小木塊

肆、研究方法

在本研究中，我們將螞蟻在立體圖形表面的路徑用展開圖的方式呈現。

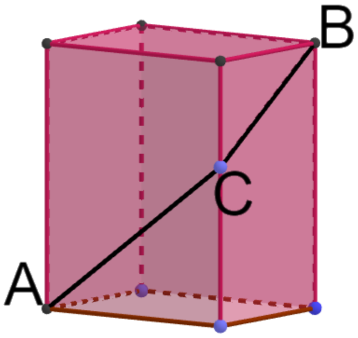
例如：如圖 0-3，假設 A 點為原點，從 A 到 B 的其中一個路徑為$\overline{AC}+\overline{CB}$，轉換成展開圖後就是圖 0-4。

另外，螞蟻經過兩個平面的路徑分別有圖 0-4、圖 0-5、圖 0-6 三種，而因我們僅討論最短路徑，所以必須在這三種之中選一個最短的。

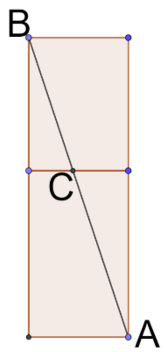
當我們繪製展開圖時，皆滿足此兩條件：

1.捷徑走法(過濾掉較遠路徑)

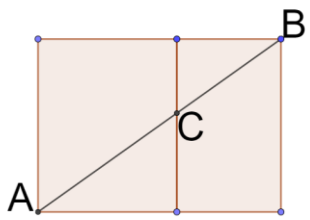
2.必須是可以行走的路徑(路徑在展開圖內)



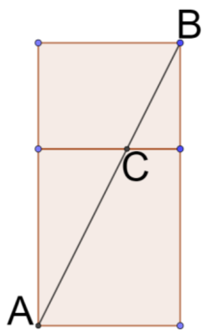
(圖 0-3)



(圖 0-4)



(圖 0-5)



(圖 0-6)

伍、研究過程與結果

本研究有許多重複出現之證明，故在此先證明以利研究發展。

<引理 1> 兩等周長的長方形，(長－寬)較小者的對角線長較短

證明：設兩長方形長寬分別為$(a+r,a-r)$、$(a+p,a-p)$，其中$r>p$

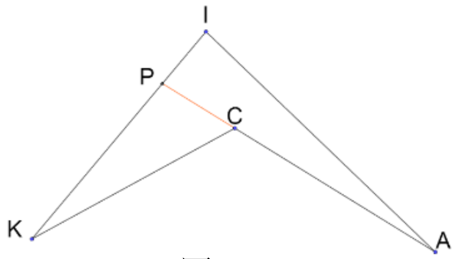
則長－寬(長寬差)分別為 2r、2p($2r>2p$)

對角線長為$\sqrt{2a^2+2r^2}$與$\sqrt{2a^2+2p^2}$

$\because 2a^2+2r^2>2a^2+2p^2 \therefore \sqrt{2a^2+2r^2}>\sqrt{2a^2+2p^2}$)

得長寬差較小者對角線較短。

<引理 2>鏢形 ACKI(圖 0-7)中，$\overline{IA}+\overline{IK}>\overline{CA}+\overline{CK}$



(圖 0-7)

證明：延長$\overline{AC}$交$\overline{IK}$於P

$\because \overline{IA}+\overline{IP}>\overline{PA}$

$\overline{KP}+\overline{PC}>\overline{KC}$

$\therefore \overline{IA}+\overline{IP}+\overline{KP}+\overline{PC}>\overline{PA}+\overline{CK}=\overline{PC}+\overline{CA}+\overline{CK}$

得$\overline{IA}+\overline{IK}>\overline{CA}+\overline{CK}$

對於研究中重複出現之名詞，我們也對其做相對應說明如下：

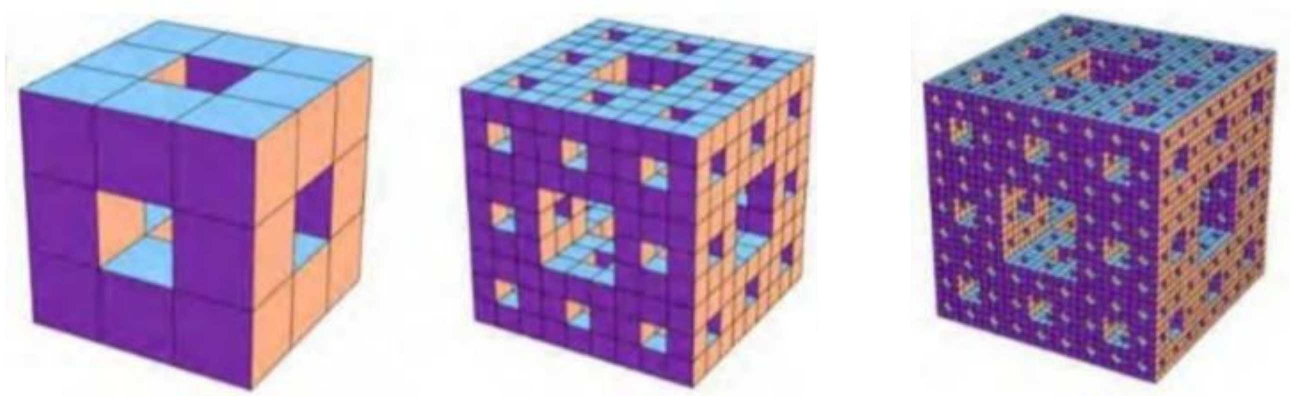
門格海棉：給定一個正立方體，依序執行下列步驟：

（步驟 1)：把正立方體平均分割為 27 個小正立方體（此時正立方體的每一個面被平均分割為 9 個正方形)。

（步驟 2)：把每一面的中間的小正立方體刪除掉，亦將最中心的小正立方體刪除掉。

（步驟 3)：把遺留下來的小正立方體都依序重複步驟 1、步驟 2。

每當執行完步驟 1、步驟 2 時，此時可以選擇停止，或繼續執行步驟 3。把以上步驟重複操作，若操作 n 回後，則將所得的殘存形體稱為第 n 階的『門格海綿 Menger sponge』，並記為『M_n』。由上述的構造方法可知，門格海綿是由一個正立方體透過幾個固定的步驟，遞迴式方法所建構出來的三度空間形體。圖 0-8 即為第 1 階到第 3 階的門格海綿示意圖：



M_1 M_2 M_3

通道：立體圖形挖空的部分。

最短路徑：指螞蟻在立體圖形表面所能爬行的最短路徑。

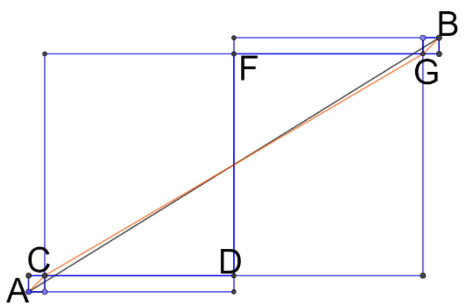
在展開圖內：路徑只經過展開圖包圍的範圍，不跨越到圖外。

一、在正方體中挖一條任意位置的通道，找出兩最遠頂點的最短路徑。

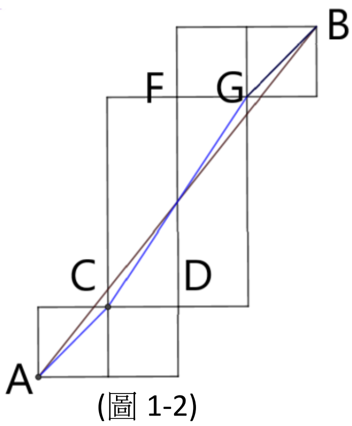
在解完正方體邊長：通道邊長＝1：3 的邊長比後，我們嘗試將它一般化。

(一)將通道邊長在正方體底面中央任意縮放

設立方體邊長 a，通道邊長 b。我們依前述規則畫展開圖，發現當我們改變$\frac{a}{b}$時，會產生$\overline{AB}$全部在展開圖內(圖 1-1)、部分在展開圖外(圖 1-2)等兩種情形，於是我們依據$\overline{AB}$是否在展開圖內分為兩種計算：



(圖 1-1)



(圖 1-2)

$\because m_{\overline{AC}} = 1, m_{\overline{CG}} = \frac{a}{2b}$，當$m_{\overline{AC}} = m_{\overline{CG}}$時，

A、C、G、B 四點共線，此時 a:b=2:1，(如圖 1-3)，可知以$\frac{a}{b}$ =2 為分界可分為以下兩種：

1.$\frac{a}{b} \leq 2$

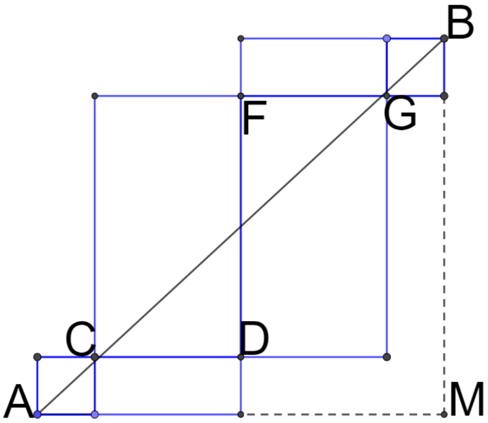
在 A、C、G、B 四點共線或$\overline{AB}$位於展開圖內

最短路徑長=$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{(a+b)^2 + (2a-b)^2}$=$\sqrt{5a^2 - 2ab + 2b^2}$

2.$\frac{a}{b}$>2

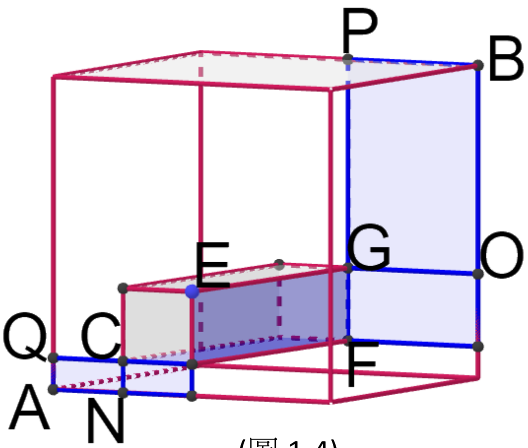
$m_{\overline{AC}} < m_{\overline{AB}}$，$\overline{AB}$不在展開圖內

最短路徑長=$\overline{AC}$+$\overline{CG}$+$\overline{GB}$=$2\overline{AC}+\overline{CG}=(a-b)\sqrt{2}+\sqrt{4b^2+a^2}$



(圖 1-3)

(二) 正方體邊長與通道邊長為任意比且通道任意偏移



(圖 1-4)

1 .變數

如圖 1-4，設正方體邊長為 a，通道邊長為 b，$\overline{AQ}$=$\overline{CN}$=c，$\overline{CQ}$=$\overline{AN}$=d

2.方法

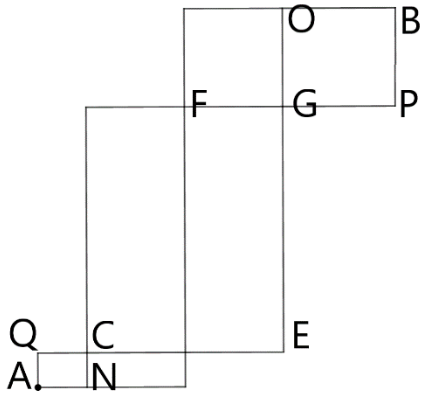
此條件造成以下三種影響

(1)兩向展開圖(如圖 1-5、圖 1-6)不再相同，討論最短路徑長時，這兩者皆需要被討論。

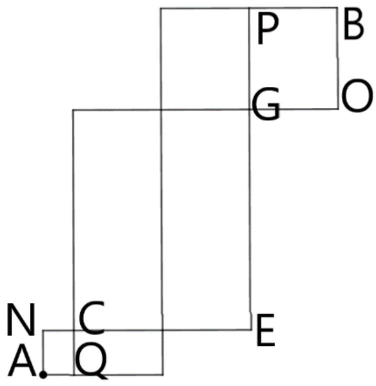
(2)因為兩向展開圖的$\overline{AB}$不同，所以即使是$\overline{AB}$都在展開圖內，其長度不同，須分別計算加以比較。

(3)c 不一定等於 d，使得兩向展開圖共線情況不唯一，例如路徑可能是$A\longrightarrow C\longrightarrow B$或$A\longrightarrow G\longrightarrow B$等。

這三個影響造成需討論的情況變得複雜，所以我們先將兩向展開圖畫出(圖 1-5、圖 1-6)，先歸納出一些結果以減少運算量，再進行更深入的討論：



(圖 1-5)



(圖 1-6)

先假設兩向展開圖的斜率

圖$1-5$是$\overline{AN}$為底邊的展開圖，圖中的斜率使用 m

$m_{\overline{AC}}=\frac{c}{d}, m_{\overline{BG}}=\frac{a-b-d}{a-b-c}$

圖$1-6$是$\overline{AQ}$為底邊的展開圖，圖中的斜率使用 M

$M_{\overline{AC}}=\frac{d}{c}, M_{\overline{BG}}=\frac{a-b-c}{a-b-d}$

討論如下：

當$c\geq d$時 $\Rightarrow m_{\overline{AC}}\geq 1\geq M_{\overline{AC}}$， $m_{\overline{BG}}\geq 1\geq M_{\overline{BG}}$

當$c\leq d$時 $\Rightarrow m_{\overline{AC}}\leq 1\leq M_{\overline{AC}}$， $m_{\overline{BG}}\leq 1\leq M_{\overline{BG}}$

所以若將$m_{\overline{AC}}$、$m_{\overline{BG}}$、1、$M_{\overline{BG}}$、$M_{\overline{AC}}$的大小關係以$c\geq d$和$c\leq d$分類，總共會有以下四種情形

$c\geq d$時

(1)$m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{BG}}\geq 1\geq M_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{AC}}$

(2)$m_{\overline{BG}}\geq m_{\overline{AC}}\geq 1\geq M_{\overline{AC}}\geq M_{\overline{BG}}$

$c\leq d$時

(3)$M_{\overline{AC}}\geq M_{\overline{BG}}\geq 1\geq m_{\overline{BG}}\geq m_{\overline{AC}}$

(4)$M_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{AC}}\geq 1\geq m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{BG}}$

