

# 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 物理科

030103

**雙珠進動：探究兩圓形球體黏合後的特殊轉動  
現象及其動力機制分析**

學校名稱：臺南市立崇明國民中學

作者：  國二 鍾招佑	指導老師：  周柏廷  王俊乃
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：雙珠、進動、力矩

## 摘要

我把兩顆半徑相同的圓球體黏著在一起，在平面上轉動雙珠並用手機從側面與俯視拍攝其運動影片。將拍攝影片匯入電腦，隨後利用軟體 Tracker，研究雙珠在不吹氣的情況下，其運動的型態，並且從受力狀態推論其成因。接下來操縱不同半徑的雙珠和對雙珠不同的吹氣方式來觀察對其運動型態的影響。研究發現，雙珠的半徑與不同的吹氣方式造成的力矩對雙珠運動皆會有規律性的影響，因此嘗試建立理論模型來解釋實驗結果的規律性。在最後的進階研究探討，不僅由實驗結果再度驗證上述理論模型的適用性，也發現雙珠運動在磁攪拌機的磁力趨動下也呈現出進動現象。

## 壹、研究動機

最近在網路上看到一段稱為「颶風球」(Hurricane Balls)影片，颶風球是由兩個球黏著而形成(稱為雙珠)，如圖 1 所示。

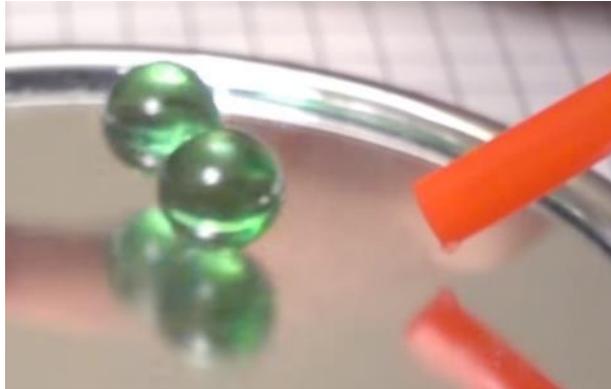


圖 1、颶風球(雙珠)轉動

在影片中，颶風球的特性是受到吹管吹氣施予的推力，颶風球會快速的轉動，而且在慢動作撥放的影片中會看到其中一顆球向上抬起並與另一球相互旋轉。在國中物理科教材中曾經學習到「力與運動」，例如：力矩會改變物體的轉動，槓桿是力矩的作用。圓周運動是一種加速度運動。物體做加速度運動時，必受力。以相同的力量作用相同的時間，則質量愈小的物體其受力後造成的速度改變愈大。這些都與颶風球的轉動有關聯。參考相關文獻資料，發現在高中物理科展作品的研究著重在達到最高速度時的各種現象觀察與理論分析。但我想了

解的是在雙珠不吹氣的自然運動情況，以及其他操縱變因的影響，颶風球的運動現象，於是便開始這次的研究。

## 貳、研究目的

- 一、探究不對雙珠吹氣時，雙珠自轉軸傾斜角度對時間的變化
- 二、探究不對雙珠吹氣時，離地端的球心運動軌跡
- 三、探究不同的球半徑為操縱變因對於雙珠運動的影響
- 四、探究不同的吹氣方式的操縱變因對於雙珠運動的影響
- 五、建立理論模型解釋各項操縱變因對於雙珠運動影響的原因
- 六、進階研究探討自轉與公轉相互關係是否符合理論模型之推論
- 七、進階研究探討雙珠在磁攪拌機的磁力趨動下之運動現象

## 參、研究設備及器材

### 一、實驗器材：

- (一)鐵珠：直徑分別為 6 mm, 10 mm, 15 mm, 19 mm, 25 mm 的五種不同半徑鐵珠各兩個。
- (二)AB 膠：黏著兩個玻璃珠與半徑相同的兩個鐵珠，分別製成六組雙珠。
- (三)吹氣幫浦：能送出固定流量氣體的吹氣幫浦。
- (四)吸管：分別使用粗、中、細等三種不同口徑的吸管以連接送氣出口端。
- (五)手機：能攝錄每秒 240 張影格(即 240 fps)動態畫面的手機。
- (六)高速攝影機：能攝錄每秒 960 張影格動態畫面的攝影機。

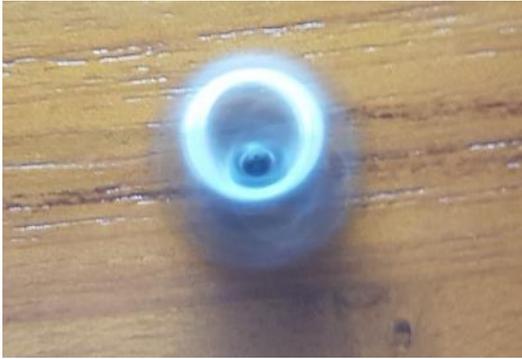
### 二、實驗裝置：

自製側拍與俯拍動態物體的手機置放裝置。

### 三、使用軟體：

Tracker 軟體：一個建立於 Open Source Physics (OSP) Java 架構下的免費的影像分析工具。

四、實驗器材架設與使用：

	
<p>一組玻璃所製成的雙珠以及五組不同半徑的鐵球所製成的雙珠。</p>	<p>不同粗細的吸管，此時與吹氣幫浦送氣出口端連接的是細吸管，吸管對雙珠吹氣。</p>
	
<p>手機置放在側拍動態物體的置放裝置，拍攝轉動中的雙珠。</p>	<p>手機置放在俯拍動態物體的置放裝置，拍攝轉動中的雙珠。</p>
	
<p>左圖為雙珠快速轉動，右圖為雙珠轉動時用慢動作攝影所得雙珠的傾斜狀態。</p>	

## 肆、研究過程或方法

### 一、研究流程

本研究主要探討雙珠轉動的力與運動，由四個研究問題開始研究活動，經以不同實驗條件施測後，獲得各種實驗結果，並依此建立理論模型解釋實驗結果。最後再進行進階探究，驗證理論模型的適用性，以及用磁攪拌機的磁力驅動雙珠觀察其運動現象，研究流程如圖 2。



圖 2、研究流程圖

## 二、原理與名詞解釋

### (一) 颶風球的運動型態-進動現象

根據文獻參考，當施力於兩球時，兩球會同時做兩種運動：分別為繞著鉛直軸轉動，又稱為公轉運動；與繞著對稱軸轉動，又稱為自轉，如圖 3 所示，將對稱軸稱為雙珠自轉軸。

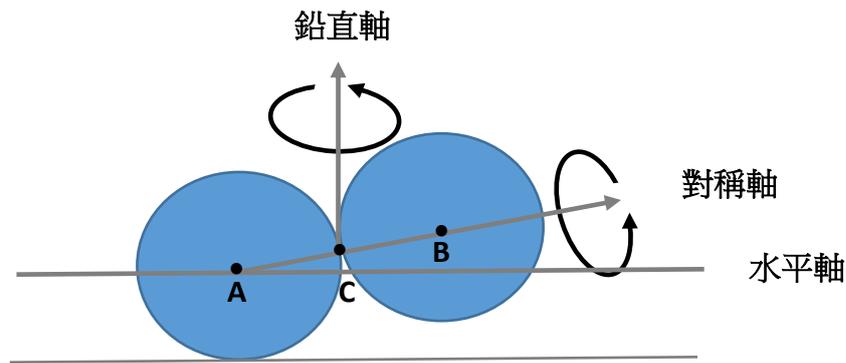


圖 3、雙珠的運動區分為公轉與自轉

### (二) 幫浦的吹氣流量與風速的關係:

幫浦的吹氣流量即為幫浦每秒可送出的氣體體積，風速為氣流每秒所移動的速率。在氣體不可壓縮的條件下，當氣體的流量為固定值，若吹氣吸管的橫截面積越細，則氣體在每秒需移動的距離越長，故風速越快。

### (三) 力矩造成角動量的變化：

力矩造成剛體轉動的變化，根據運動定律，其對剛體的角動量影響關係如下：

$$\text{剛體受到的力矩} \times \text{力矩的作用時間} = \text{剛體的角動量變化}$$

## 伍、研究結果與討論

### 一、時間的校正

因為我們分析的影片都是以慢動作的方式來拍攝與撥放，所以 Tracker 內建的時間數據與影片中碼錶的顯示時間有差異，因此底下分別利用 Tracker 擷取的時間數據(t)與影格編號(N)和碼錶的時間顯示作分析並找出時間與影格編號為 1:224。