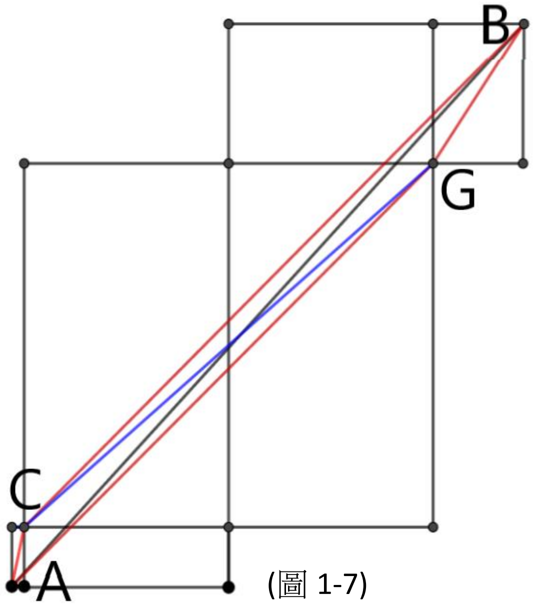
因為

$m_{\overline{AC}}\times M_{\overline{AC}}=1$，$m_{\overline{BG}}\times M_{\overline{BG}}=1$

當$m_{\overline{AC}}=\frac{c}{d}\geq 1$時，則$M_{\overline{AC}}=\frac{d}{c}\leq 1$

所以討論(1)和(3)即$m_{\overline{AC}}\geq M_{\overline{AC}}$與$m_{\overline{AC}}\leq M_{\overline{AC}}$的兩種情況，可視為同一條件下，兩向展開圖的對換，所以路徑長短的比較，也只需直接交換結果，同理(2)和(4)也是。

又討論(1)和(2)即$M_{\overline{AC}}=\frac{d}{c}\geq m_{\overline{BG}}=\frac{a-b-d}{a-b-c}$和$M_{\overline{AC}}=\frac{d}{c}\leq m_{\overline{BG}}=\frac{a-b-d}{a-b-c}$的兩種情況只是將同一展開圖中的起點和終點對調，路徑長的結果相同，(3)和(4)也是。



(圖 1-7)

我們可以從圖 1-7 看出，$m_{\overline{AC}}$(紅) > $m_{\overline{CG}}$(藍)時，$m_{\overline{AG}}$(紅)介於兩者之間，也就是$m_{\overline{AC}}>m_{\overline{AG}}>m_{\overline{CG}}$

所以當$m_{\overline{AC}}>m_{\overline{CG}}$時，$m_{\overline{AC}}>m_{\overline{AG}}$，即$\overline{AG}$在展開圖內，同理若$m_{\overline{BG}}>m_{\overline{CG}}$則$\overline{CB}$在展開圖內。假設同時成立$\overline{AG}$及$\overline{CB}$在展開圖內，由於$\overline{AB}$(黑)位於兩條線中間，所以$\overline{AB}$在展開圖內。

由上可知我們僅需討論$m_{\overline{CG}}$與$m_{\overline{AC}}$、$m_{\overline{BG}}$的關係。

綜合以上我們只需在(1)$m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{AC}}$的前提下討論(斜率 1 非重點不放入討論)$m_{\overline{CG}}$($M_{\overline{CG}}$)的大小即可包含所有的情況，討論如下:

(1) $m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{AC}}\geq M_{\overline{CG}}$

因為圖 1-5： $m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{CG}}$， $m_{\overline{BG}}\geq m_{\overline{CG}}$

所以$m_{\overline{AC}}\geq m_{\overline{AG}}$， $m_{\overline{BG}}\geq m_{\overline{CB}}$

可知圖 1-5 中的$\overline{AB}$在展開圖內

同理圖 1-6： $M_{\overline{AC}}\geq M_{\overline{CG}}, M_{\overline{BG}}\geq M_{\overline{CG}}$

圖 1-6 中的$\overline{AB}$也在展開圖內

圖 1-5 中$\overline{AB}$的長度為$\sqrt{(a+b-c+d)^2+(2a-b+c-d)^2}$

圖 1-6 中$\overline{\mathrm{AB}}$的長度為$\sqrt{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})^2+(2\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})^2}$

圖 1-5：$(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})-(2\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})=-a+2b-2c+2d$

圖 1-6：$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})-(2\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})=-a+2b+2c-2d$

$\because \mathrm{c} \geq \mathrm{d}$

$\because 1 \geq \mathrm{m}_{\overline{\mathrm{CG}}}=\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}$， $\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{CG}}}=\frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{b}}$

$\therefore 2\mathrm{b} \geq \mathrm{a}$

故$-a+2b \geq 0$，$2c-2d>0$，$2c+2d<0$

$|-a+2b-2c+2d \geq |-a+2b+2c-2d|$

$\Longrightarrow$ 根據引理 1，圖 1-6 的最短路徑長≥圖 1-5 的最短路徑長

$\Longrightarrow$ $\overline{\mathrm{AB}}(\text{圖 } 1-5)$的路徑必為最短(或相等)

有最短路徑$\sqrt{(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})^2+(2\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})^2}$，由於(a,b,c,d)為自變數，故不展開

(2) $\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{AC}}} \geq \mathrm{m}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$

若$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}=\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$則與前重複，故$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}>\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$

由上可知$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}>\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$，故$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}}>\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$，所以$\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{AC}}}>\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{BG}}}$

$\Longrightarrow \mathrm{m}_{\overline{\mathrm{AC}}}>\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}>\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$

因為圖 1-5： $\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{AC}}}>\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{CG}}}$， $\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{m}_{\overline{\mathrm{CG}}}$

可知圖 1-5 中的$\overline{\mathrm{AB}}$在展開圖內

因為圖 1-6：$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}<\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}, \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}$

可知圖 1-6 中的$\overline{\mathrm{AB}}$不在展開圖內，但$\overline{\mathrm{BC}}$在展開圖內

有路徑$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CG}}+\overline{\mathrm{BG}}$

但可知$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}(\text{圖 } 1-6)>\overline{\mathrm{AB}}(\text{圖 } 1-6) \geq \overline{\mathrm{AB}}(\text{圖 } 1-5)$

有最短路徑$\sqrt{(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c}+\mathrm{d})^2+(2\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})^2}$

(3) $\mathrm{m}_{\overline{\mathrm{AC}}} \geq \mathrm{m}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}} \geq \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{AC}}}$

若$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}=\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}}$則與前重複，故$\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{CG}}}>\mathrm{M}_{\overline{\mathrm{BG}}}$

可得$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{CG}} > M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

因為圖 1-5： $m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{CG}}$， $m_{\overline{BG}} \geq m_{\overline{CG}}$

可知圖 1-5 中的$\overline{AB}$在展開圖內

因為圖 1-5：$M_{\overline{AC}} < M_{\overline{CG}}, M_{\overline{BG}} < M_{\overline{CG}}$

可知圖 1-6 中的$\overline{AB}$不在展開圖內，且有路徑$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$

$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$(圖 1-6)> $\overline{AB}$(圖 1-6)> $\overline{AB}$(圖1-5)

有最短路徑$\sqrt{(a+b-c+d)^2+(2a-b+c-d)^2}$

(4) $m_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

若$M_{\overline{CG}} = m_{\overline{BG}}$則與前重複，故$M_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}}$

可得$m_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}}$，且可知$m_{\overline{AC}} > m_{\overline{BG}}$，所以$M_{\overline{BG}} > M_{\overline{AC}}$

$\Rightarrow m_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} > M_{\overline{AC}}$

因為圖 1-5： $m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{CG}}$， $m_{\overline{BG}} < m_{\overline{CG}}$

可知圖 1-5 中的$\overline{AB}$不在展開圖內，但$\overline{AG}$在展開圖內

故可走路徑$\overline{AG} + \overline{GC} < \overline{AB} + \overline{CG} + \overline{BG}$

因為圖 1-6：$M_{\overline{AC}} < M_{\overline{CG}}, M_{\overline{BG}} < M_{\overline{CG}}$

可知圖 1-6 中的$\overline{AB}$不在展開圖內，且有路徑$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$

$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$(圖 1-6)= $\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$(圖 1-5)>$\overline{AG} + \overline{GC}$(圖 1-5)

有最短路徑$\sqrt{(c+2b)^2+(a+d)^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}$

(5)$M_{\overline{CG}} \geq m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

若$M_{\overline{CG}} = m_{\overline{AG}}$則與前重複，故$M_{\overline{CG}} > m_{\overline{AC}}$

$\Rightarrow M_{\overline{CG}} > m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

因為圖 1-5： $m_{\overline{AC}} < m_{\overline{CG}}$， $m_{\overline{BG}} < m_{\overline{CG}}$

可知圖 1-5 中的$\overline{AB}$不在展開圖內。

故可走路徑$\overline{AB} + \overline{CG} + \overline{BG}$

因為圖 1-6：$M_{\overline{AC}} < M_{\overline{CG}}, M_{\overline{BG}} < M_{\overline{CG}}$

可知圖 1-6 中的$\overline{AB}$不在展開圖內。

故可走路徑$\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}$

$\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}$(圖 1-6)= $\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}$(圖 1-5)

有最短路徑$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}+\sqrt{2b^2+a^2}$

歸納：

$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} > \boldsymbol{m_{\overline{CG}}}$時有最短路徑$\sqrt{(a+b-c+d)^2+(2a-b+c-d)^2}$

$m_{\overline{AC}} \geq \boldsymbol{m_{\overline{CG}}} > m_{\overline{BG}}$時有最短路徑$\sqrt{(c+2b)^2+(a+d)^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}$

$\boldsymbol{m_{\overline{CG}}} > m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}}$時有最短路$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}+\sqrt{2b^2+a^2}$

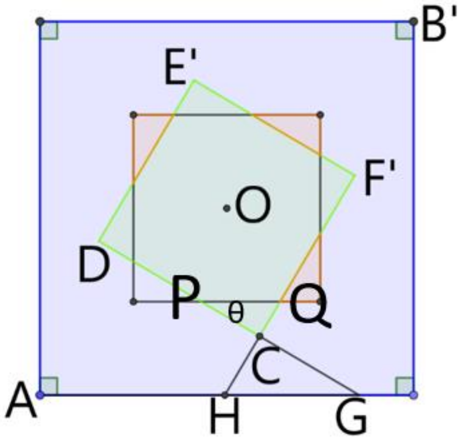
(三)正方體與通道的邊長為任意比且通道於中心旋轉

在研究通道在中央、正立方體頂點間螞蟻爬行的最短路徑時想到，如果將通道旋轉如圖 1-8，路徑會怎麼改變？我們畫出圖 1-8 的前視圖，如圖 1-9，我們將通道以正方形底面之中心 O 點為軸心順時鐘旋轉，設其旋轉的角度(∠QPC)為 θ。

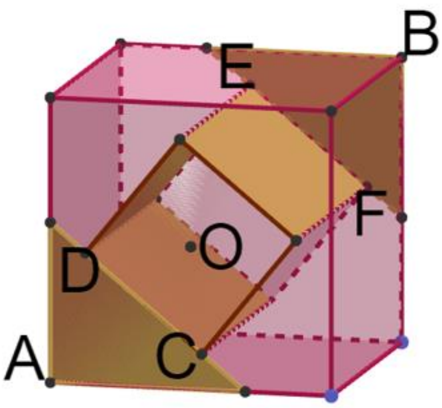
接著我們討論使路徑成為直線的情況，若要使路徑成為直線，$\overline{AB}$必須經過$\overline{DC}$、$\overline{FE}$才能在展開圖內，即 $m_{\overline{AD}} \geq m_{\overline{AB}}$，$m_{\overline{BE}} \geq m_{\overline{AB}}$，利用此條件便可尋找臨界點，也就是可使路徑成一直線時的角度範圍。根據對稱性可知$\overline{AC}=\overline{BE}$，$\overline{AD}=\overline{BF}$。

⟹兩向展開圖互為起、終點對換，故只需計算其中一者相等即可。

⟹旋轉 θ 度與旋轉 90-θ 不造成最短路徑改變



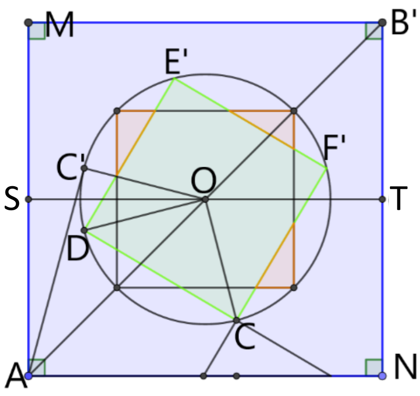
(圖 1-8)



(圖 1-9)

在畫出展開圖(圖 1-11)後，我們發現臨界點為A、E、B 共線或 A、D、B 共線時之角度，而由於旋轉角度為 90-θ 與 θ 時的展開圖相同，我們僅討論當 θ≤ 45°的情況。

接下來我們證明 θ≤ 45°時$m_{\overline{BE}} > m_{\overline{AD}}$，其證明如下：



如圖 1-10，C'是C點以$\overline{AB'}$為對稱軸的對稱點。

(圖 1-10)

設$\angle C'OS = x^o$

則 $\angle COA = (45 + x)^o$，$\angle C'OC = (90 + 2x)^o$

$\angle C'OD = (2x)^o$

$\Longrightarrow \angle SOD = x^o$

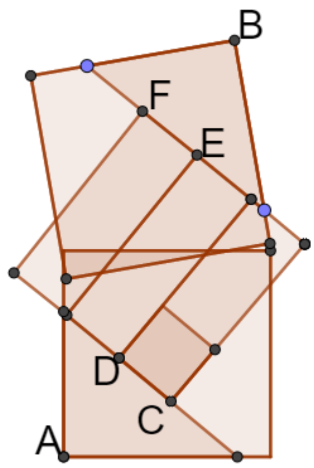
$\Longrightarrow \angle C'OS = \angle POD \Longrightarrow C'$是$D$點以$\overline{ST}$為對稱軸的對稱點

$\Longrightarrow$C′點與 D 點到$\overline{AM}$的距離相等

又 θ≤ 45°時，因為$\angle DOA \leq \angle SOA$，所以$\overline{AC'} \geq \overline{AD}$

$\Longrightarrow m_{\overline{AC'}} \geq m_{\overline{AD}}$

$\Longrightarrow$ 當 $m_{\overline{AD}} \geq m_{\overline{AB}}$ 臨界點發生在$m_{\overline{AD}} = m_{\overline{AB}}$時（如圖 1-11）



$m_{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AJ}+a}{2b}$，$m_{\overline{AD}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{DJ}}$

(圖 1-11)

如圖 1-9 中，$\angle QPC = \angle CGH =$θ

設$\overline{HG} = \alpha$

$\overline{CH} = \alpha\ \sin\theta$，$\overline{CG} = \alpha\cos\theta$

$\overline{GK} = \alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b$

$\overline{AK} = \sin\theta\,[\alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b]$，$\overline{AG} = \cos\theta\,[\alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b]$

$\overline{AJ} = \sin\theta\cos\theta\,[\alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b]$

$\overline{DJ}$=$\overline{KJ} - \overline{KD}$=$\overline{AK}\sin\theta - \overline{CH} = \sin^2\theta\,[\alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b] - \alpha\ \sin\theta$

a=$\overline{AN} = \overline{HN} + \overline{AG} - \overline{HG} = \overline{AK} + \overline{AG} - \overline{HG} = (\sin\theta + \cos\theta)\,[\alpha\,(\sin\theta + \cos\theta) + b]$-α

$$\alpha+2\alpha\sin\theta\cos\theta-\alpha=a-b(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$\alpha=\frac{a-b(\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\overline{AJ}=\sin\theta\cos\theta\,[\frac{a-b(\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}\ \ (\sin\theta+\cos\theta)+b]=\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b}{2}$$

$$\overline{DJ}=\sin^2\theta\,[\alpha\,(\sin\theta+\cos\theta)+b]-\alpha\ \sin\theta=\alpha\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+b\sin^2\theta$$

$$=\frac{a-b(\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}(\sin\theta\cos\theta)\,(\sin\theta-\cos\theta)+b\sin^2\theta=\frac{a(\sin\theta-\cos\ \theta)+b}{2}$$

$$m_{\overline{AD}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{DJ}}=\frac{\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b}{2}}{\frac{a(\sin\theta-\cos\ \theta)+b}{2}}=\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b}{a(\sin\theta-\cos\ \theta)+b}$$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AJ}+a}{2b}=\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b+a}{2b}$$

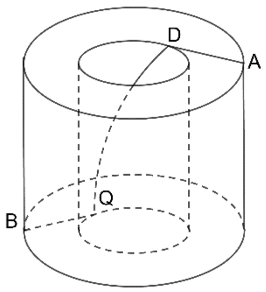
令$m_{\overline{AD}}=m_{\overline{AB}}=\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b}{a(\sin\theta-\cos\ \theta)+b}=\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b+a}{2b}$，化簡過後為$4a^4\sin^4\theta+(4a^4-2a^3b)\sin^3\theta+(-2a^4+8a^2b^2)\sin^2\theta+(-2a^4+6a^3b-2a^2b^2-4ab^3)\sin\theta+(a^4-2a^3b-a^2b^2+b^4)=0$，解出θ 後，如果定義$\angle CPQ=\theta'$，且滿足 $\theta\leq\theta'\leq 90-\theta$，則有最短路徑$\sqrt{(2b)^2+(2\overline{AJ}+a)^2}=\sqrt{4b^2+[a(\sin\theta'+\cos\theta')-b+a]^2}$

二、圓柱中心挖一條圓柱形通道，兩上下圓周上任意點的最短路徑

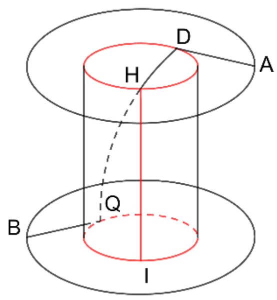
在完成正立方體一條通道的研究後，我們想知道如果將正立方體和其通道都換成圓柱，螞蟻爬行的最短路徑為何，我們先從圓柱半徑與通道半徑為 2： 1 開始研究。

(一)圓柱半徑：通道半徑＝2：1

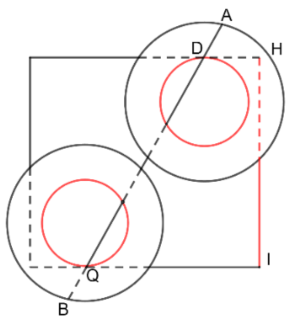
如圖 2-1，圓柱的中央有一條圓柱通道，假設底面的半徑為 2a，通道底面的半徑為 a，圓柱柱高為 h，D 點和 Q 點分別為通道之上下底面圓周上的一點，A、B 分別是圓柱之上、下底面圓周上相隔最遠的點。



(圖 2-1)



(圖 2-2)



(圖 2-3)

1. 製作展開圖

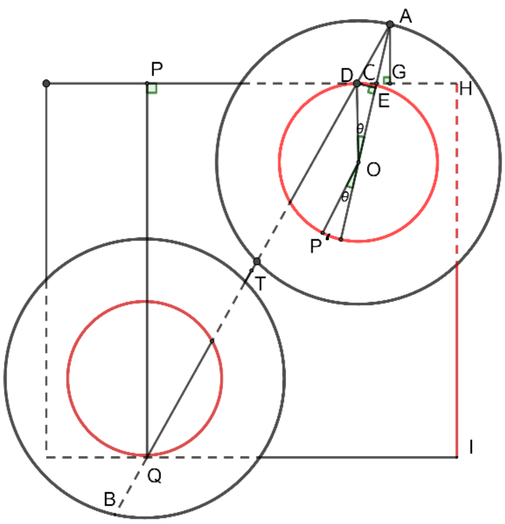
我們發現它無法像有通道的正方體一樣，展開成彼此不重疊且緊密連接在平面上的圖形，所以我們將圖 2-1 中只留下路徑可能經過的表面，並切割將通道展開成矩形，然後將此矩形疊在兩底面上方，使上、下底面的小圓(紅色圓)與矩形分別相切於 D、Q 點，如圖 2-3。

2. 求出最短路徑

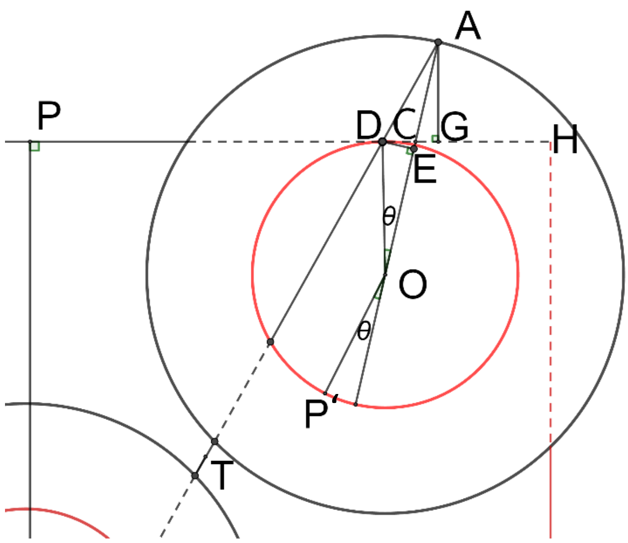
如圖 2-4，在展開圖中作矩形 PHIQ，T 為$\overline{DQ}$之中點，若以 T 點為對稱中心，則 A、D 點的對稱點分別為 B、Q 點，因此只要 A、D、T 共線，A、D、Q、B 就會共線，便能得到最短路徑及其長度。

(1) D 點的位置

若 A、D、Q、B 共線，$A \to D \to Q \to B$的路徑最短，此時$m_{\overline{AD}}=m_{\overline{BQ}}=m_{\overline{DQ}}$。



(圖 2-4)



(圖 2-5)

如圖 2-5(圖 2-4 的放大圖)，$\angle AOD = \theta$

$\because \overline{OE} = a\,,\overline{AO} = 2a \therefore \overline{DE} = a\sin\theta \ \overline{CO} = a\sec\theta$

$\Longrightarrow \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{CO} = 2a - a\sec\theta$。

$\because\ \Delta COD \sim \Delta CAG$ (AA 相似)

$$\overline{AG} = \overline{OD} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{CO}} = \frac{a(2-\sec\theta)}{\sec\theta} = 2a\cos\theta - a$$

$$\overline{DG} = \overline{CD} + \overline{CG} = \overline{CO}\sin\theta + \overline{AC}\sin\theta = \overline{AO}\sin\theta = 2a\sin\theta$$

$$\Rightarrow M_{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{DG}} = \frac{2\cos\theta - 1}{2\sin\theta} = \cot\theta - \frac{1}{2}\csc\theta$$

$\overline{PD} =$ 弧$P'D = a\angle DOP' = a(\pi - 2\theta)$

$$M_{\overline{DQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PD}} = \frac{h}{a(\pi - 2\theta)}$$

由 j、k 推得 $\frac{h}{a(\pi-2\theta)} = \cot\theta - \frac{1}{2}\csc\theta$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}\pi - \theta)(2\cot\theta - \csc\theta) = \frac{h}{a}$$

(2) D 點存在性

我們可知當 $\theta = 60^o$ 時

$\because \overline{AO} : \overline{OD} = 2:1$

$\therefore \angle ODA = 90^o = \angle ODG$

$\Rightarrow \overline{AD}$ 與 $\overline{GD}$ 重合，即$\angle ADG = 0^o$

又當 $\theta = 0^o$時，$\overline{AD} \perp \overline{GD}$，$\angle ADG = 90^o$

根據角度變化的連續性可得，必存在正實數 k，使$\angle ADG = k^o$時，A、D、Q、B 共線。

3.最短路徑長

最短路徑長=$2\overline{AD} + \overline{QD}$

$$\overline{AE} = \overline{AO} - \overline{OE} = a(2 - \cos\theta)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{AE}^2} = a\sqrt{\sin\theta^2 + 4 - 4\cos\theta + \cos\theta^2} = a\sqrt{5 - 4\cos\theta}$$

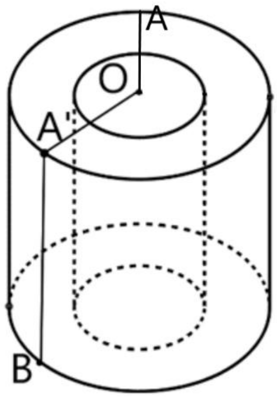
$$\overline{QD} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{(a(\pi - 2\theta))^2 + h^2}$$

$$2\overline{AD} + \overline{QD} = 2a\sqrt{5 - 4\cos\theta} + \sqrt{(a(\pi - 2\theta))^2 + h^2}$$

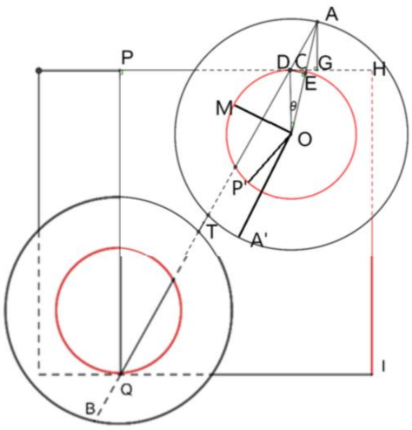
(二)任意的起點、終點和半徑

1.變數

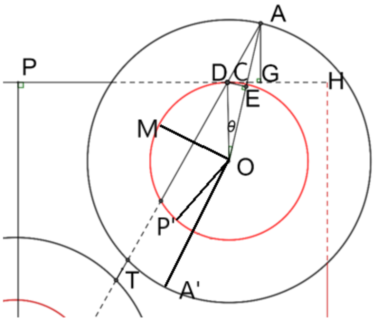
設$\angle AOA' = \theta_2$，$\overline{OE} = \overline{OD} = a$，$\overline{OA} = a + b$



(圖 2-6)



(圖 2-7)



(圖 2-8)

2. 方法

如圖 2-6，起點 A 和終點 B 別在圓柱上下底面圓周上的任意點，上方底面圓周上的 A′點在 B 點的正上方。計算方法同理如前。

3.計算

如圖 2-8(圖 2-7 的局部放大圖)，設A′、P′點分別是 A、D 點以$\angle AOA'$之平分線$\overline{OM}$為對稱軸之對稱點

，則$\overline{AD} = \overline{AP'}$

$\overline{DE} = a\sin\theta$

$\overline{CO} = a\sec\theta$

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{CO} = a + b - a\sec\theta$

$\because\ \Delta COD \sim \Delta CAG$ (AA 相似)

$$\overline{AG} = \overline{OD} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{CO}} = a\left(\frac{a + b - a\sec\theta}{a\sec\theta}\right) = (a + b)\cos\theta - a$$

$$\overline{DG} = \overline{CD} + \overline{CG} = \overline{CO}\sin\theta + \overline{AC}\sin\theta = \overline{AO}\sin\theta = (a + b)\sin\theta$$

$$m_{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{DG}} = \frac{(a+b)\cos\theta - a}{(a+b)\sin\theta} = \cot\theta - \frac{a}{a+b}\csc\theta \ -①$$

$$m_{\overline{DQ}} = \frac{h}{\overline{DP}} = \frac{h}{弧\ DP'} = \frac{h}{a(\theta_2 - 2\theta)}$$

$$m_{\overline{AD}} = \cot\theta - \frac{a}{a+b}\csc\theta$$

$$\Rightarrow \cot\theta - \frac{a}{a+b}\csc\theta = \frac{h}{a(\theta_2 - 2\theta)}$$

$$(\theta_2 - 2\theta)\left(\cot\theta - \frac{a}{a+b}\csc\theta\right) = \frac{h}{a}$$

3.路徑長

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{(a + b - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + b^2 + 2ab - 2a(a+b)\cos\theta}$$

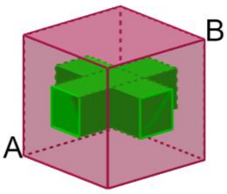
$$\overline{DQ} = \sqrt{(a(\theta_2 - 2\theta))^2 + h^2}$$

最短路徑長$= 2\sqrt{2a^2 + b^2 + 2ab - 2a(a+b)\cos\theta} + \sqrt{(a(\theta_2 - 2\theta))^2 + h^2}$

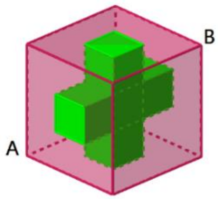
三、兩條通道、三條通道在中央時，正立方體頂點間螞蟻爬行的最短路徑

(一)兩條通道

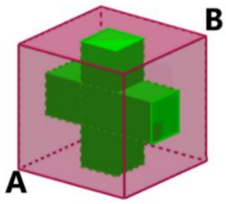
當兩條通道在中央時，會有圖 3-1、3-2、3-3，三種立體圖形，因為他們的路徑長會相同，所以我們只需討論圖 3-1，以下分進通道及不進通道兩部分討論：



(圖 3-1)



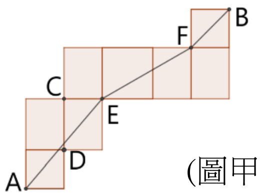
(圖 3-2)



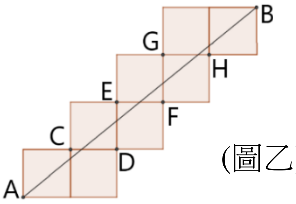
(圖 3-3)

1.A 進入通道再到 B

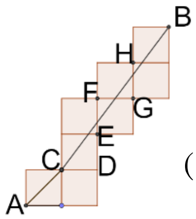
當螞蟻從 A 點出發進入通道之後出口會有兩個，在我們的推導過程中發現，a、b 的大小 關係會影響出口的選擇，所以我們先將圖 3-1 的三種展開圖畫出，分別為一個通道走法(圖甲)，和兩個通道走法(圖乙)、(圖丙)，再分別就 a、b 的大小關係、圖甲、圖乙、圖丙矩形的長寬差和$\overline{AB}$是否在展開圖內部加以討論，討論如下：



(圖甲)



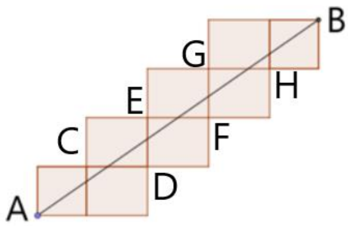
(圖乙)