### 二、研究問題一：雙珠自轉軸傾斜角度對時間的變化

#### 1. 步驟與方法：

使用 Tracker 軟體來找出雙珠在不同時刻的雙珠自轉軸傾斜角度，如圖 4 所示。

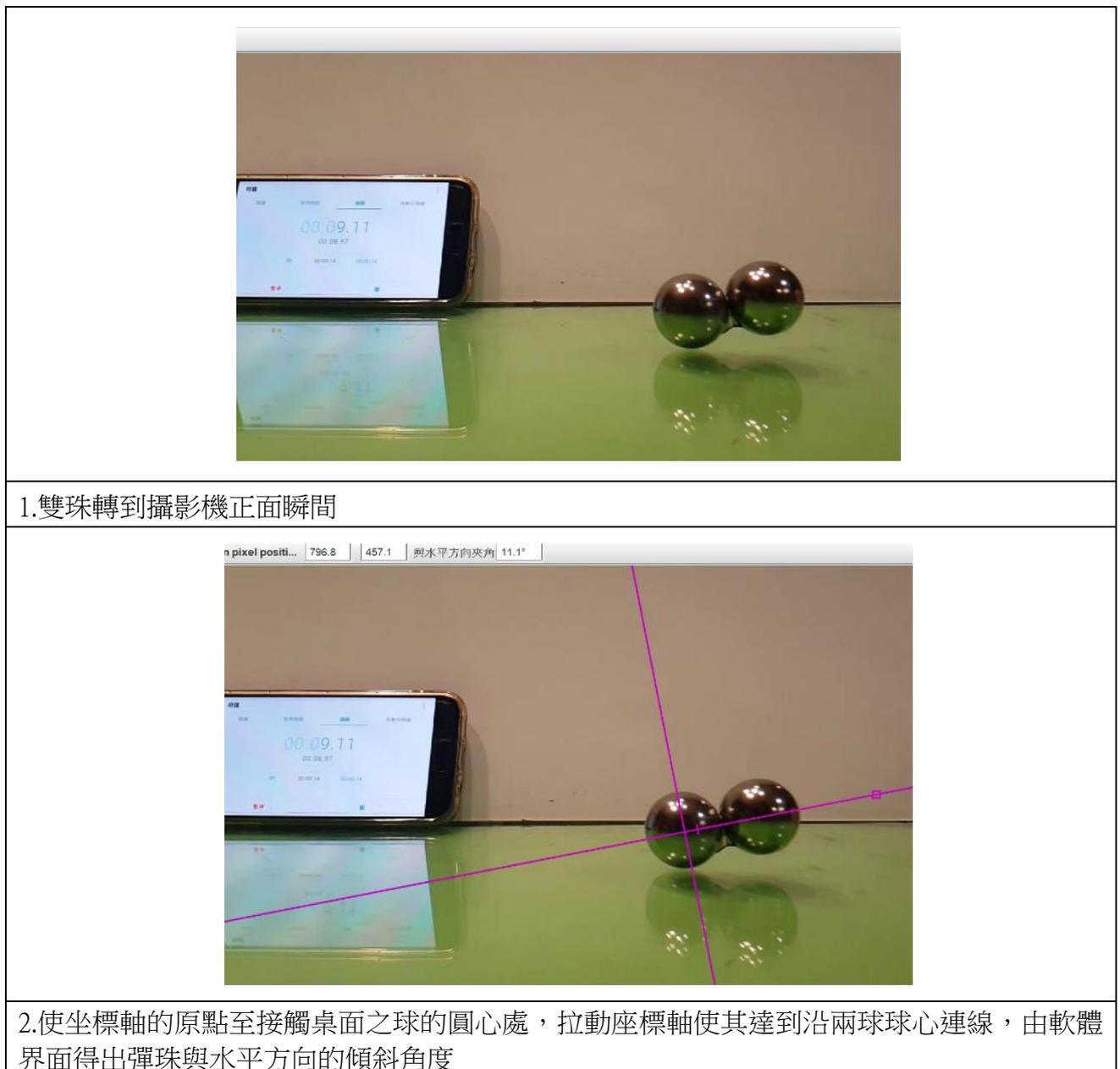


圖 4 使用軟體測量雙珠自轉軸傾斜角度

## 2. 實驗數據與分析

使用鋼珠，依照上述步驟測量其雙珠自轉軸的傾斜角度對時間的關係，如表 1 所示。

表 1 雙珠自轉軸的傾斜角度對時間的關係

時間(秒)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
傾斜角度	10.3	10.7	11.4	11	9.5	9.6	9.9	9.7	8.9	8.9
時間(秒)	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5
傾斜角度	8.5	8.2	7.8	8.2	8.1	7.8	7.4	8.3	7.8	7.3
時間(秒)	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5
傾斜角度	6.9	6.4	6.1	6.2	5.9	6.5	6.3	6	5.6	5.2
時間(秒)	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	20	20.5
傾斜角度	5	4.7	4.5	4.6	4.7	4.8	4.1	3.7	3.5	3.4
時間(秒)	21	21.5	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25	25.5
傾斜角度	3.4	2.6	2.4	2.7	2.5	1.9	2.3	1.9	1.7	1.4
時間(秒)	26	26.5	27	27.5	28	28.5	X			
傾斜角度	1	0.7	0.4	0.4	0.2	0				

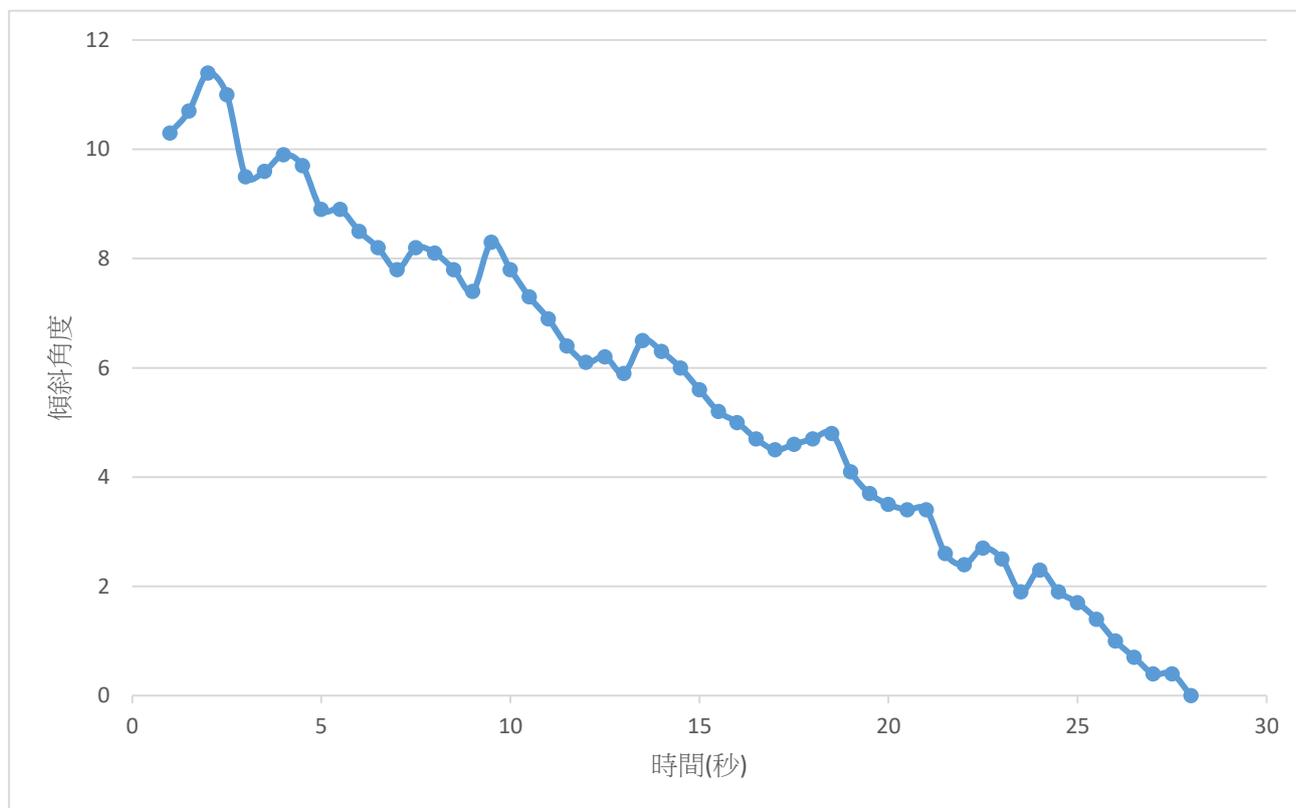


圖 5 雙珠自轉軸的傾斜角度對時間的關係

### 3.結果與討論

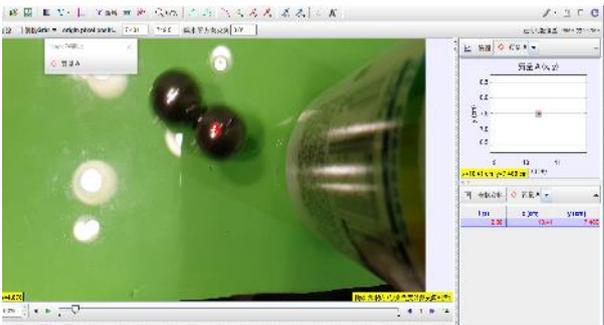
由圖 5 可看出，鋼珠重頭到尾，角度不停的在震盪變化。但整體而言，傾斜角度會隨著時間在遞減。

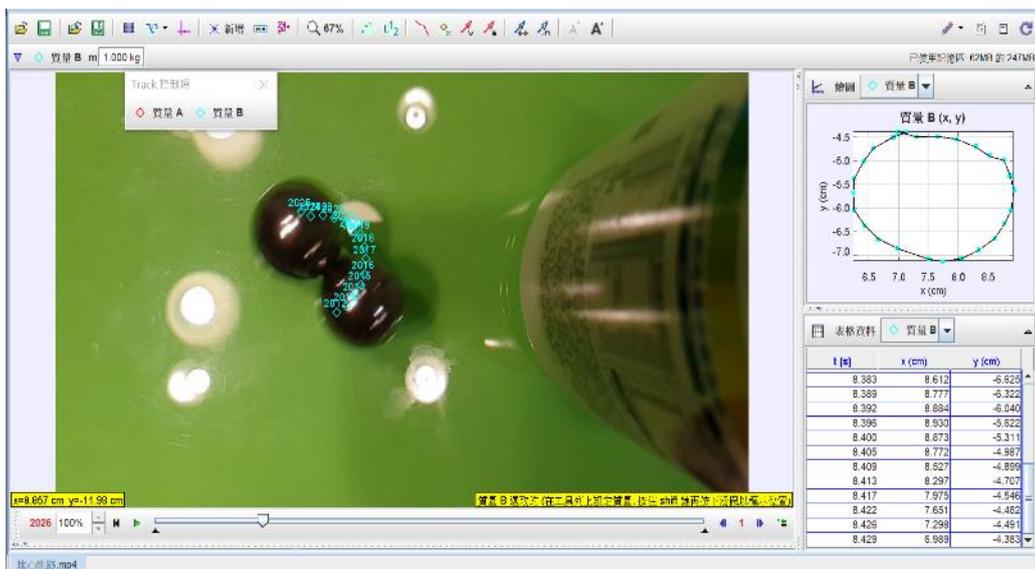
#### 三、研究問題二：離地端球心的運動軌跡

##### 1.步驟與方法：

兩顆球的球心都在運動，因為兩顆球是黏著在一起的，所以兩個球心的運動軌跡具有直接相關性，故在本研究問題中，只需研究離地端的球心運動軌跡即可。使用手機從上方拍攝雙珠的轉動。