(圖丙)

因為 a、b 的大小關係會影響展開圖中各線段的斜率，而這些線段的斜率決定了最短路徑的走法，所以我們先倒過來，以能走直線、不能走直線的情況分別推導出 a、b 的大小關係，再以這些大小關係分類，討論出各範圍中的最短路徑。

我們以圖乙從 A 到 B 可走直線為例推導出 a、b 的大小關係，說明如下：



(圖 3-4)

例：如圖 3-4 當$m_{\overline{AH}}<m_{\overline{AB}}<m_{\overline{AG}}$時，$\overline{AB}$在展開圖內，

即從 A 到 B 可走直線，因為$m_{\overline{AB}}=\frac{2(a-b)}{a-b+3b}=\frac{2(a-b)}{a+2b}$、$m_{\overline{AC}}=1$、

$m_{\overline{AH}}=\frac{3\times\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\frac{a-b}{2}+3b}=\frac{3(a-b)}{a+5b}$，

$\frac{3(a-b)}{a+5b}\leq\frac{2(a-b)}{a+2b}\leq 1$

$\because 2(a-b)\leq a+2b$

$\therefore a\leq 4b$

我們利用上述方法，推出所有 a、b 大小關係中的最短路徑的走法，整理如下表

展開圖的型式 \ 範圍	$a<2b$	$2b\leq a\leq 3b$	$3b<a\leq\frac{3+\sqrt{17}}{2}b$	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}b<a\leq 4b$	$4b<a\leq 5b$	$a>5b$
甲	三條折線($\overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FB}$)		四條折線($\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FB}$)			
乙	一條線段($\overline{AB}$)				三條折線($\overline{AC}+\overline{CH}+\overline{HB}$)	
丙	三段折線 ($\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EB}$)	兩段折線 ($\overline{AC}+\overline{CB}$)		三段折線 ($\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}$)		四段折線 ($\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DG}+\overline{GB}$)

以下是我們就表中所有 a、b 的大小關係討論出的最短路徑

(1) $b < a < 2b$時，路徑長算出來後圖甲和圖丙的路徑長都相同，以圖甲和圖乙比較後發現，如果圖甲和圖乙都是走直線，則路徑長相等，但圖甲並非走直線而是走折線，故圖乙較短，在這個範圍時圖乙的路徑長為最短，最短路徑長為

$\sqrt{(a+2b)^2+(2a-2b)^2}$

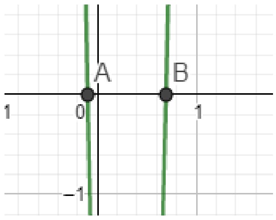
(2)在 $2b \le a \le 3b$ 時，已知$\overline{AC}=\overline{F'B'}$，在此只討論$\overline{CB}$與$\overline{A'E'}+\overline{E'F'}$之長度關係。

$\because \overline{A'E'}+\overline{E'F'} > \overline{A'F'}$，若$\overline{A'F'} > \overline{CB}$，則$\overline{A'E'}+\overline{E'F'} > \overline{CB}$，$\overline{A'F'} > \overline{CB}$是根據引理一，得證$\overline{A'E'}+\overline{E'F'}+\overline{F'B'} > \overline{AC}+\overline{CB}$要將令兩式相等來比，得

$36a^4-56a^3b+76a^2b^2-32ab^3-4b^4=0$，令$x=\frac{a}{b}$，得方程式為

$36x^4-56x^3+76x^2-32x-4=0$，交點 A(-0.1,0)B(0.69,0)(如圖 3-5)兩點皆不在範圍中，所以表示圖乙較短，最短路徑長為

$\sqrt{(a+2b)^2+(2a-2b)^2}$



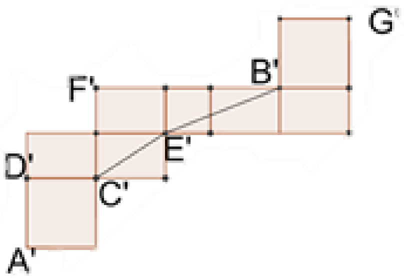
(圖 3-5)

(3) $3b < a \le \frac{3+\sqrt{17}}{2}b$時，$\overline{CB}$長寬差為$|b|$, $\overline{C'B'}$長寬差為$|a-2b|$，

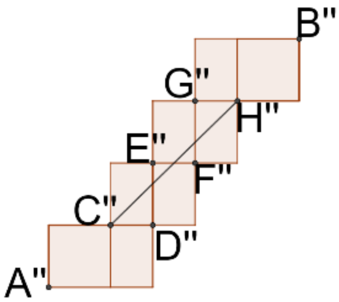
$|b| < |a-2b|$，

所以在$\overline{CB}$這展開圖上走直線時就會比$\overline{C'B'}$短，而$\overline{C'B'}$無法走一直線，因此此時$\overline{CB}$一定比較短，此時圖甲和圖丙兩個展開圖比較後是圖甲的路徑長較短，此時圖乙是走折線，在刪掉相同路徑($\overline{A'C'}$、$\overline{B'G'}$、$\overline{A''C''}$、$\overline{B''H''}$)後，得圖 3-6、3-7，算出$\overline{C'G'}$的長寬差 $= a-2b$。$a-4b=\overline{C''B''}$的長寬差，故無論如何$\overline{C''B''}$較短 $\Rightarrow$圖乙較短，此時最短路徑長為

$\sqrt{(a+2b)^2+(2a-2b)^2}$



(圖 3-6)

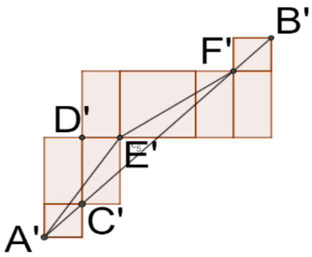


(圖 3-7)

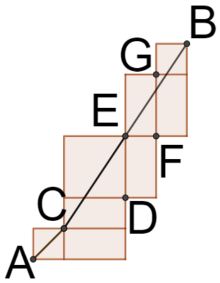
(4) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}\text{b} < \text{a} \le 4\text{b}$時，因為在將圖甲、圖乙和圖丙相等的部分刪除後得，圖乙的路徑長較短，最短路徑長為$\sqrt{(\text{a}+2\text{b})^2+(2\text{a}-2\text{b})^2}$

(5)$4\text{b} < \text{a} \le 5\text{b}$時，圖甲、圖乙和圖丙都是走折線，在圖 3-8 和圖 3-9 刪掉相同路徑($\overline{A'C'}$、$\overline{AC}$)後，比較後得到圖甲較短，再將圖甲和圖乙刪掉相同路徑($\overline{A'C'}$、$\overline{AC}$)後得圖 3-8、圖 3-9，算出$\overline{C'B'}$的長寬差 $=$ a $-$ 2b。a $-$ 4b $=$ $\overline{C''B''}$的長寬差，故無論如何 $\overline{C''B''}$較短，圖乙路徑長最短，最短路徑長為$(\text{a}-\text{b})\sqrt{2}+\sqrt{(3\text{b})^2+(\text{a}-\text{b})^2}$。

(6) $5\text{b} < \text{a}$時，先將相同的路徑$\overline{A'C'}$、$\overline{B'G'}$、$\overline{A''C''}$、$\overline{H''B''}$刪除後，再利用引理一可以得圖乙的路徑長最短，路徑長為$\sqrt{(\text{a}+2\text{b})^2+(2\text{a}-2\text{b})^2}$



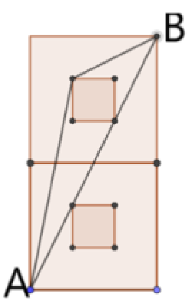
(圖 3-8)



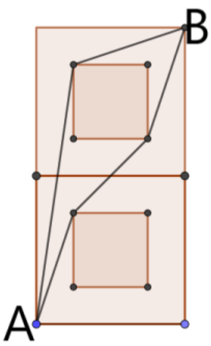
(圖 3-9)

2. 從 A 不經過通道到 B

當我們要找出只走正方體表面的路徑(不經通道)時，我們也會分成三個範圍(a=3b、a<3b、a>3b)來討論，，這三個範圍分別代表著可使路徑成一直線及不可成一直線，在 a≥3b 時$\overline{AB}$可連成一直線(如圖 3-10)，但利用引理一來比較之後，走通道內的路徑長會小於走外面的路徑長。在 a<3b 時$\overline{AB}$不可連成一直線(如圖 3-11)，但$\overline{AB}$連成一直線時，利用引理一也可以得出走通道裡面的路徑長還是比走外面直線的$\overline{AB}$還要短，因為走外面的折線$\overline{AB}$更不可能比走通道內的路徑還要短。



(圖 3-10)



(圖 3-11)

綜合 1、2 走外面的路徑長一定比走通道的路徑長還要長，所以從 A 到 B 在兩個通道的情況的最短路徑長如 1 的討論

(二)　三條通道

我們發現，當螞蟻在正方體中爬行到三條通道的交叉處時，為求路徑最短，所以在往上或者是往右的路線選擇其一，三條通道的路徑會與圖乙路徑一樣，$a \leq 4b$ 時路徑為$\overline{AB} = \sqrt{(a+2b)^2+(2a-2b)^2}$，$a > 4b$ 時路徑為$\overline{AC}$+$\overline{CH}$+$\overline{HB}$=(a-b)$\sqrt{2}$+$\sqrt{(3b)^2+\ (a-b)^2}$。

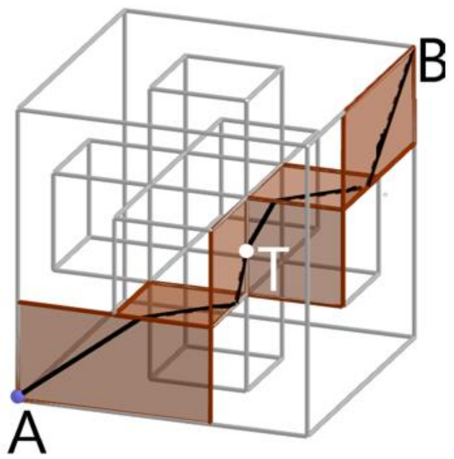
當正方體邊長為 3 且通道邊長為 1 時，圖形恰為一階門格海綿，此時依據$a \leq 4b$有最短路徑$\sqrt{41}$

四、門格海綿

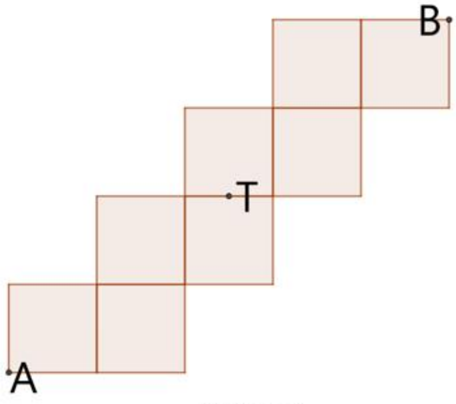
首先設門格海綿的邊長為 3，且n階門格海綿以M_n表示。

(一) M_1最短路徑

M_1的最短路徑及其長度可根據前述三條通道得知。如圖 4-1 的黑色路徑所示為M_1的最短路徑，其路徑有對稱中心 T 點，M_1展開圖(圖 4-2)以 T 對稱。



(圖 4-1)



(圖 4-2)

(二)M_2最短路徑

M_2立體圖為圖 4-3，我們分為以下兩種情況討論：

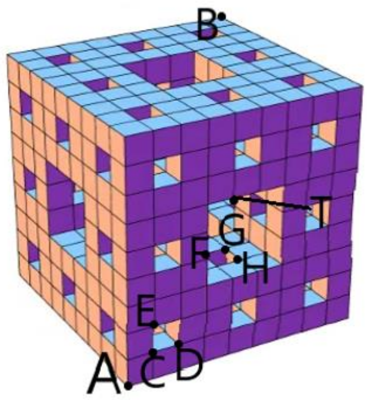
1.走M_1的通道

我們在M_1的展開圖上畫出M_2的正方形，如圖 4-4，因爲展開圖對稱故只呈現 A

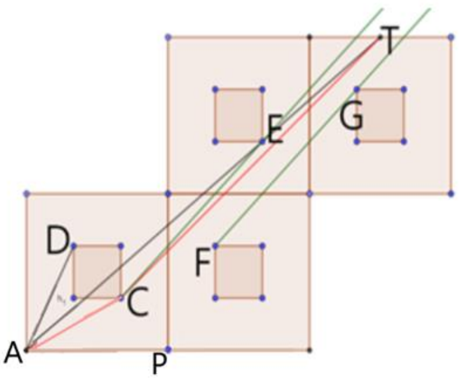
點到 T 點的路徑。

我們將圖 4-4 中各點座標化，並設 A(0,0)，P(1,0)，則有

$T(2.5,2)$、$C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$、$D(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$、$E(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$、 $F(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$、$G(\frac{7}{3},\frac{5}{3})$。因為$\overline{AT}$經過$M_2$的通道，所以必須改走$\overline{AC}$或$\overline{AD}$，但$\overline{DT}$會經過$M_2$的通道，故選擇走$\overline{AC}+\overline{CT}$。由於$m_{\overline{CT}}=\frac{5}{5.5}=\frac{10}{11}$，$m_{\overline{CE}}=m_{\overline{FG}}=1$，且$\overrightarrow{FG}$與直線 y=2 之交點的座標為$(\frac{8}{3},2)$。故$\overline{CT}$不會經過$M_2$的通道。因此$M_2$走$M_1$*通道*的路徑為$2(\overline{AC}+\overline{CT})=\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{3}\sqrt{221}≒6.446$



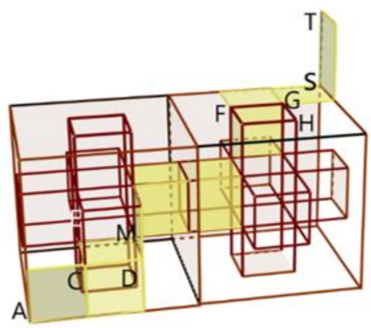
(圖 4-3)



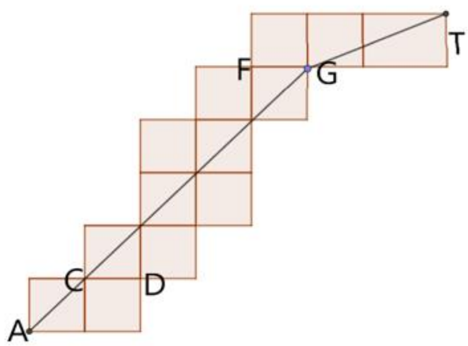
(圖 4-4)