使用 Tracker 軟體找出離地面之球的球心運動軌跡，每次都取球心轉完整一圈的軌跡圖，並在隔一段時間後再重複上述動作，並依序取五組數據，步驟如圖 6 所示。

																																								
1.攝影機從上方拍攝雙珠轉動時的俯視圖。	2.讀出時間並標示離開地面之球的球心座標																																							
 <table border="1" data-bbox="1077 1736 1300 1921"><thead><tr><th>t [s]</th><th>x [cm]</th><th>y [cm]</th></tr></thead><tbody><tr><td>2.238</td><td>8.611</td><td>-4.292</td></tr><tr><td>2.239</td><td>8.611</td><td>-4.649</td></tr><tr><td>2.244</td><td>8.301</td><td>-4.930</td></tr><tr><td>2.248</td><td>8.891</td><td>-5.147</td></tr><tr><td>2.252</td><td>9.050</td><td>-5.413</td></tr><tr><td>2.259</td><td>9.364</td><td>-5.510</td></tr><tr><td>2.261</td><td>9.654</td><td>-5.510</td></tr><tr><td>2.265</td><td>10.06</td><td>-5.389</td></tr><tr><td>2.268</td><td>10.58</td><td>-5.172</td></tr><tr><td>2.272</td><td>10.77</td><td>-4.853</td></tr><tr><td>2.278</td><td>10.81</td><td>-4.495</td></tr><tr><td>2.281</td><td>10.91</td><td>-4.109</td></tr></tbody></table>		t [s]	x [cm]	y [cm]	2.238	8.611	-4.292	2.239	8.611	-4.649	2.244	8.301	-4.930	2.248	8.891	-5.147	2.252	9.050	-5.413	2.259	9.364	-5.510	2.261	9.654	-5.510	2.265	10.06	-5.389	2.268	10.58	-5.172	2.272	10.77	-4.853	2.278	10.81	-4.495	2.281	10.91	-4.109
t [s]	x [cm]	y [cm]																																						
2.238	8.611	-4.292																																						
2.239	8.611	-4.649																																						
2.244	8.301	-4.930																																						
2.248	8.891	-5.147																																						
2.252	9.050	-5.413																																						
2.259	9.364	-5.510																																						
2.261	9.654	-5.510																																						
2.265	10.06	-5.389																																						
2.268	10.58	-5.172																																						
2.272	10.77	-4.853																																						
2.278	10.81	-4.495																																						
2.281	10.91	-4.109																																						
3. 隨著影格的慢動作播放，一格一格的標示出離開地面之球的球心在不同時刻的座標，直到形成球心轉完整一圈的運動軌跡為止。																																								



- 讓雙珠再自行轉動六秒後，重複上述步驟，記錄離開地面球之圓心軌跡直到再次轉動完整一圈為止。
- 記錄轉動完整一圈所需的影格數目，利用碼錶時間(秒):影格數目 = 1 : 224，可換算轉動一圈的時間即為週期。

圖 6 使用軟體測量離地面之球的球心運動軌跡

## 2. 實驗數據與分析

(1) 五組運動軌跡依時間先後，如圖 7 所示。

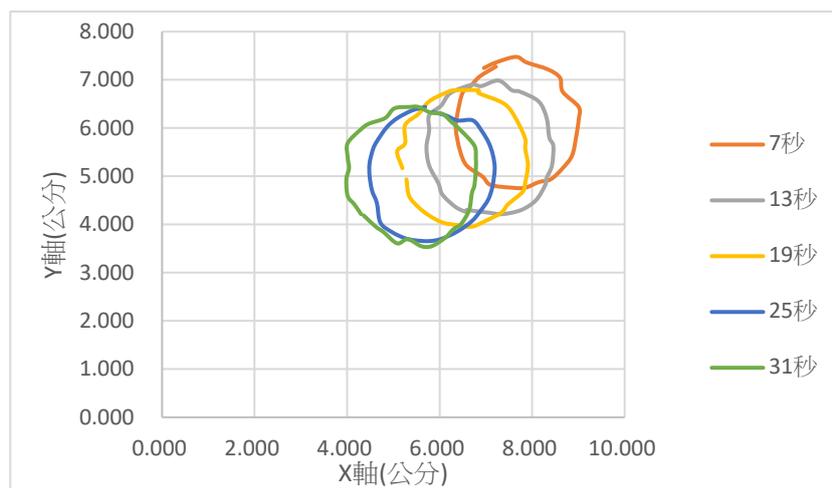


圖 7 不同時間內離地端球心的運動軌跡

(2)依照時間測量每一圈的平均直徑，如表 2 所示

表 2 離地端球心圓周運動的平均直徑

時間	7 秒	13 秒	19 秒	25 秒	31 秒
平均直徑	2.684cm	2.742cm	2.76cm	2.81cm	2.84cm

(3)以時間為橫軸，平均直徑為縱軸，畫成關係圖如圖 8 所示。

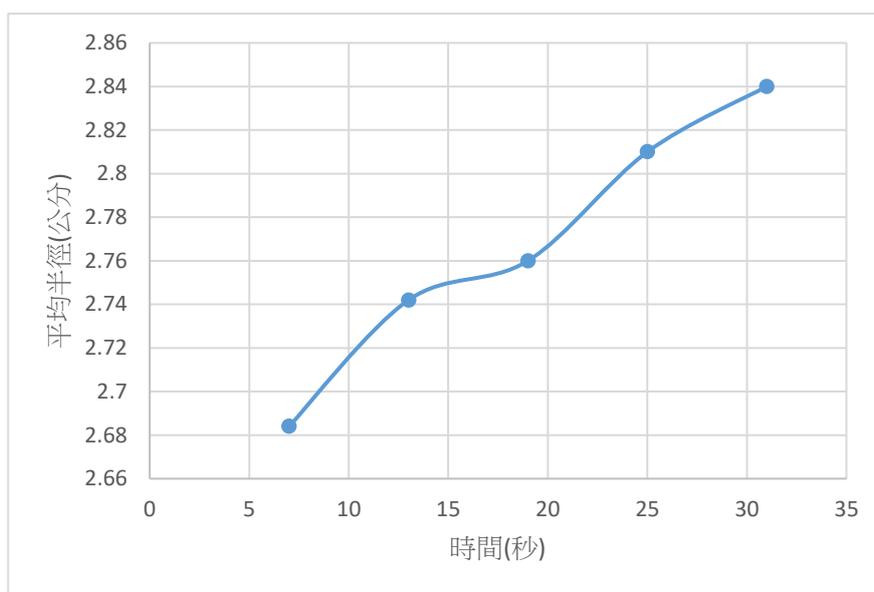


圖 8 離地端球心圓周運動的平均直徑對時間的變化關係

(4)依照時間測量每一圈的週期，如表 3 所示。

表 3 離地端球心的每一圈運動週期

時間(秒)	7 秒	13 秒	19 秒	25 秒	31 秒
週期 T(秒)	0.1	0.104	0.112	0.116	0.124

(5)以時間為橫軸，週期為縱軸，畫成關係圖如圖 9 所示。

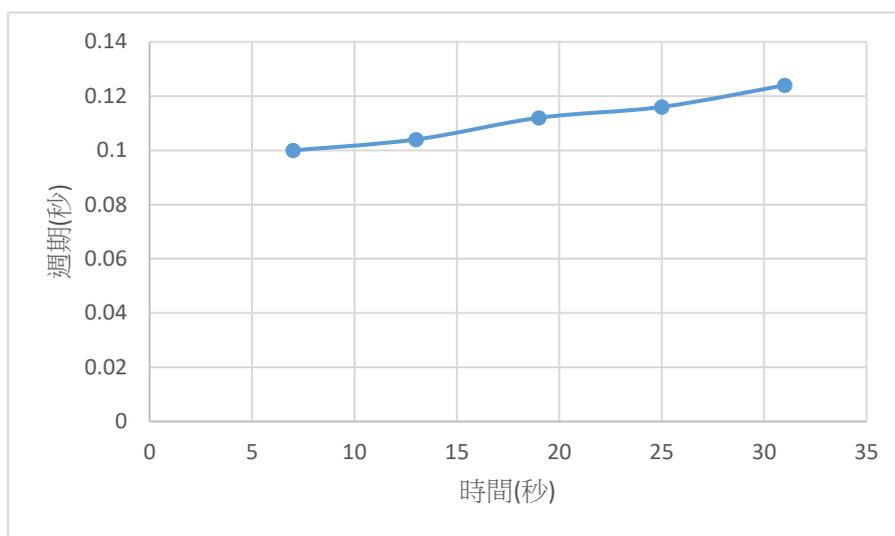


圖 9 離地端球心圓周運動的運動周期對時間的變化關係

### 3.結果與討論

- (1)從圖 7 可看出，球心的運動軌跡都會形成一個完整的圓圈，而圓圈的圓心並非固定不動。
- (2)圓圈軌跡的圓心隨著雙珠轉動時作微幅移動，在觀察的時間內，其移動軌跡成圓弧狀。
- (3)由圖 8 可知，圓圈軌跡的直徑不斷的變大。圓圈的直徑與雙珠自轉軸的傾斜角度有一定的比例關係，當傾斜角度變小，圓圈的直徑會增大。因為根據實驗觀察，角度不停的在震盪變化，整體而言傾斜角度會隨著時間在遞減，所以直徑的變化現象確實與角度的變化，具有一致的相關性。
- (4)由圖 9 可看出，球心每一圈的轉動週期並非固定，而是隨著轉動的時間越久，每一圈的轉動週期隨之增長，也就是雙珠球心的公轉轉速越來越慢。
- (5)因為速率等於距離/時間，所以球心的公轉速率  $V = \frac{2\pi r}{T}$ 。整理離地端球心的公轉速率如表 4 所示。