2.走M_2的通道

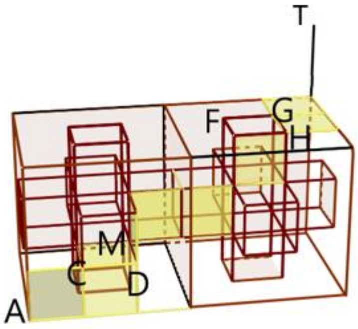
考慮從 A 點可能經過$\overline{FG}$或$\overline{HG}$走到 T 點，且經過$\overline{FG}$或$\overline{HG}$最短路徑分別為圖 4-5 或圖 4-6，分別經過$\overline{FG}$與$\overline{HG}$，其展開圖為圖 4-7、圖 4-8，討論如下：



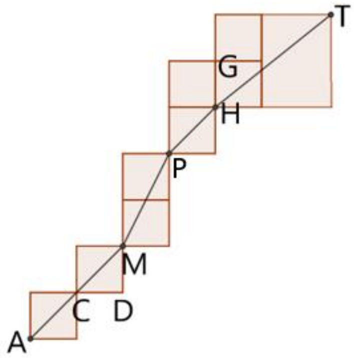
(圖 4-5)



(圖 4-7)



(圖 4-6)



(圖 4-8)

圖 4-5：$2(\overline{AG}+\overline{GT})=\frac{2}{3}(5\sqrt{2}+\sqrt{7.25})\fallingdotseq 6.509$

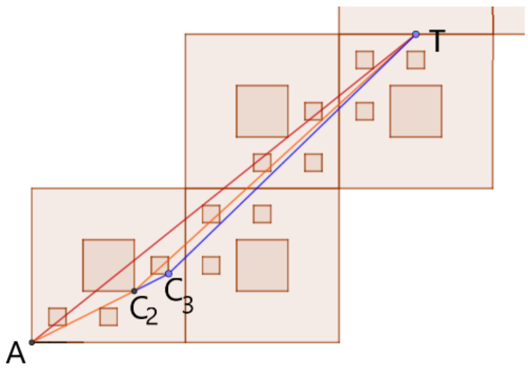
圖 4-6：$2(\overline{AM}+\overline{MP}+\overline{HP}+\overline{HT})=2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{6}\sqrt{41}\right)\fallingdotseq 6.454$

可知走M_1通道的路徑較以上兩者短。

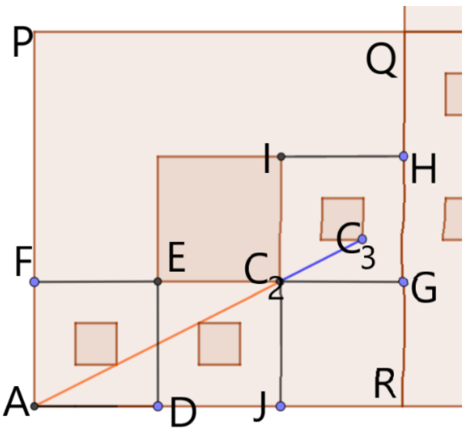
(三) M_n的最短路徑

據上，我們先行假設走M_1通道較走M_n通道短。

我們可以發現 C 為路徑的轉折點，故我們稱M_2之轉折點為C_2，M_3之轉折點為C_3。



(圖 4-9)



(圖 4-10)

1. M_3走M_1通道的路徑

如圖 4-9，我們在M_1的展開圖上畫出M_3的正方形，可見$\overline{C_3T}$會經過M_3的通道，所以將$\overline{AC_2}$延伸至C_3點。連接$\overline{C_3T}$，$C_3\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right)$，$M_{\overline{C_3T}}=\frac{28}{29}<1$，可知其中$\overline{AC_3}$與$M_3$的正方形之頂點共線（斜率為$\frac{1}{2}$）

故其路徑為$2(\overline{AC_3}+\overline{C_3T})$

2. M_n的計算

(1)$\overline{AC_2}$部分討論

如圖 4-10，可見$\overline{AC_2}$在正方形APQR與正方形AFED中的相對位置一樣，所以在M_4的展開圖中，可將正方形AFED比照正方形APQR，依此類推在M_n的展開圖中，$\overline{AC_n}$不會通過M_n的通道。

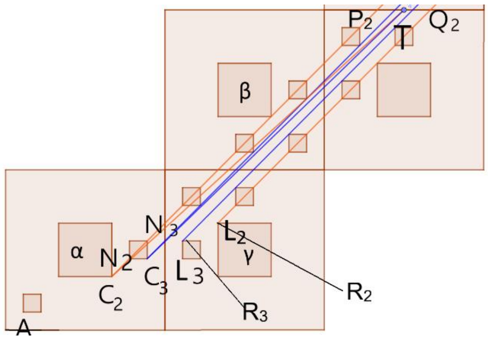
(2) $\overline{AC_n}$的討論

據上，在M_n的展開圖中，須將$\overline{AC}$延伸至C_n點，因為 A、C_2、C_3、C_4、...、C_n共線，由座標$C_2(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$、$C_3(\frac{8}{9},\frac{4}{9})$可推得$C_n(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i},\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i})$，且

$\overline{AC_n}$=$\sqrt{5}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}$。$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{AC_n}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$，$\lim\limits_{n\to\infty}C_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i},\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}\right)=C_n(1,\frac{1}{2})$。

(3) $\overline{C_nT}$的討論

如圖 4-10，從M_2、M_3可以看出離$\overline{C_2T}$、$\overline{C_3T}$最近的四條直線L_2、N_2與L_3、N_3斜率皆為 1，m_{N_2}可以由正方形 α 向右平移至正方形 γ 再向上平移至正方形



(圖 4-11)

β 得$m_{N_2}=1$。同理可成立於m_{L_2}，也成立於M_3中的(L_3,N_3)，乃至於M_n。故可知$m_{N_n}=m_{L_n}=1$。$m_{\overline{CT}}=\frac{2-\frac{1}{3}}{2.5-\frac{2}{3}}$，$m_{\overline{C_nT}}$=$\frac{2-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}}{2.5-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i}}$

$$\lim_{n\to\infty}m_{\overline{C_nT}}=\frac{2.5-1}{2-0.5}=1$$

a. N_n的討論

如圖 4-10，因為N_2過 C 點、N_3過C'點，故可推論N_n過C^n點。設N_n交 y=6 於P_n，可得$P_n(2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i},2)$ $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(2+0.5,2)$，重合 T 點，故此時$P_n$重合$\overline{C_nT}$，$\overline{C_nT}$仍不被$P_n$影響。

b. L_n的討論

$m_{L_n}=1\geq m_{\overline{AC_n}}$，只要兩者不相交則$\overline{AC_n}$在展開圖內

設L_n交首個正方形為R_n，則$R_2\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$、$R_3\left(\frac{10}{9},\frac{5}{9}\right)$

$R_n=(2-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i},1-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i})$，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n\left(2-1,1-\frac{1}{2}\right)=(1,\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n$與$\lim\limits_{n\to\infty}C_n$重合且$m_{L_n}=1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}L_n$與$\lim\limits_{n\to\infty}C_n$重合

$\Rightarrow \overline{C_nT}$亦不被$L_n$影響

由上可知對於正整數 n 且 n≥ 2 時，$\overline{C_nT}$皆可連線且可計算$\overline{C_nT}$。

$$\overline{C_nT}=\sqrt{\left(2.5-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i}\right)^2+\left(2-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}\right)^2}=\frac{1}{2\times 3^{n-1}}\sqrt{(2+3^n)^2+(1+3^n)^2}$$

M_n走M_1通道之路徑長：$2(\overline{AC_n}+\overline{C_nT})=$

$$2\left(\sqrt{5}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}+\frac{1}{2\times 3^{n-1}}\sqrt{(2+3^n)^2+(1+3^n)^2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{3^i}\sqrt{5}+\frac{1}{3^{n-1}}\sqrt{(2+3^n)^2+(1+3^n)^2}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}M_n2(\overline{AC_n}+\overline{C_nT})=3\sqrt{2}+\sqrt{5}\fallingdotseq 6.47$

3. M_n最短路徑討論

綜合以上我們在M_1展開圖上找到迭代路徑走法，卻因路徑的所有複雜狀況無法證明其為**最短**，以下是我們目前期望的幾個方法：

(1) 數學歸納法

即M_k成立時，M_{k+1}也將成立，我們嘗試在任意M_k找出M_k走M_k通道的迭代路徑，目前卻無所發現。

(2) 長寬差

在M_1時可見，走M_1通道較走原本無通道的正立方體路徑短，這是由於畫出展開圖後即使周長相同，路徑仍受長寬差影響。我們發現在 n 值增大後，方塊往往兩兩排成一列，而此時兩並排方塊走通道內與通道外長度相同我們亦嘗試用此證明 n 值增大路徑不可能變小。

陸、結論與討論

我們計算並證明出正方體中有一條通道置中、偏移、旋轉時，螞蟻在最遠兩頂點間爬行的最短路徑，且將一條通道置中的研究改為圓柱體，接著討論正方體中有兩、三條通道置中的情形，而後推廣至 n 階門格海綿（n 為任意正整數或無限大）時，我們認為在其中的一階門格海綿通道上爬行的路徑最短，有待證明。

在探討最短路徑時，本研究只在兩條通道置中的情況比較經過通道和未經通道的路徑長短，其餘的情況兩者長短顯而易見，因此略過。

在研究的過程中，我們完成正方體的探討後，嘗試尋找長方體的一般解，以及圓柱通道偏移時的情形，但由於變數過多，計算過於繁複，受限於時間無法完成，未來我們仍想試著突破，並研究在正方體中挖圓柱通道的碎形之最短路徑。

柒、參考資料

一、 https://en.wikipedia.org/wiki/Mengersponge

二、龍湘宜，楊宗穎、黃思齊，Menger Sponge 點邊面的探討，中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。

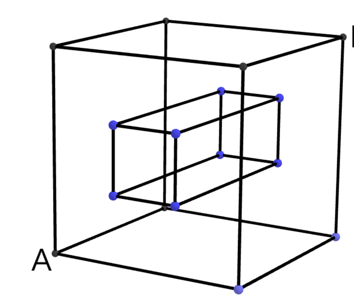
三、賴旼華、黃曉薇、洪筱茹，徐寶玉、賴俊源，長方體上的螞蟻--兩點間最短路徑之最大值研究。

【評語】030401

在正立方體中構造一個長方形通道，考慮由一頂點，經由通道走到對角的頂點的最短路徑的長度。對於通道的各種可能變化（大小、位置）作了分析。對於更進一步的，變更通道的數量及結構後，最短路徑的長度的變化問題，也做了一些討論。這是一個非常具有實用性的有趣作品。作者們利用簡單的工具，針對原始問題給出了完整的答案。想法頗具創意，值得嘉許。在說明主要的結論時，如果能將推導出的結果適當的整理，以定理或性質的方式來呈現會更為清楚。有部分的說明略嫌繁複，可以進一步的精簡。問題的最終目的是分析選擇哪一種路徑會最好，但由於計算出的結果較為複雜，以致於無法針對一般化的狀況給出結論，這點比較可惜。是否可以給出非計算式的論述，說明在更一般的情況下，最短路徑的選擇方式為何？如果能夠在這部分有所突破會更好。

作品海報

研究動機



在一次課程中，老師問我們一個問題：在邊長為3的正立方體中央挖一條邊長為1的四角柱通道，螞蟻在最遠兩頂點間爬行的最短路徑為何? 乍聽之下我們覺得走通道外的路徑較短，因為路徑在展開圖呈直線，但計算後發現其實是走通道內的路徑較短，這使我們大吃一驚，於是迫不及待地展開研究。

研究目的

一、找出螞蟻在挖一條四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑。
二、找出螞蟻在挖一條置中旋轉四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑。
三、找出螞蟻在挖一條置中圓柱通道的圓柱之上下底面圓周上任意兩點間爬行的最短路徑。
四、找出螞蟻在挖兩條及三條置中四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑。
五、找出螞蟻在門格海綿之頂點間爬行的最短路徑。

研究設備與器材

紙、筆、電腦 (Geogebra、 Microsoft Word)、智慧片、小木塊

研究方法與過程

名詞解釋

M1 M2 M3

門格海綿：給定正立方體，依序執行下列步驟：

（步驟 1）：把正立方體平均分割為3*3*3=27 個小正立方體
（步驟 2）：把每一面中間的小正立方體刪除掉
（步驟 3）：刪除正立方體正中央的小正立方體
把以上步驟重複操作，若操作n回後，則將所得的殘存形體稱為第n階『門格海綿』，並記為『M_n』。

通道：立體圖形中挖空的部分。
最短路徑：指螞蟻在立體圖形表面所能爬行的最短路徑。
在展開圖內：路徑在展開圖上能呈現直線， 而不會超出展開圖。

研究方法

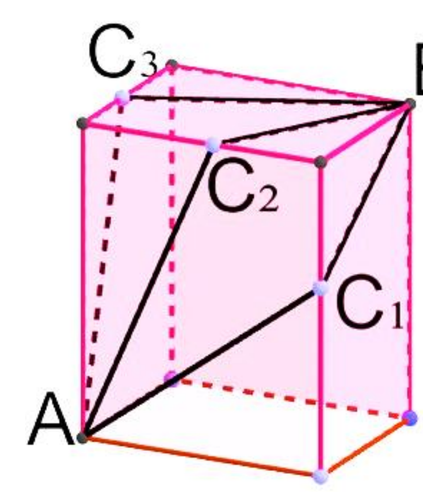


圖1

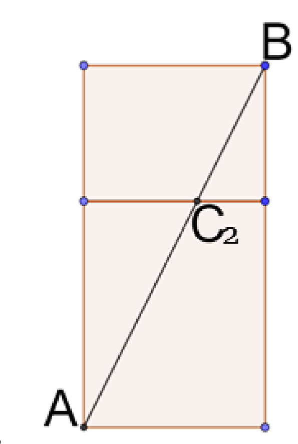


圖3

在本研究中，我們將螞蟻在立體圖形表面的路徑用展開圖的方式呈現，例如圖1中的長方體，假設A點為原點，從A到B的其中一個路徑為$\overline{AC_1}+\overline{C_1B}$，轉換成展開圖後就是圖2。另外，螞蟻經過兩面的路徑分別有圖2、圖3、圖4三種，而因我們探討的是最短路徑，所以必須在這三種路經之中選擇當中最短的。因此我們繪製展開圖及路徑時，皆滿足下列條件：

1.捷徑走法(過濾掉較遠路徑)
2.必須是可以行走的路徑(路徑在展開圖內)

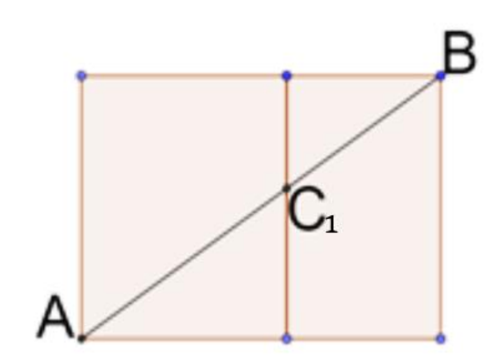


圖2

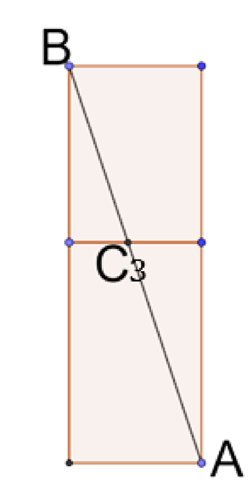


圖4

研究過程

研究結果

引理

<引理1> 兩等周長的長方形，長寬差較小者的對角線長較短

<引理2> 鏢形ACKI(如圖5)中，$\overline{IA}+\overline{IK}>\overline{CA}+\overline{CK}$

一、找出螞蟻在挖一條四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑

(一)正立方體邊長為3，中央四角柱通道底面正方形邊長為1時，有兩種情況：

不經通道：最短路徑長度$=3\sqrt{5}(\doteqdot 6.7)$

經過通道：最短路徑經過圖 6中的紫色區域，其展開圖為圖 7，最短路徑長度為$\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}=2\sqrt{2}+\sqrt{13}(\doteqdot 6.43)$

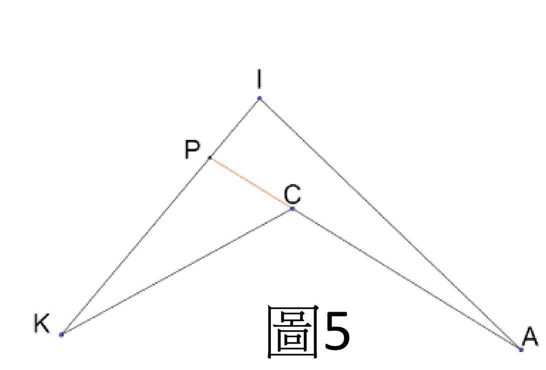


圖5

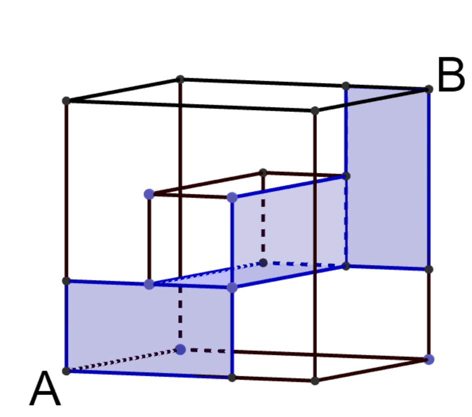


圖6

(二)正立方體邊長為 a ，中央四角柱通道底面正方形邊長為 b 時，有兩種情況：

1.當$\frac{a}{b}>2$時，最短路徑呈折線，其長度為$(a-b)\sqrt{2}+\sqrt{4b^2+a^2}$(圖 7)

2.當$\frac{a}{b}\leq 2$時，最短路徑呈直線，其長度為$\sqrt{5a^2-2ab+2b^2}$(圖 8)

(三)正立方體邊長為 a ，中央四角柱通道底面正方形邊長為 b 時

設$\overline{CN}=c,\overline{CQ}=d$其立體圖為圖9；圖10與圖11是其兩種型態的展開圖，斜率分別以m及M表示，以下分為兩階段討論：

第一階段 比較m_{AC}、m_{BG}、M_{BG}、M_{AC}的大小：

當$c\geq d$時 $\Rightarrow m_{AC}\geq 1\geq M_{AC}$， $m_{BG}\geq 1\geq M_{BG}$

(1)$m_{AC}\geq m_{BG}\geq 1\geq M_{BG}\geq M_{AC}$、(2)$m_{BG}\geq m_{AC}\geq 1\geq M_{AC}\geq M_{BG}$

當$c\leq d$時 $\Rightarrow m_{AC}\leq 1\leq M_{AC}$， $m_{BG}\leq 1\leq M_{BG}$

(3)$M_{AC}\geq M_{BG}\geq 1\geq m_{BG}\geq m_{AC}$ 、(4)$M_{BG}\geq M_{AC}\geq 1\geq m_{AC}\geq m_{BG}$

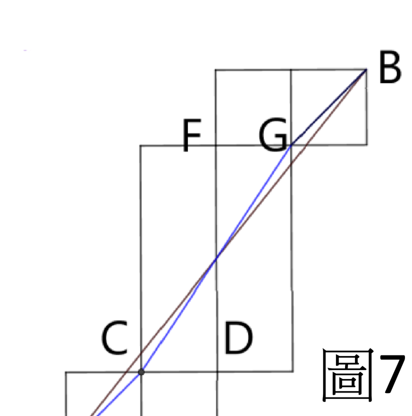


圖7

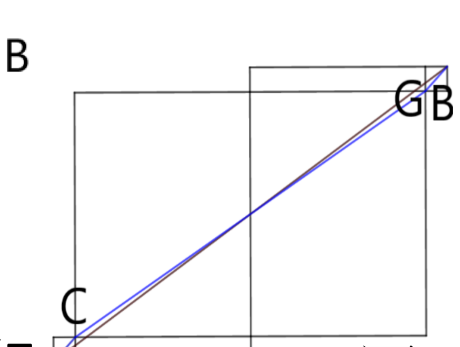


圖8

因為$m_{AC}\times M_{AC}=1$，$m_{BG}\times M_{BG}=1$，所以 (1)和(3)中$m_{AC}\geq M_{AC}$與$m_{AC}\leq M_{AC}$兩種情況，可視為同一條件下，兩向展開圖的對換，同理(2)和(4)也是。

故我們僅取(1) $m_{AC}\geq 1\geq M_{AC}$， $m_{BG}\geq 1\geq M_{BG}$

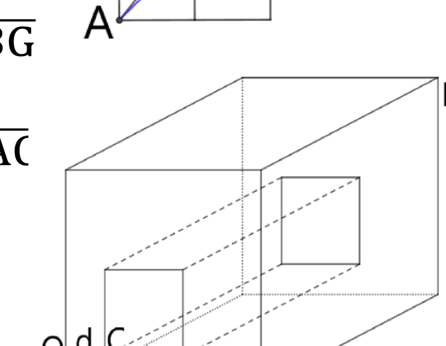


圖9

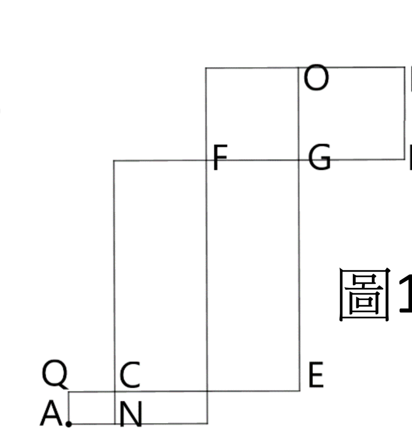


圖10

可以從圖12看出，$m_{AC}>m_{CG}$時，$m_{AC}>m_{AG}>m_{CG}$，即$\overline{AG}$在展開圖內，

同理若$m_{BG}>m_{CG}$則$\overline{CB}$在展開圖內。若$\overline{AG}$、$\overline{CB}$在展開圖內，則$\overline{AB}$在展開圖內。

故$m_{AC}\geq m_{BG}\geq m_{CG}$時， $\overline{AB}$在展開圖內，有最短路徑$\overline{AB}$ 。

同理$m_{AC}\geq m_{CG}>m_{BG}$時， $\overline{AG}$在展開圖內 ，有最短路徑$\overline{AG}+\overline{GB}$

$m_{CG}>m_{AC}\geq m_{BG}$時，皆不在展開圖內，有最短路徑$\overline{AC}+\overline{CG}+\overline{GB}$

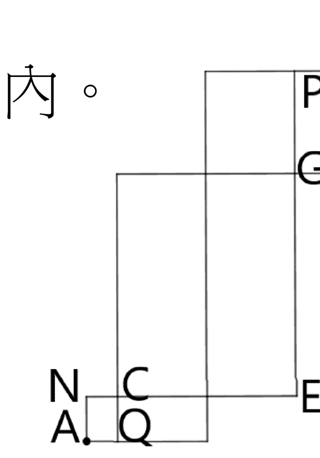


圖11

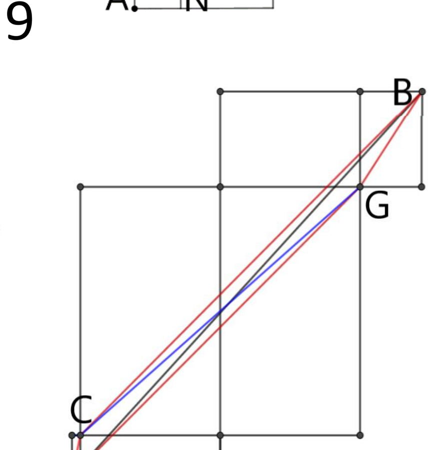


圖12

第二階段 討論$M_{\overline{CG}}$大小的所有情形：

(1) $m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}}$
兩圖路徑皆為直線，由<引理1>可知圖10-1路徑較短，路徑長為$\overline{AB}$

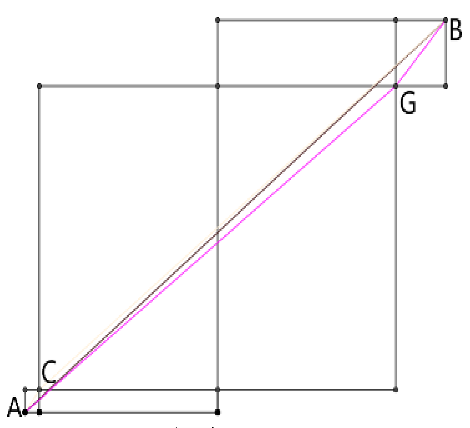


圖10-1
$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq m_{\overline{CG}}$

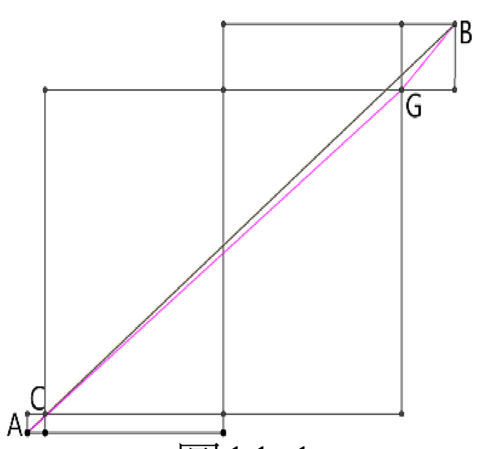


圖11-1
$M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}}$

(2) $m_{\overline{AC}} > m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{CG}} > M_{\overline{AC}}$
圖10-2路徑為直線，圖11-2路徑為兩條折線
故圖10-2較短，路徑長為$\overline{AB}$

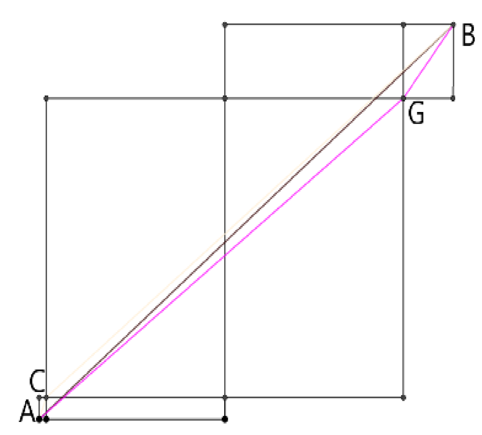


圖10-2
$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq m_{\overline{CG}}$

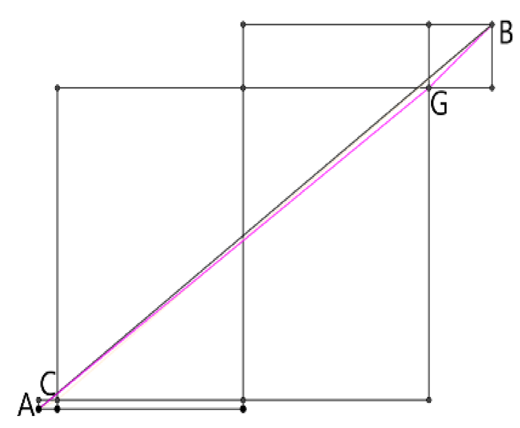


圖11-2
$M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{CG}} > M_{\overline{AC}}$

(3) $m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} > M_{\overline{CG}} > M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$
圖10-3路徑為直線，圖11-3路徑為三條折線，
路徑長為$\overline{AB}$

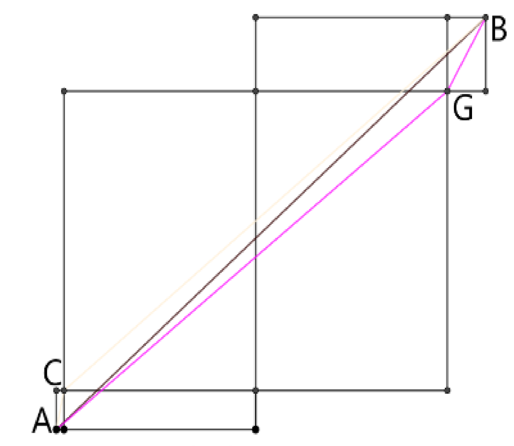


圖10-3
$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} > m_{\overline{CG}}$

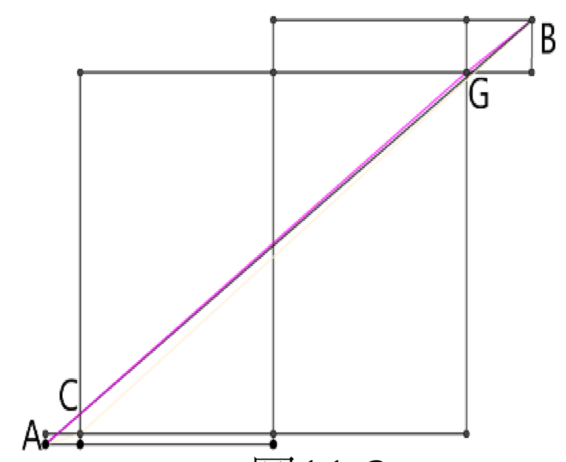


圖11-3
$M_{\overline{CG}} > M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

(4) $m_{\overline{AC}} \geq M_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} > M_{\overline{AC}}$
圖10-4為兩條折線，圖11-4為三條折線
故圖10-4較短，路徑長為$\overline{AG} + \overline{GB}$

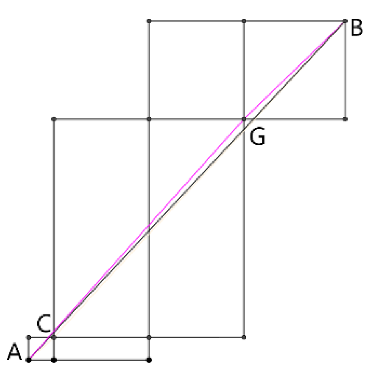


圖10-4
$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}}$

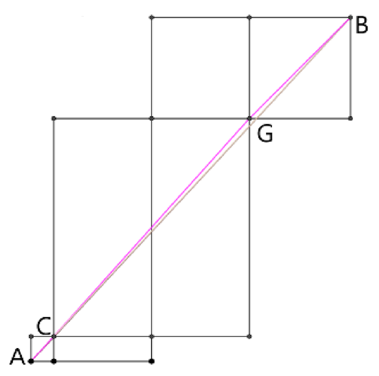


圖11-4
$M_{\overline{CG}} > M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