表 4 離地端球心的公轉速率

時間(秒)	7 秒	13 秒	19 秒	25 秒	31 秒
速率 V (cm/s)	83.3	82.8	77.4	76.1	71.9

以編號為橫軸，速率  $V$  為縱軸，畫成關係圖如圖 10 所示，從圖中可知，離地端球心的轉動速率越來越慢。

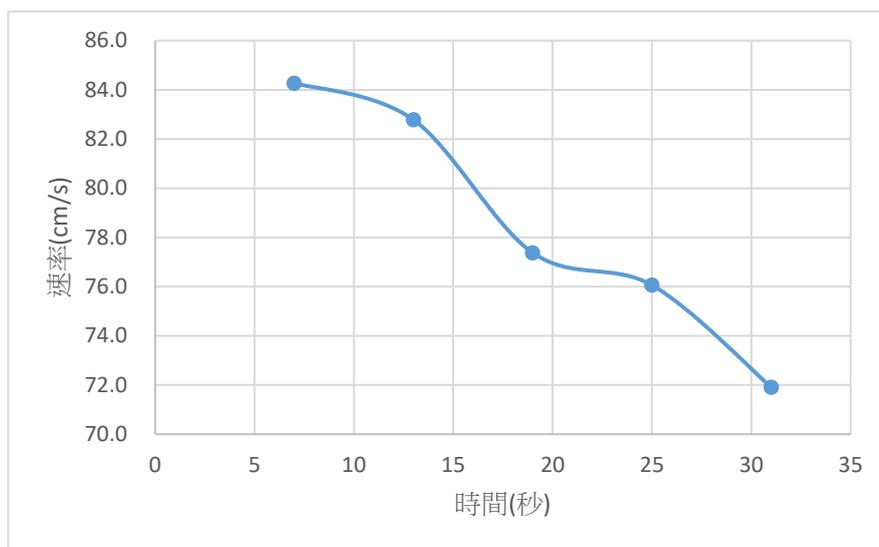


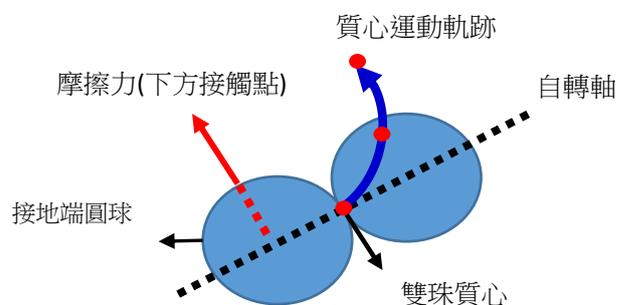
圖 10 離地端球心的公轉速率對時間的變化關係

#### 4.從雙珠受力狀態推論離地端球心運動結果的

成因：

##### (1)當雙珠在進動時，雙珠同時有繞對稱軸的

自轉，以及以雙珠連接處(雙珠質心)至地面投影點為圓心的公轉，如右圖所示。推論接地端的圓球在與地面的接觸點，受到與自轉速率方向平行的摩擦力，此摩擦力恰好作為雙珠質心作圓周運動所需之向心力，所以離地端球心的公轉圓心才會形成圖 7 的圓弧狀軌跡。



俯視圖：雙珠水平方向受力推論

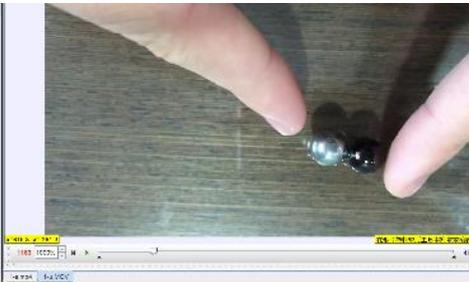
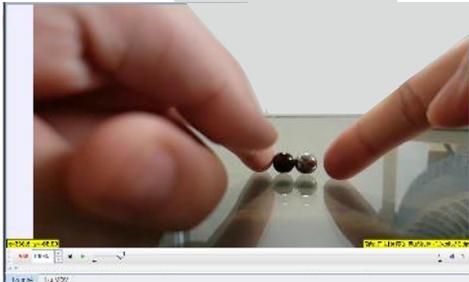
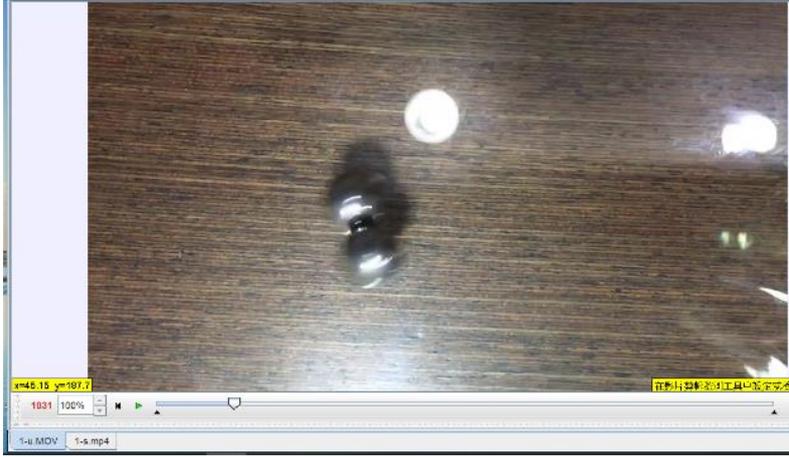
##### (2)因為與地面接觸點的摩擦力會消耗雙珠的運動動能，所以球心的公轉速率才會隨時間逐漸變慢。

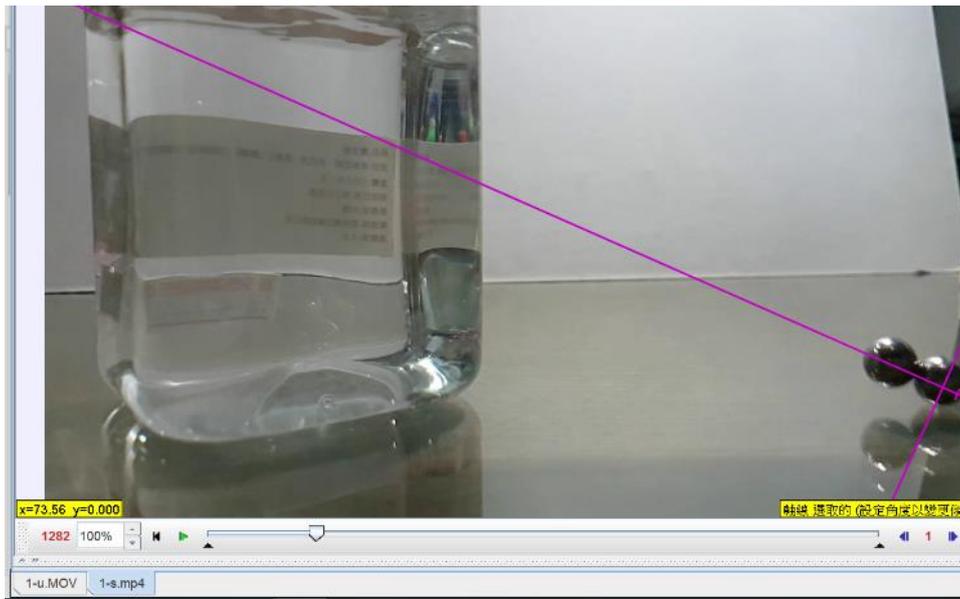
#### 四、研究問題三:不同的球半徑對於轉動的影響

##### 1.步驟與方法：

同時使用兩台手機，一台手機側拍雙珠轉動以便取得雙珠自轉軸的傾斜角度；另一台手機俯拍雙珠轉動的快慢，以便取得雙珠轉動的週期。每錄影完成一種半徑的雙珠，再更換成另外一種不同半徑的雙珠操作並錄影，最後連續完成四種不同半徑的雙珠轉動錄影。

使用 Tracker 軟體來找出不同半徑的雙珠在不同時段的雙珠自轉軸傾斜角度與轉動週期，如圖 11 所示。

	
<p>1.匯入同一種半徑在同一次的側拍與俯拍的影片。</p> <p>2.分別找到兩段影片，當其中一隻手指碰到珠子的瞬間的影格，並記錄該兩個影格編號，而這兩個編號即為兩段影片同步的起始點。</p>	
	
<p>3.在俯拍圖的影片，選定某一個影格，隨著影格的慢動作播放，直到形成球心轉完整一圈的運動為止。</p> <p>4.紀錄轉動完整一圈所需的影格數目，由此換算出該球的轉動週期。</p>	



5. 在側拍圖的影片，選定與步驟 3. 同步的影格，在該影格移動坐標軸的原點至接觸桌面之球的圓心處，拉動座標軸使其達到沿兩球球心連線，由軟體界面得出彈珠與水平方向的傾斜角度。
6. 讓雙珠再自行轉動數圈後，重複步驟 3. 至步驟 5.，記錄五段不同時間的轉動週期與傾斜角度為止。
7. 匯入另外一種半徑的雙珠轉動影片，重複步驟 1. 到步驟 6. 直到四種不同半徑的球都記錄完成為止。



四種不同半徑的球

圖 11 使用軟體測量不同半徑的雙珠之運動狀態

## 2. 實驗數據與分析

(1) 依照球的編號，測量每一種半徑的雙珠於不同的時段在轉動時，雙珠自轉軸的傾斜角度與公轉頻率的關係，如表 5 所示。

表 5 不同半徑的雙珠之自轉軸傾斜角度與公轉頻率

#1	公轉頻率(赫茲)	<b>20.4</b>	<b>18.9</b>	<b>17.5</b>	<b>14.9</b>	<b>11.9</b>
	角度(度)	15.4	12.8	8.3	4.9	3.6
#2	公轉頻率(赫茲)	<b>18.9</b>	<b>16.7</b>	<b>14.9</b>	<b>13.2</b>	<b>11.2</b>
	角度(度)	19.6	13.3	9.3	7.6	5.5
#3	公轉頻率(赫茲)	<b>12.5</b>	<b>11.5</b>	<b>10.8</b>	<b>10.2</b>	<b>9.1</b>
	角度(度)	14.9	12.7	8.7	6.8	5
#4	公轉頻率(赫茲)	<b>8.5</b>	<b>8.1</b>	<b>7.9</b>	<b>7.8</b>	<b>7.5</b>
	角度(度)	7.5	5.9	5.4	5	4.3

(2) 依照球的編號，以公轉頻率為橫軸，雙珠自轉軸傾斜角度為縱軸，畫成關係圖如圖 12 所示。

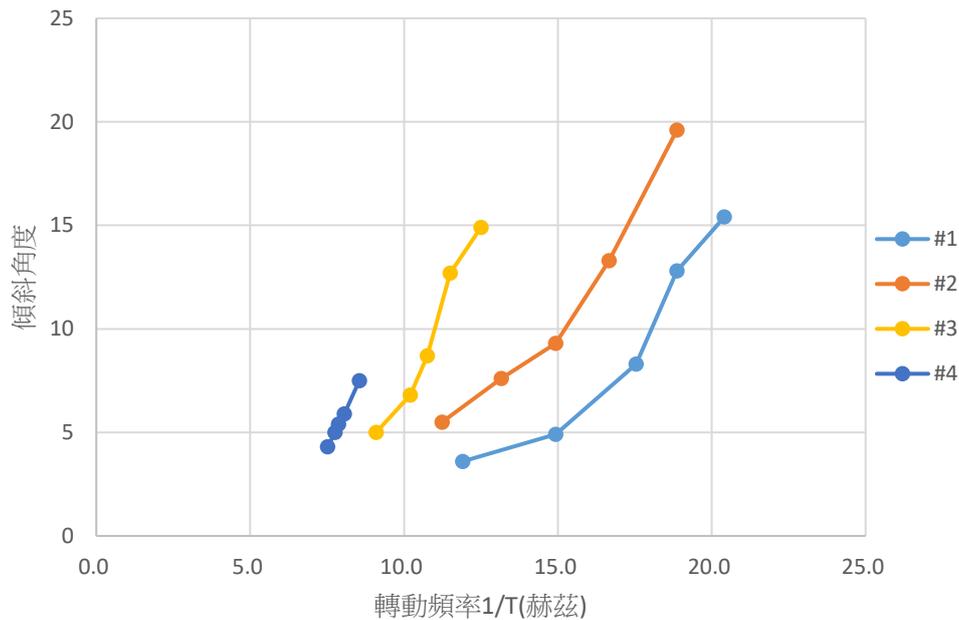


圖 12 雙珠自轉軸傾斜角度與公轉頻率關係

## 3. 結果與討論

- (1) 不同半徑的雙珠的傾斜角度隨著轉動頻率減降低而減小。
- (2) 傾斜角度與轉動頻率的關係，大致落在一條斜直線上。

(3)在相同的轉動頻率下，球的半徑越大，傾斜角度也越大；在相同的傾斜角度，球的半徑越大，轉動頻率也越小。

(4)在頻率變化量相同的情況下，半徑越大的雙珠，其傾斜角度的變化量越大。為了清楚看出這個現象，將上圖中每一種半徑的關係圖標上與數據最符合的趨勢線，如圖 13 所示。