(5) $M_{\overline{CG}} > m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$
兩圖皆為三條折線，兩路徑等長，
路徑長為$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$

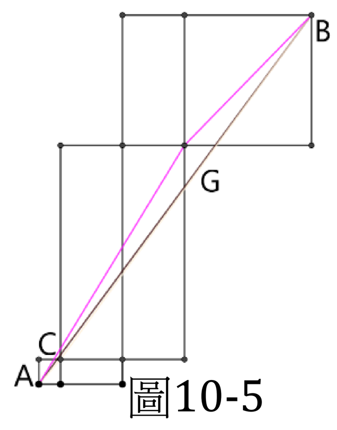


圖10-5
$m_{\overline{CG}} > m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}}$

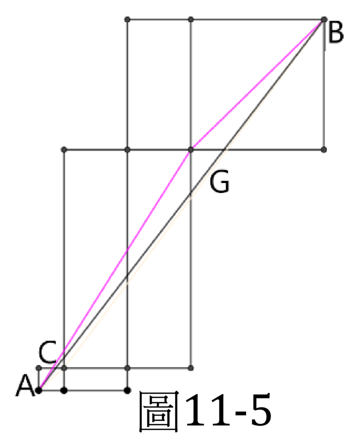


圖11-5
$M_{\overline{CG}} > M_{\overline{BG}} \geq M_{\overline{AC}}$

$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}} > m_{\overline{CG}}$時有最短路徑$\overline{AB}$
$\sqrt{(a+b-c+d)^2+(2a-b+c-d)^2}$
$m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{CG}} > m_{\overline{BG}}$時有最短路徑$\overline{AG} + \overline{GB}$
$\sqrt{(c+2b)^2+(a+d)^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}$
$m_{\overline{CG}} > m_{\overline{AC}} \geq m_{\overline{BG}}$時有最短路徑$\overline{AC} + \overline{CG} + \overline{GB}$
$\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{(a-b-d)^2+(a-b-c)^2}+\sqrt{2b^2+a^2}$

二、找出螞蟻在挖一條置中旋轉四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑

(一)設正立方體邊長為a，置中四角柱通道底面正方形邊長為b且旋轉的角度為θ，如圖13，根據對稱性，只討論$\theta \leq 45°$的情況。展開圖如圖14，透過使A、D、B及A、E、B三點共線可求出其最短路徑為直線時的θ之範圍。

(二)設$m_{\overline{AD}} = m_{\overline{DB}}$
得方程式$\frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b}{a(\sin\theta-\cos\theta)+b} = \frac{a(\sin\theta+\cos\theta)-b+a}{2b}$
求出θ的解為θ'，因對稱性可知$m_{\overline{AE}} = m_{\overline{EB}}$時有臨界值$(45° - \theta')$
則當$\theta' \leq \theta \leq (90° - \theta')$時，
其最短路徑長為$\sqrt{4b^2+[a(\sin\theta+\cos\theta)-b+a]^2}$

(三)當最短路徑呈直線時

1. θ的最小範圍發生在b=$(\sqrt{2}-1)a$時，此時$\theta = 45°$，A、D、E、B四點共線，如圖14
2. θ的最大範圍發生在b=$\frac{\sqrt{2}a}{2}$時，如圖15和圖16，θ愈接近臨界值路徑愈短。

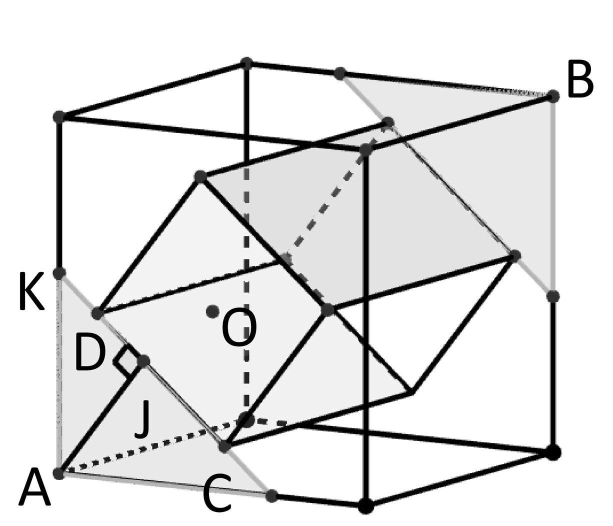


圖13

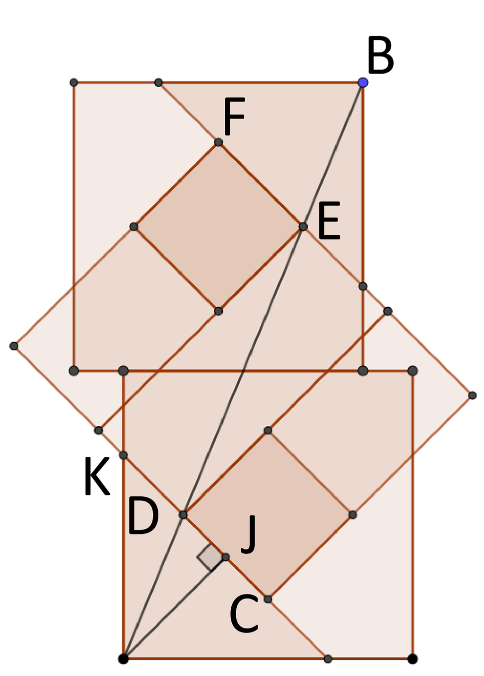


圖14

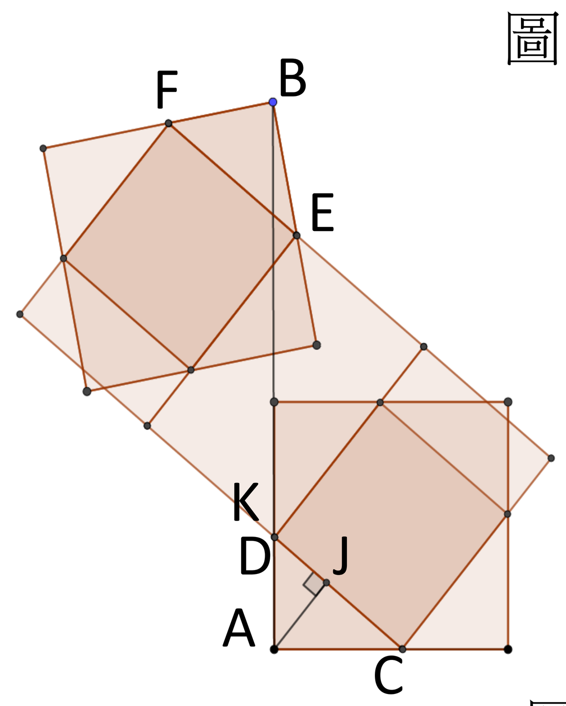


圖15

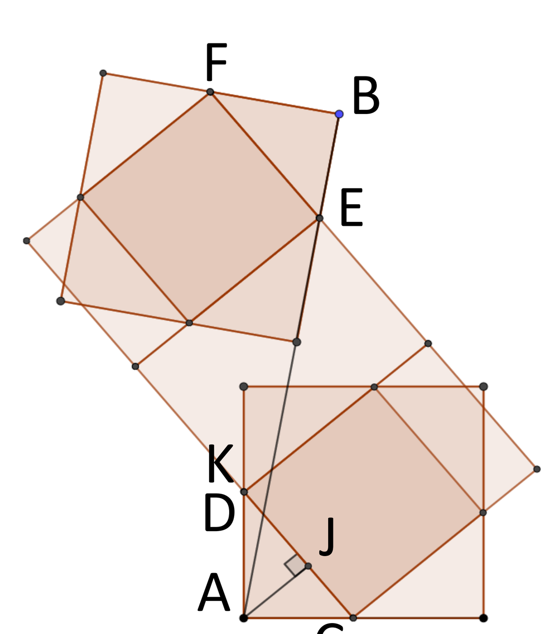


圖16

歸納與小結：
在一條通道內挖四角柱(置中、偏移、旋轉)中，a與b的比值無論如何改變，偏移、旋轉皆不短於置中，且a固定時，有最佳挖洞比值：$\frac{a}{b} = 2$；並且我們發現在固定a的情況下圓柱通道甚至會更短，這出乎我們意料。

三、找出螞蟻在挖一條置中圓柱通道的圓柱之上下底面圓周上任意兩點間爬行的最短路徑

(一)設圓柱的半徑為2a、圓柱通道的半徑為a，柱高為h，如圖17，展開圖如圖18，D、Q點為頂、底面圓弧上各一點，當A、D、Q、B四點共線時$\overline{AD} + \overline{DQ} + \overline{QB}$最短，$m_{\overline{AD}} = m_{\overline{DQ}} = m_{\overline{QB}}$，假設此時∠DOE= θ，透過$m_{\overline{AD}} = m_{\overline{DQ}}$得出方程式$(\frac{1}{2}\pi - \theta)(2\cot\theta - \csc\theta) = \frac{h}{a}$，其最短路徑長為
$2a\sqrt{5-4\cos\theta} + \sqrt{(a(\pi-2\theta))^2+h^2}$

(二)設圓柱半徑a+b，圓柱通道的半徑為a，柱高為h，如圖19，其中頂面圓周上的A'點為B點像上投影，令$\angle AOA' = \theta_2$。
得方程式$(\theta_2 - 2\theta)\left(\cot\theta - \frac{a}{a+b}\csc\theta\right) = \frac{h}{a}$，
其最短路徑長為$2\sqrt{2a^2+b^2+2ab-2a(a+b)\cos\theta} + \sqrt{[a(\theta_2-2\theta)]^2+h^2}$

(三)設正立方體的邊長a，圓柱通道之直徑為b，如圖21，其展開圖如圖22，以前述算法得方程式$(\pi - 2\theta)\left(\cot\theta - \frac{b}{\sqrt{2}a}\csc\theta\right) = \frac{2a}{b}$
最短路徑長為$2\sqrt{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{\sqrt{2}}ab\cos\theta} + \sqrt{[b(\frac{1}{2}\pi-\theta)]^2+a^2}$