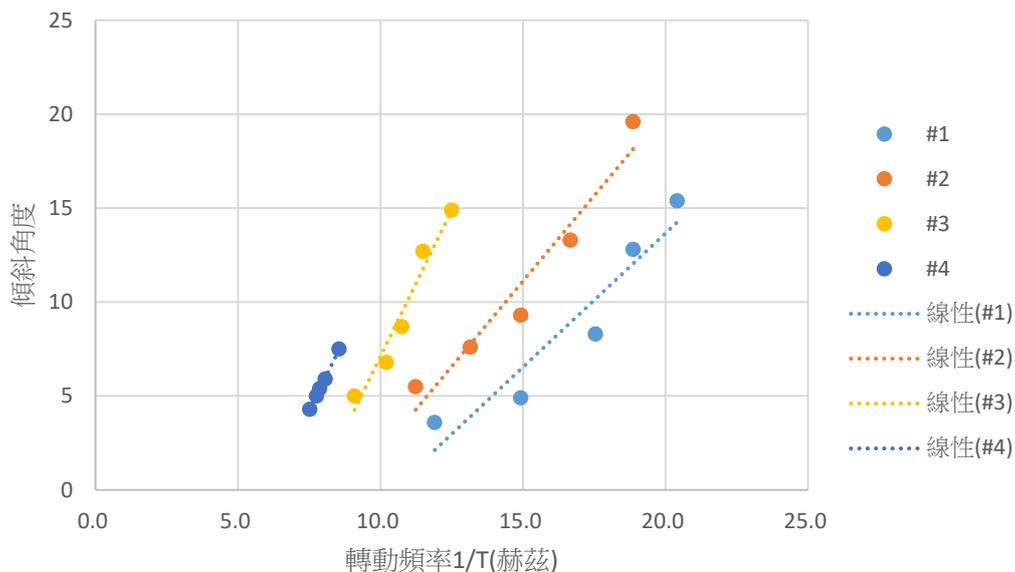


圖 13 雙珠自轉軸傾斜角度與公轉頻率之趨勢線

(7)由圖 13 可看出，半徑越大的雙珠，其趨勢線顯示出的傾斜程度越大，可用斜率表示之，

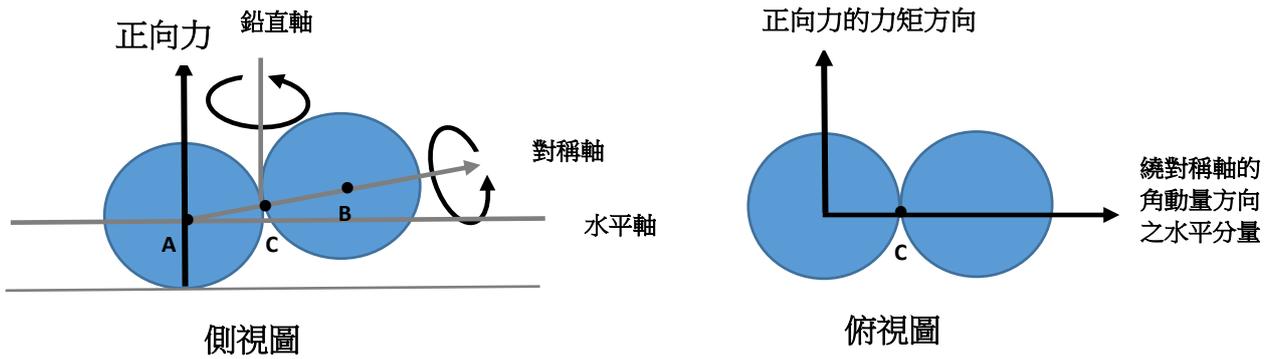
$$\text{斜率} = \frac{\text{傾斜角度變化量}}{\text{轉動頻率變化量}}。$$

#### 4. 建立模型解釋實驗結果

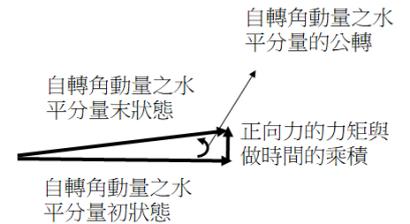
(1)當雙珠維持某傾斜角度運動時，根據側視圖，與地面接觸點受到來自於地面的正向力會和雙珠的重力達成力平衡，故正向力 $=mg$ ， $m$  為雙珠質量， $g$  為重力加速度。

(2)正向力對雙珠的中心  $C$  產生力矩，根據力矩方向的定義，該力矩平行地面且指入指面的方向，亦可從雙珠的正上方之俯視圖觀察力矩的方向。力矩的量值 $\tau = mgr \cos\theta$

(3)雙珠繞其雙珠自轉軸的自轉角速度為 $\omega$ 時，根據球體的角動量關係式，可得此時的自轉角動量的量值 $L_{\text{自轉}} = kmr^2\omega$ 。根據右手定則，自轉的角動量方向沿雙珠自轉軸，其水平分量的方向如俯視圖所示，自轉角動量的水平分量量值 $L_{\text{自轉水平}} = kmr^2\omega \cos\theta$ 。



(4)因為力矩會對角動量產生改變，若作用時間 $\Delta t$  極短，則自轉角動量的水平分量會呈現繞軸轉動 $\Delta\phi$  的公轉運動狀態，如右圖所示。



(5)若公轉的角度 $\Delta\phi$ ，則根據數學的圓弧與圓心角公式可得：

$$(kmr^2\omega\cos\theta)(\Delta\phi) = mgr\cos\theta\Delta t$$

若規定公轉角速度為 $\omega_{\text{公}} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ ，帶入上式可得 $\omega_{\text{公}} \times \omega = \frac{g}{k} \times \frac{1}{r}$

由此可知，在傾斜角度相同時，當雙珠的半徑愈大時，其公轉與自轉的乘積角速度就會愈小，亦即轉動的頻率(與週期呈倒數)就愈小，此推論結果和實驗結果相符合。

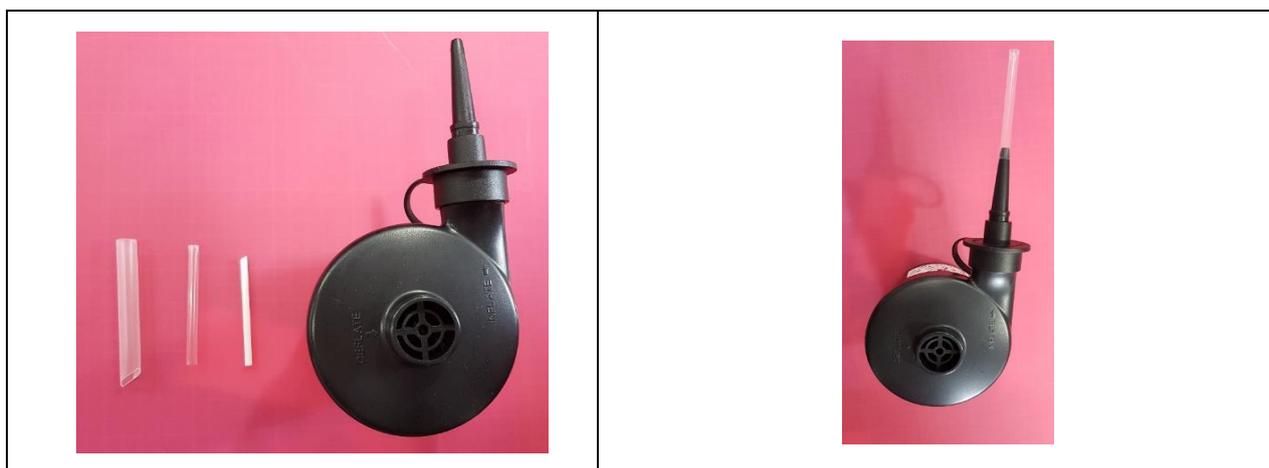
對稱軸產生公轉的原理示意圖

## 五、研究問題四~不同的吹氣方式對於轉動的影響

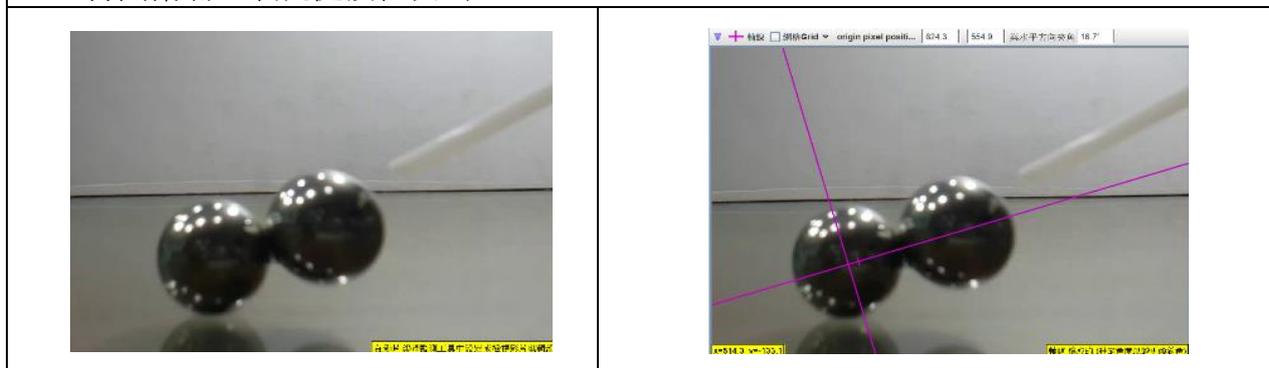
### 1. 步驟與方法：

使用吹氣幫浦來吹氣，因為吹氣幫浦可以提供穩定的吹氣流量。吹氣幫浦在外接不同口徑的吸管來提供不同的風速，當吸管越粗，風速越慢，當吸管越細，風速越快。用同一種吸管吹氣，但是區分為順著球的轉動方向吹氣與逆著球的轉動方向吹氣；最後使用同一口徑的吸管，但是，分別在球的上方與下方吹氣。使用一台手機，側拍雙珠轉動以便取得雙珠自轉軸的傾斜角度。

使用 Tracker 軟體來找出不同吹氣方式對雙珠在不同時段的雙珠自轉軸傾斜角度，如圖 14 所示。



1. 準備吹氣幫浦與不同口徑的吸管，並將不同口徑的吸管接上幫浦的吹氣口
2. 打開幫浦，氣流從吸管吹出



3. 使用細吸管並靠近離地球的上方，吹氣方向與轉動方向相同(根據步驟 7 會有不同吹氣方式之影片)。
4. 在適當的影格，截取雙珠自轉軸的傾斜角度。
5. 重複步驟 3 到 4，中間間隔一段時間並依序找出該種吹氣方式下的傾斜角度。
6. 更換不同吹氣方式的影片，並重複步驟 3 到 5。

圖 14 使用軟體測量不同吹氣方式對雙珠運動之影響

## 2. 實驗數據與分析

(1) 皆用細吸管，在離地球的上方，但是吹氣方向分別為與轉動同方向與反方向等兩種方式。紀錄五次不同時段的雙珠自轉軸傾斜角度，如表 6 所示。

表 6 不同吹氣方向的雙珠自轉軸傾斜角度

拍攝後秒數		1	2	3	4	5
與轉動方向同向	角度	17.4	16	16.5	16.2	16.4
與轉動方向反向	角度	17.2	16.5	15.4	14.5	13.2

以編號為橫軸，角度為縱軸，畫成關係圖如圖 15 所示。

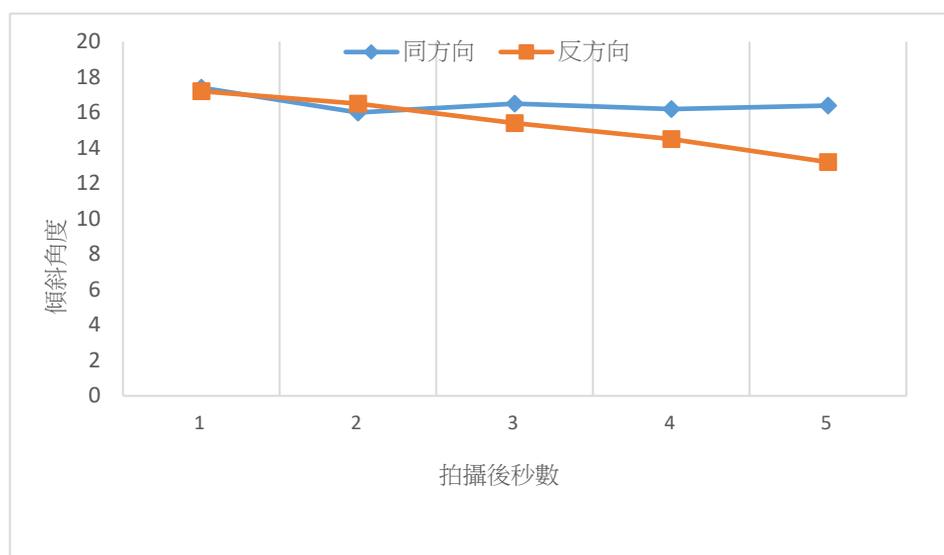


圖 15 不同吹氣方向對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係

(2)皆用細吸管，吹氣方向與轉動同方向，但是吹氣位置在離地球的上方與下方等兩種方式。紀錄五次不同時段的雙珠自轉軸傾斜角度，如表 7 所示。

表 7 不同吹氣位置的雙珠自轉軸傾斜角度

拍攝後秒數		1	2	3	4	5	平均
離地球上	角度	17.4	16	15.2	16.2	16.4	16.24
離地球下	角度	10.8	10.6	11.7	12.1	10.9	11.22

以編號為橫軸，角度為縱軸，畫成關係圖如圖 16 所示。

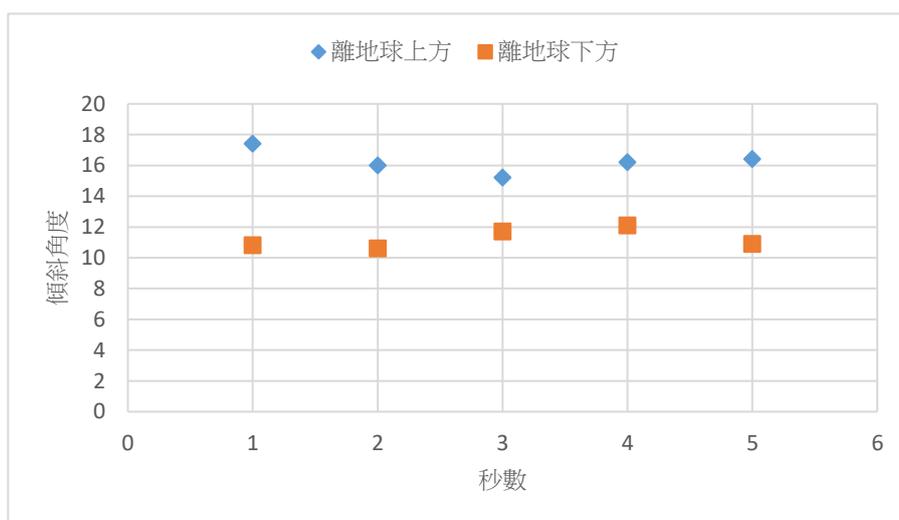


圖 16 不同吹氣位置對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係

(3)吹氣方向與轉動同方向，皆吹離地球的上方，但是使用細，中，粗等三種口徑不同的吸管。  
紀錄五次不同時段的雙珠自轉軸傾斜角度，如表 8 所示。

表 8 不同粗細的吹氣吸管的雙珠自轉軸傾斜角度

拍攝後秒數		1	2	3	4	5	平均
細吸管	角度	17.4	16	15.2	16.2	16.4	16.24
中吸管	角度	10.2	10.7	13.3	11.8	11.4	11.48
粗吸管	角度	9.7	8.7	8.2	8.9	9.4	8.98

以編號為橫軸，角度為縱軸，畫成關係圖如圖 17 所示。

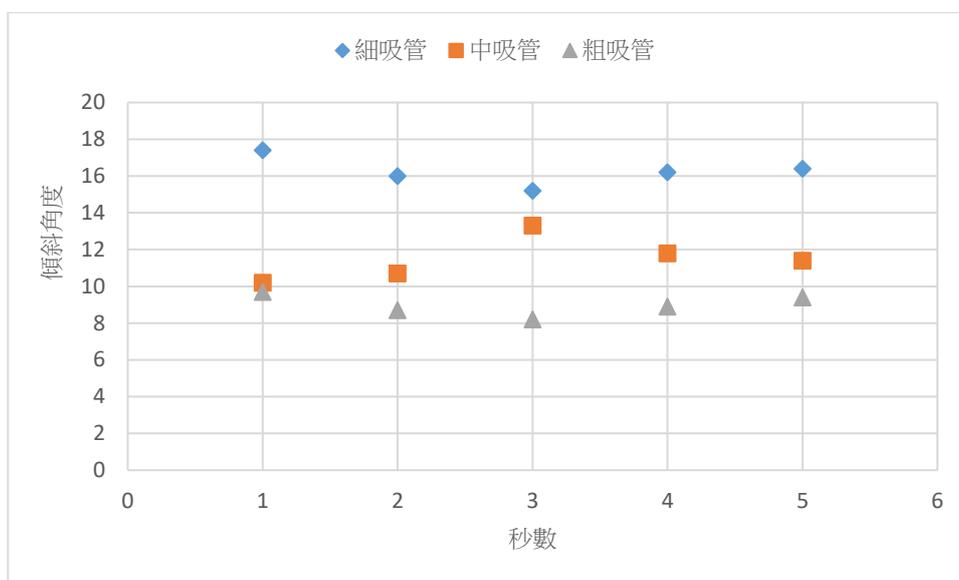


圖 17 不同粗細的吹氣吸管對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係

### 3.結果與討論

- (1) 由圖 15 可看出，由不同時間為橫軸，傾斜角度為縱軸所得到的關係圖，能更進一步的看出吹氣方向與旋轉同方向時的傾斜角度會大於吹氣方向與旋轉反方向。
- (2) 由(1)的結論可推論出，當吹氣所造成的力矩與雙珠轉動同方向時，會加大傾斜角度。續由研究問題一，二的結果綜合可知，若傾斜角度變大，則代表轉動速度越快。反之，如果吹氣所造成的力矩與雙珠轉動反方向時，會造成傾斜角度的減少也就代表旋轉速率的降低。
- (3) 皆用細吸管，吹氣方向與轉動同方向，但是吹氣位置在離地球的上方與下方等兩種方式。吹氣位置在上方時雙珠自轉軸的平均傾斜角度大於下方。由不同時間為橫軸，傾

斜角度為縱軸所得到的關係圖，能更進一步的看出吹氣位置在球上方時傾斜角度大於吹氣位置在球的下方。

(4)由(3)的結論可推測出，當吹氣位置在上方時，所造成的力矩與雙珠自轉轉動同方向，會加快自轉速度並間接導致公轉速度加快，傾斜角度的變大。反之，如果吹氣位置所造成的力矩與雙珠自轉轉動反方向，會降低旋轉速度並造成傾斜角度小於與自轉同方向。

(5) 由圖 17 可看出，吹氣方向與轉動同方向，皆吹離地球的上方，但是使用細、中、粗等三種口徑不同的吸管。雙珠自轉軸的平均傾斜角度為細吸管>中吸管>粗吸管。由不同時間為橫軸，傾斜角度為縱軸所得到的關係圖，可看出相同的情況。