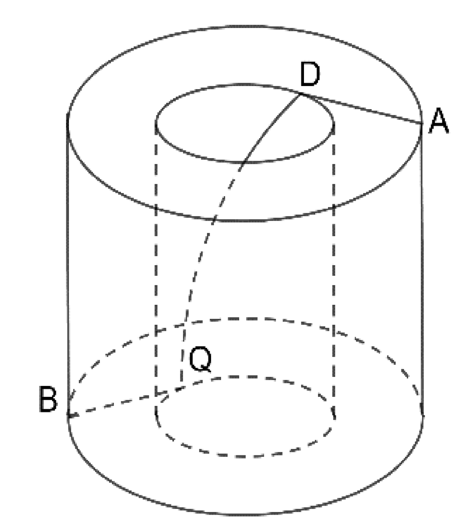


圖17

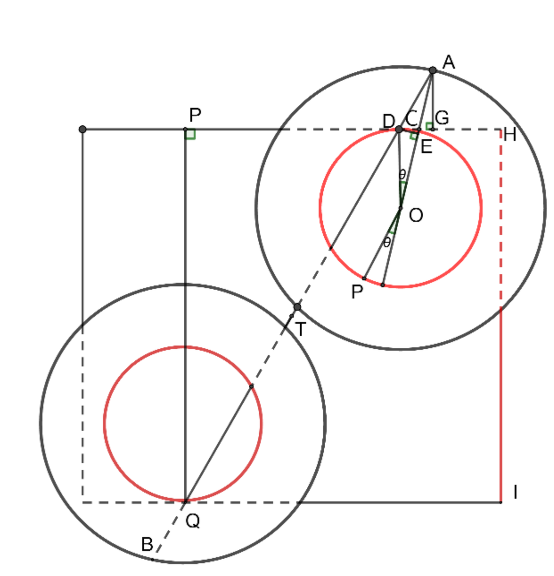


圖18

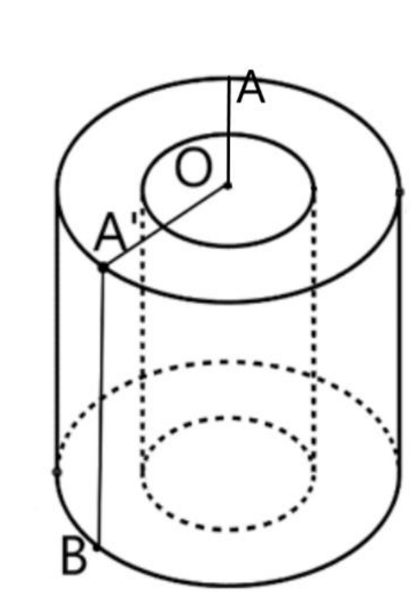


圖19

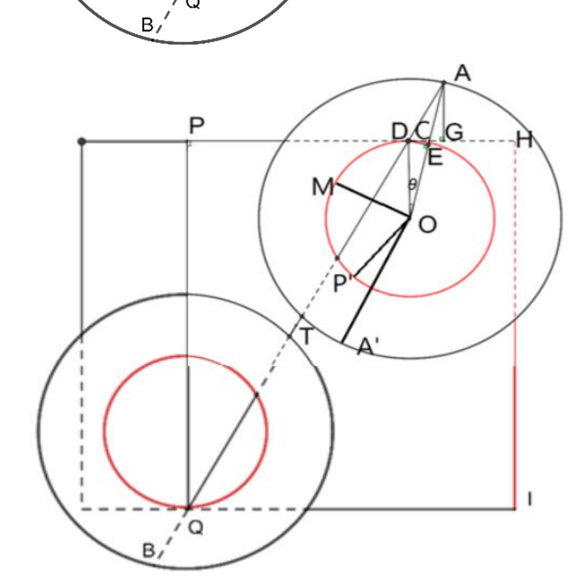


圖20

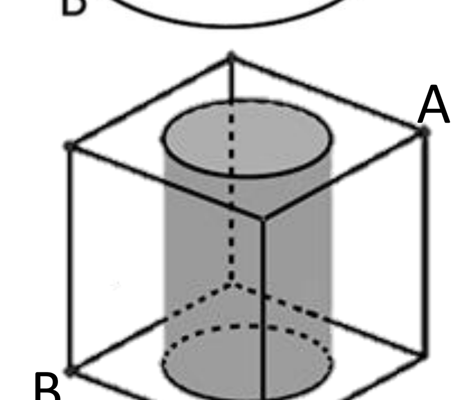


圖21

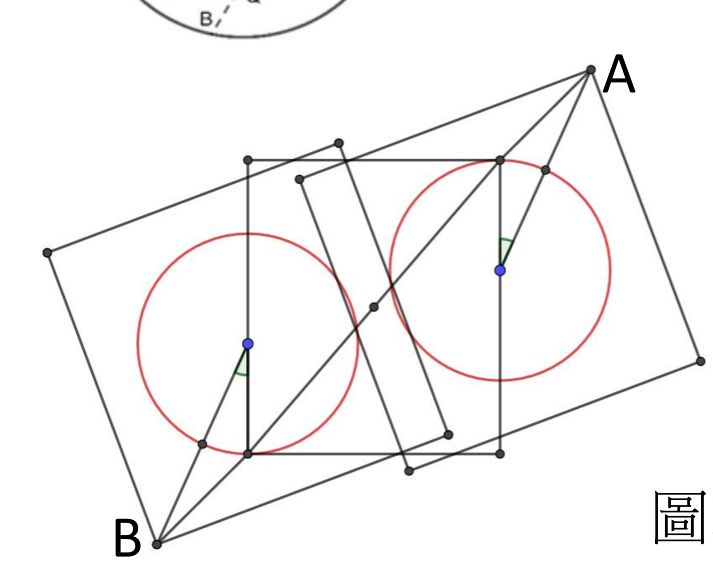


圖22

四、找出螞蟻在挖兩條及三條置中四角柱通道的正立方體之頂點間爬行的最短路徑

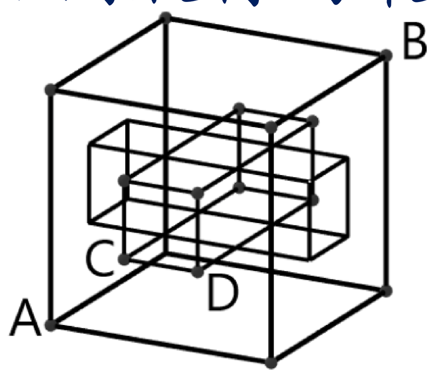


圖23

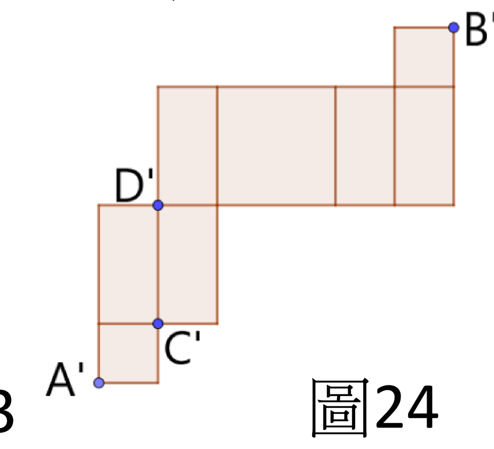


圖24

(一)設正立方體邊長為a，置中通道邊長為b兩條通道在正立方體中央時，其立體圖形如圖23，展開圖如圖24、圖25及圖26。

1. $a \leq 4b$時，圖25最短，其最短路徑長為$\sqrt{(a+2b)^2+(2a-2b)^2}$

2. $a > 4b$時，圖25最短，最短路徑長為$(a-b)\sqrt{2}+\sqrt{(3b)^2+(a-b)^2}$

(二)兩條通道在中央時，不走通道內的路徑長都會比通道內還要短，所以走通道外面的路徑不加以討論。

(三)三條通道在中央時，因為螞蟻爬行到中央時，只能選擇往上或往右行走，其最短路徑與兩條通道相同。

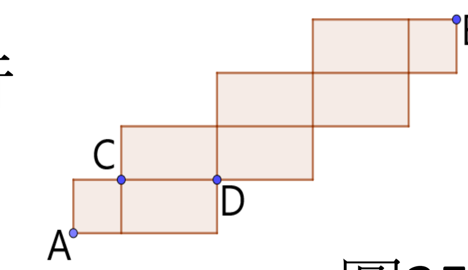


圖25

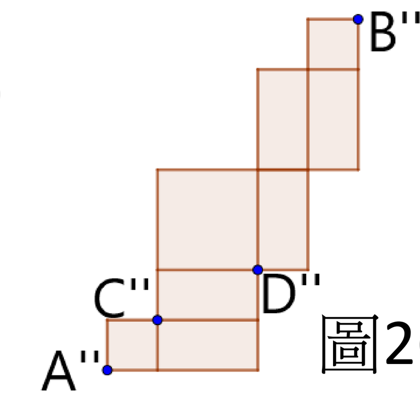


圖26

五、找出螞蟻在門格海綿之頂點間爬行的最短路徑

(一) M_1最短路徑

設門格海綿的邊長為3，其一階門格海綿M_1的最短路徑長度為$\sqrt{41}$

其展開圖如圖27。

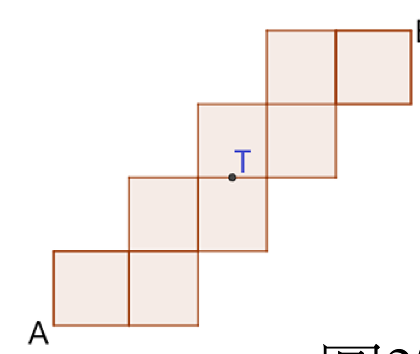


圖27

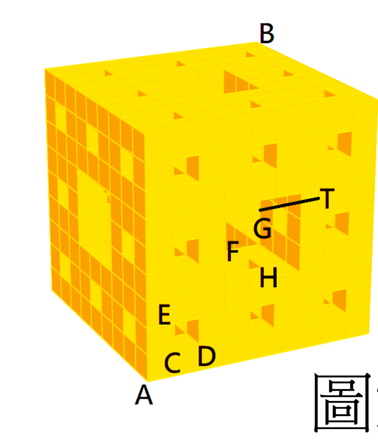


圖28

(二)M_2最短路徑

其立體圖形如圖28，走法如下:(根據對稱性只需討論A到對稱點T的路徑)

M_1展開圖：如圖33可見$\overline{AT}$被M_2通道阻礙，又$m_{\overline{FG}}=m_{\overline{CE}}=1>m_{\overline{CT}}=\frac{10}{11}$，故$\overline{CT}$在展開圖內。其最短路徑為$2(\overline{AC}+\overline{CT})=\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{3}\sqrt{221}$

M_2展開圖：如圖圖29、30： $2(\overline{AG}+\overline{GT})=\frac{2}{3}\left(5\sqrt{2}+\sqrt{7.25}\right)$、如圖圖31、32：$2(\overline{AM}+\overline{MP}+\overline{PH}+\overline{HT})=2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{6}\sqrt{41}\right)$

因為$\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{3}\sqrt{221}<2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{6}\sqrt{41}\right)<\frac{2}{3}\left(5\sqrt{2}+\sqrt{7.25}\right)$，可知走$M_1$展開圖較短

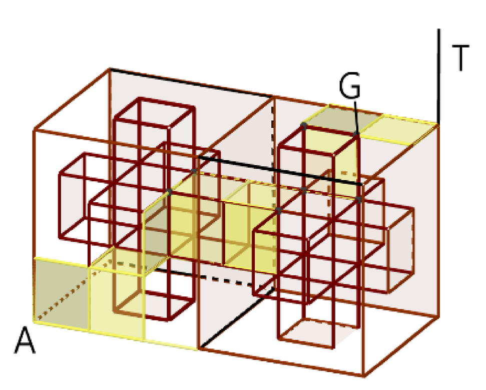


圖29

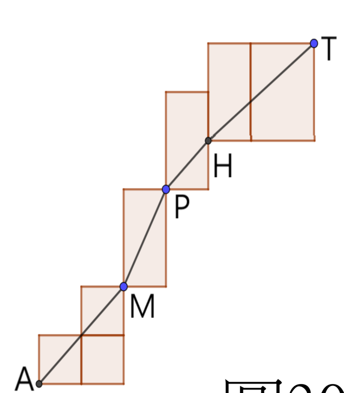


圖30

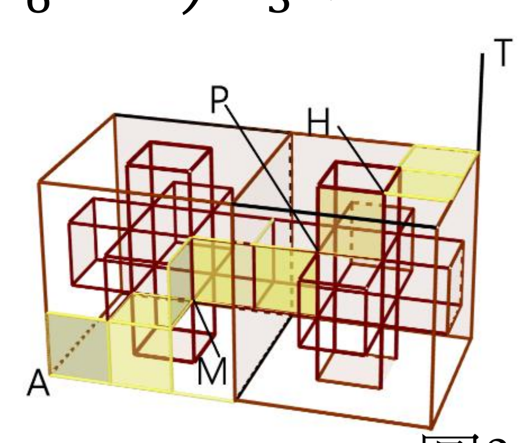


圖31

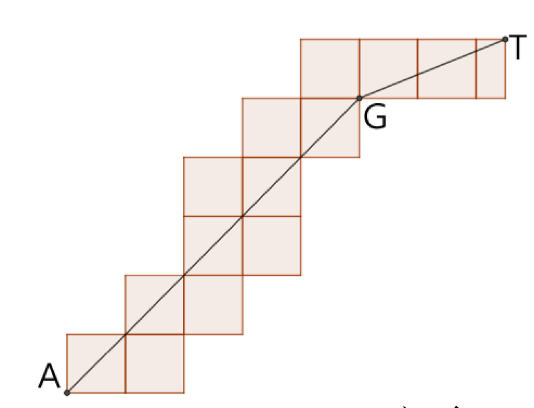


圖32

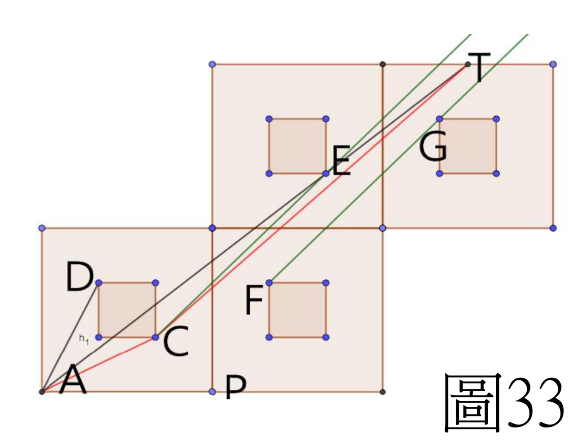


圖33

(三)M_n最短路徑

我們假設走M_1展開圖的路徑比較短。因為當n增加時在M_1展開圖便會隨著增加許多阻礙路徑的通道，因此最短路徑的轉折點也不一樣。先計算M_3走M_1展開圖之最短路徑：

在M_1的展開圖上畫出M_3的正方形，如圖35，可見$\overline{C_3T}$會經過M_3的通道，所以將$\overline{AC_2}$延伸至C_3點。連接$\overline{C_3T}$，$M_{\overline{C_3T}}=\frac{28}{29}<1$，可知其中$\overline{AC_3}$與$M_3$的正方形之頂點共線（斜率為$\frac{1}{2}$），故其路徑為$2(\overline{AC_3}+\overline{C_3T})$。

設M_n的轉折點為C_n，A到T的路徑為$\overline{AC_n}+\overline{C_nT}$，計算如下:

1. $\overline{AC_n}$的計算：如圖34，M_3在M_1展開圖上的路徑中，$\overline{C_2T}$受阻，故將$\overline{AC_2}$延長為$\overline{AC_3}$。因$m_{\overline{AC_3}}=\frac{1}{2}$，故其路徑在展開圖內且經過$M_3$通道頂點。以此類推$\overline{AC_n}$在展開圖內，且$\overline{AC_n}=\sqrt{5}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}$，$\lim_{n\to\infty}\overline{AC_n}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$。

2. $\overline{C_nT}$的計算：如圖35，我們可以發現距離$\overline{C_3T}$最近的通道為M_3通道，但其不會碰到$\overline{C_3T}$，同理得出n為正整數且n>3時$\overline{C_nT}$皆以同樣方法而在展開圖內。計算後得$\overline{C_nT}=\frac{1}{2\times3^{n-1}}\sqrt{(2+3^n)^2+(1+3^n)^2}$。

故M_1展開圖之M_n最短路徑為$2(\overline{AC_n}+\overline{C_nT})$

$=\sqrt{5}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{3^i}+\frac{1}{3^{n-1}}\sqrt{(2+3^n)^2+(1+3^n)^2}$

當$n\to\infty$時，其長度為$3\sqrt{2}+\sqrt{5}$。

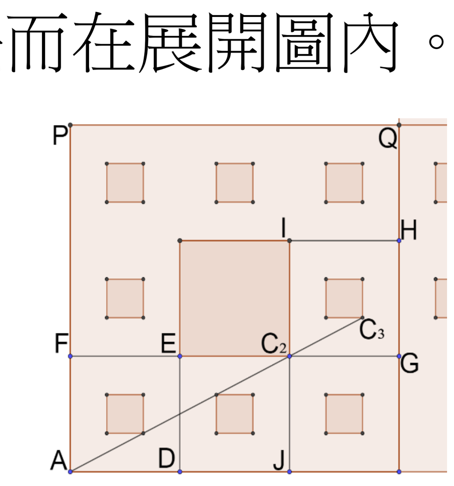


圖34

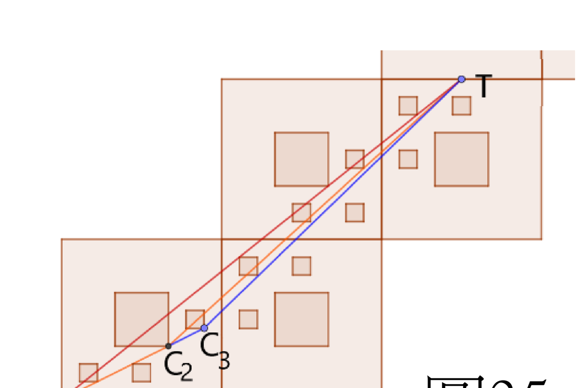


圖35

討論與結論

一、我們計算並證明出正方體中有一條通道置中、偏移、旋轉時，螞蟻在最遠兩頂點間爬行的最短路徑，且將一條通道置中的研究改為圓柱體，接著討論正方體中有兩、三條通道置中的情形，而後推廣至n階門格海綿（n為任意正整數或無限大)。

二、在探討最短路徑時，本研究只在兩條通道置中的情況比較經過通道和未經通道的路徑長短，其餘的情況兩者長短顯而易見，因此略過。

三、未來展望：

我們將嘗試證明當螞蟻在n階門格海綿（n為任意正整數或無限大）爬行時，行經一階通道的路徑最短。此外，我們曾經嘗試探討長方體的一般化及圓柱通道偏移時的情形，但由於計算繁複目前尚未完成，未來我們仍想試著突破，並研究在正方體中挖圓柱通道的碎形之最短路徑。

參考資料

一、https://en.wikipedia.org/wiki/Mengersponge

二、龍湘宜，楊宗穎、黃思齊，Menger Sponge 點邊面的探討，中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。