#### 4.建立模型解釋實驗結果

(1)由雙珠轉動時的受力模型(圖 18)可知，若以不同方向對雙珠離地球吹氣，其有效力臂是離地端球之球心與接地端點之連線，此距離隨雙珠自轉軸的傾斜角度變小而減少。根據圖示可知，該有效力臂最小為球之半徑的兩倍，最大值為球之半徑的三倍，且此力矩是影響雙珠的公轉。

(2)若是在雙珠的離地球上方與下方吹氣，其有效力臂是珠子半徑的一倍，而此力矩是影響雙珠的自轉。

(3)由(1)與(2)可得知，吹氣方向分別為與公轉同方向與反方向的變因對於傾斜角度的變化影響程度會大於在雙珠的離地球上方與下方吹氣方式的變因。

(4)因為幫浦的吹氣量是故定的，所以風速的大小關係為細吸管>中吸管>粗吸管。可推論當吹氣速度越快，對雙珠會產生越大的力矩，雙珠的公轉速度與傾斜角度就隨之變大。

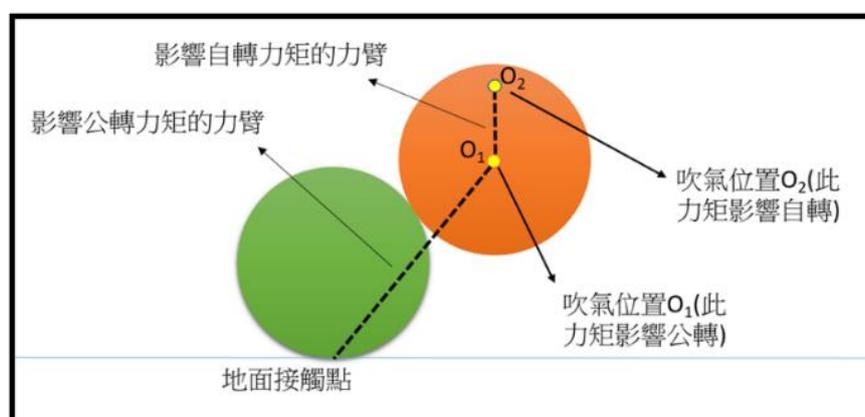


圖 18、影響自轉與公轉的力矩分析

## 六、進階研究探討一：自轉與公轉之相互關係

### 1. 步驟與方法：

當雙珠開始進動時，使用高速攝影機從上方拍攝並得到以下分別連續的圖片(圖 19,20)。

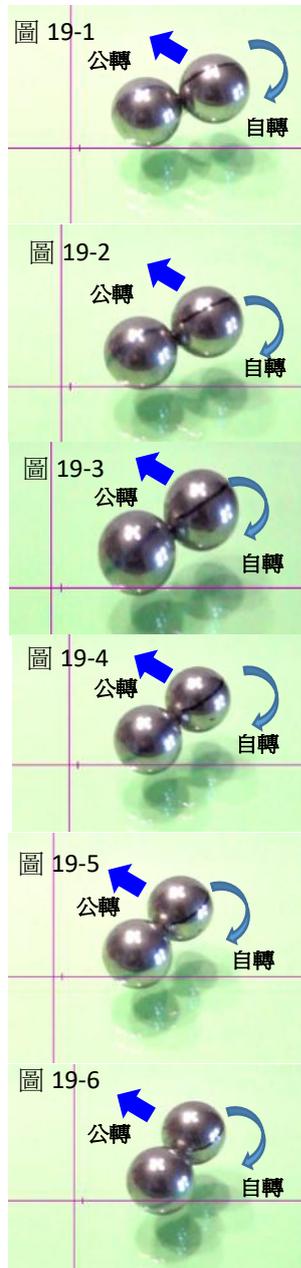


圖 19、逆時針公轉

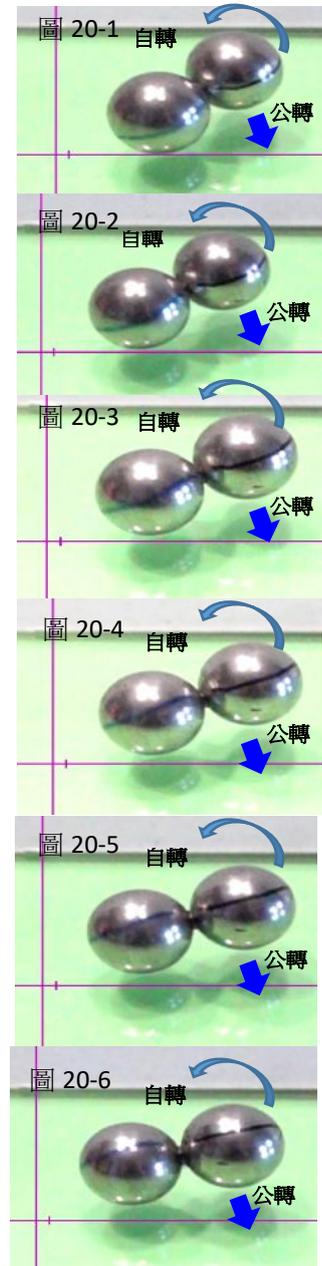


圖 20、順時針公轉

## 2. 實驗數據與分析

(1) 觀察在不同時段自轉與公轉一圈各自所需要的時間，並得到表 9。

表 9 自轉與公轉一圈所需時間

轉動時間	公轉一圈所需時間(秒)	自轉一圈所需時間(秒)
時段 1	0.113	0.113
時段 2	0.113	0.113
時段 3	0.114	0.114
時段 4	0.115	0.115

(2) 觀察在不同時間自轉與公轉各自的平均速率，並得到表 10。

表 10 自轉與公轉速率

轉動速率與經歷時間	錄製後 2 秒	錄製後 4 秒	錄製後 6 秒
公轉(cm/s)	85.9	77.4	76
自轉(cm/s)	78.5	72.7	71.3

## 3. 結果與討論

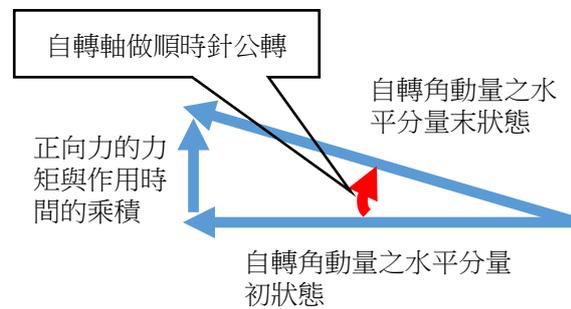
(1) 從圖 19 可以觀察到當公轉方向為逆時鐘

旋轉時，自轉角動量的方向指向地面。

(2) 從圖 20 可以觀察到當公轉方向為順時鐘

旋轉時，自轉角動量的方向指向天空。

(3) 圖 19 與圖 20 的實驗結果，與在研究問題三所建立之理論模型吻合，即與地面接觸點之正向力對雙珠質心之力矩，讓自轉的角動量改變，進而造成了雙珠的公轉現象，如右圖所示。



順時針公轉原理示意圖

(4) 從表 9 發現，在不同數據紀錄時間，自轉與公轉一圈所花的時間記錄至小數點以下第 3 位時，所得秒數幾乎相同。

(5) 然而若將表 9 的數據，以錄製後經歷時間為橫軸，轉動速率為縱軸，繪製關係圖 21。由圖 21 可看出，因為公轉速率大於自轉速率，所以接地端的圓球與地面接觸點對的會有滑動現象，故會有動摩擦力阻止滑動，此結果與研究問題 2 的受力狀態推論吻合。

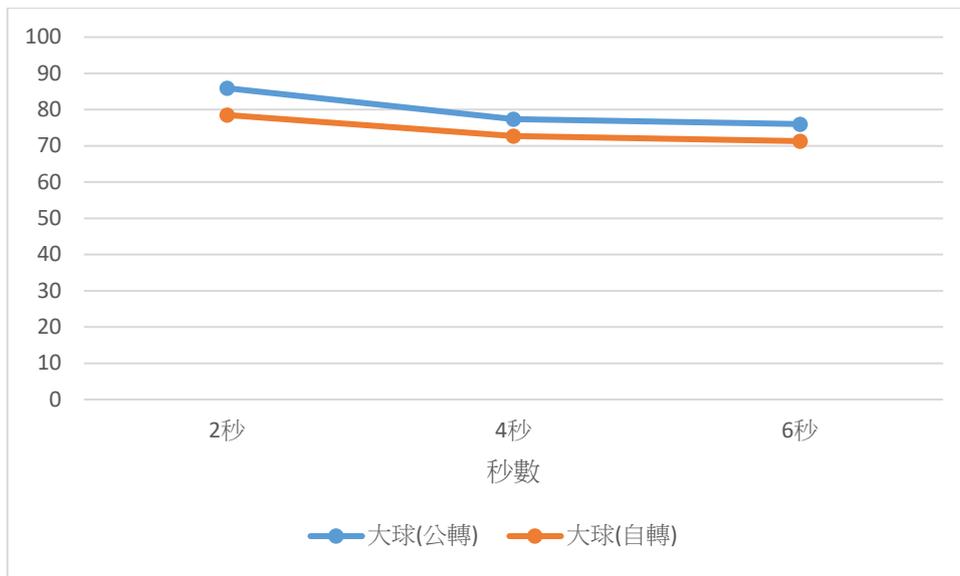
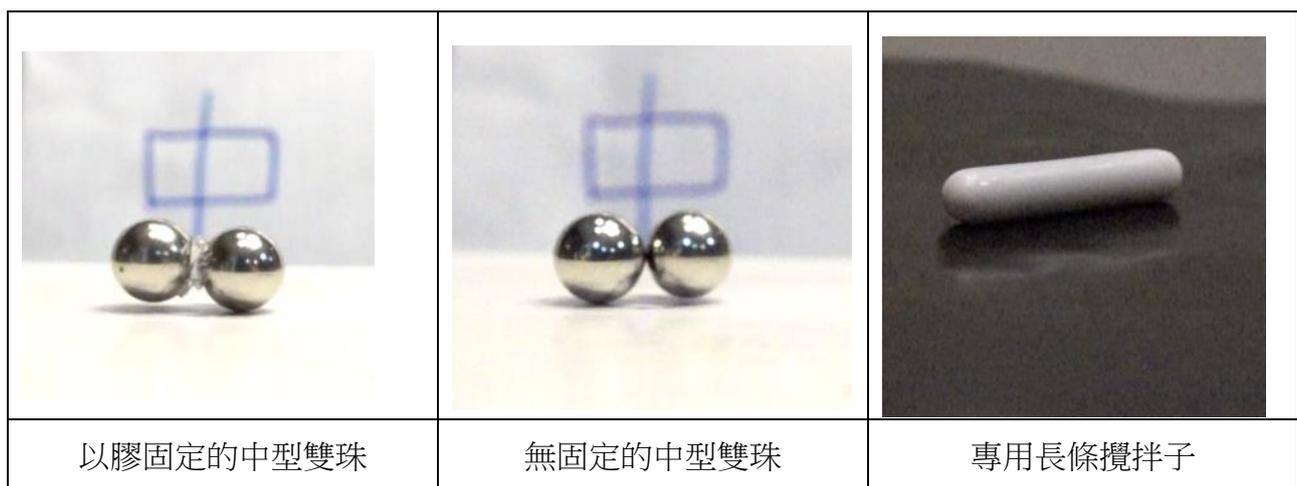


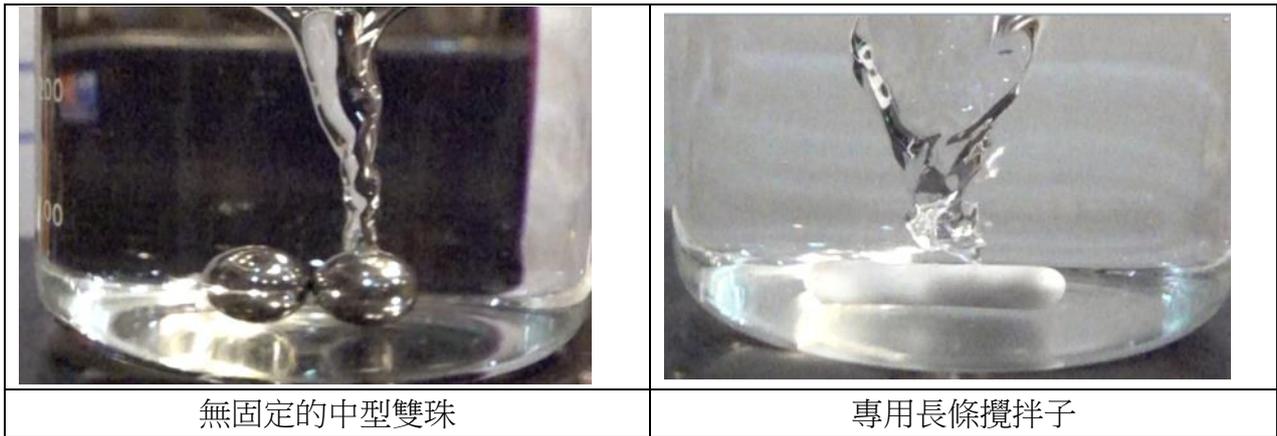
圖 21 公轉與自轉的速率

## 七、進階研究探討二：以磁攪拌機的磁力驅動雙珠運動

### 1. 步驟與方法：

因為攪拌機塑料面板下有旋轉的磁鐵來使攪拌子旋轉，故當磁攪拌機啟動時，攪拌機內部的磁鐵的磁力就會讓雙珠相互吸引而黏貼。接著使用四種類型的雙珠，分別為以膠固定以及沒有以膠固定的半徑較大的中型球以及半徑較小的小型球，或是專用長條攪拌子在磁攪拌機中進行旋轉，將器具放入裝有水的燒杯並放置於磁攪拌機上，並觀察其在啟動十秒後的現象。使用高速攝影機分別拍攝，並觀察其在水中以及空氣中旋轉的差異，如下圖所示。





## 2. 實驗數據與分析

將雙珠與長條攪拌子直接放置磁於攪拌機上，並觀察其在啟動十秒後的現象，並測量不同種類雙珠的平均傾斜角度如表 11。

表 11 不同種類雙珠在磁攪拌機磁力驅動下運動時的自轉軸平均傾斜角度

球種類	固定中型球	無固定中型球	固定小型球	無固定小型球
平均傾斜角度	2.9	1.2	8.3	6.9

## 3. 結果與討論

- (1) 在空氣中旋轉時，專用長條攪拌子會貼在水平面上，而雙珠都會在旋轉速率超過一個值時從貼在水平面抬升到有傾斜角度。
- (2) 在同樣的時間內，小型球會比中型球達到更大的傾斜角度，且固定的雙珠會比未固定的傾斜角度還大。
- (3) 固定的雙珠在水中無法正常旋轉，會定在原地不旋轉。
- (4) 在水中旋轉時，雙珠與長條攪拌子在達到一定的速率時，會在其上方產生漩渦。
- (5) 在水中旋轉且速率夠快時，雙珠中其中一球會抬升，而另一球則會貼在地面上，兩球會一直互換。

## 陸、結 論

### 一、時間的校正

(一)擷取不同的影片，得到碼錶時間(秒):影格編號為 1:224。

### 二、不對雙珠吹氣時雙珠自轉軸傾斜角度對時間的變化

(一)雙珠傾斜角度較大時，角度會隨時間有變大與變小的震盪變化。

(二)雙珠的傾斜角度整體而言，隨著時間在慢慢減少，且當傾斜角度為零時，雙珠仍然會貼在地面轉動數圈才完全靜止。

### 三、在不對雙珠吹氣的情況下，離地球球心的運動軌跡

(一)離地球球心的運動軌跡會形成一個完整的圓圈，而圓圈的圓心會隨時間飄移且形成圓弧狀。

(二)當傾斜角度變小，圓圈的直徑也會相應的增大。因此能看出圓圈的直徑與雙珠自轉軸的傾斜角度有一定的比例關係。

(三)離地球球心轉動週期隨著轉動的時間越長而增加。根據物理學對轉動快慢的描述，也就是雙珠的公轉轉速越來越慢。

(四)速率等於距離/時間，球心的轉動速率越來越慢。

(五)推論接地端的圓球在與地面的接觸點，受到與自轉速率方向平行的摩擦力，此摩擦力恰好作為雙珠質心作圓周運動所需之向心力，且摩擦力會消耗雙珠的運動動能，所以球心的公轉速率才會隨時間逐漸變慢。

### 四、不同的球半徑為操縱變因對於轉動的影響

(一)雙珠的傾斜角度皆與轉動頻率的關係，大致落在一條斜直線上。

(二)在相同的轉動頻率下，球的半徑越大，傾斜角度也越大；在相同的傾斜角度，球的半徑越大，轉動頻率也越小。

(三)半徑越大的雙珠，傾斜角度與轉動頻率之關係圖的斜率(斜率= $\frac{\text{傾斜角度變化量}}{\text{轉動頻率變化量}}$ )越大。

(四)根據理論模型，雙珠的公轉狀態是因為正向力力矩對自轉角動量的變化所致，由此可解釋在相同的傾斜角度時，當雙珠的半徑愈大，其轉動頻率就愈小。

## 五、不同的吹氣方式的操縱變因對於轉動的影響

(一)當吹氣所造成的力矩與雙珠轉動同方向時，會加快旋轉速度，則傾斜角度也會隨之變大。

(二)當吹氣位置在上方時，所造成的力矩與雙珠自轉轉動同方向，會加快自轉速度並間接導致公轉速度加快，傾斜角度的變大。

(三)吹氣方向為與公轉同方向與反方向的變因對於傾斜角度的變化影響程度會大於在雙珠的離地球上與下方吹氣方式的變因。根據建立的理論模型，推論其原因是以不同方向對雙珠離地球吹氣時，有效力臂最小為球之半徑的兩倍，最大值為球之半徑的三倍，且此力矩是影響雙珠的公轉。然而，若是在雙珠的離地球上與下方吹氣，其有效力臂是珠子半徑的一倍，而此力矩是影響雙珠的自轉，此力矩小於影響公轉的力矩。

(四)因為幫浦的吹氣量是故定的，所以風速的大小關係為細吸管>中吸管>粗吸管。當吹氣速度越快，對雙珠會產生越大的力矩，雙珠的公轉速度與傾斜角度就隨之變大。

## 六、進階研究探討一：自轉與公轉之的相互關係

(一)當公轉方向為逆時鐘旋轉時，自轉角動量的方向指向地面。

(二)當公轉方向為順時鐘旋轉時，自轉角動量的方向指向天空。

(三)自轉與公轉一圈的週期大致相等，但是公轉速率大於自轉速率。

(四)上述實驗結果驗證對於雙珠受力及力矩對角動量的影響之理論模型在此情況是適用。

## 七、進階研究探討二：以磁攪拌機的磁力驅動雙珠運動

- (一)在空氣中旋轉時，專用長條攪拌子會貼在水平面上，而雙珠都會在旋轉速率超過一個值時從貼在水平面抬升到有傾斜角度。
- (二)在同樣的時間內，小型球會比中型球達到更大的傾斜角度，且固定的雙珠會比未固定的傾斜角度還大。
- (三)固定的雙珠在水中無法正常旋轉，會定在原地不旋轉。
- (四)在水中旋轉時，雙珠與長條攪拌子在達到一定的速率時，會在其上方產生漩渦。
- (五)在水中旋轉且速率夠快時，雙珠中其中一球會抬升，而另一球則會貼在地面上，兩球會一直互換。
- (六)雙珠的進動現象有機會應用在磁攪拌子形狀的改良，進而讓攪拌的方式更多樣化。

## 柒、未來展望

將本研究應用在磁攪拌機的改良，嘗試將磁攪拌子的型態改為雙圓形磁球體的黏合，讓磁攪拌子在運轉時除了有公轉的轉動，也能產生自轉的運動，使其攪拌空間範圍擴大。未來可以利用磁攪拌機的磁力驅動，更深入研究雙珠在液體中的進動現象。另外也可觀察由不同大小的兩珠組成的雙珠是否會有其他不一樣的現象發生。之前的研究中雙珠質心都在兩顆相同球的連接處而當大球黏小球時，兩顆球的質心就不是在黏接處，而是會靠近大球。

## 捌、參考資料及其他

- 1.網路上的颶風球影片 <https://www.youtube.com/watch?v=rTfNdoeqzx0>
- 2.隨風起舞-探討颶風球運動之現象(2019) · 高雄市第 59 屆科展·李冠儀、邱健紘、陳晉緯
- 3.康軒文化事業 (2017) · *國民中學自然課本第五冊* · 康軒文教事業股份有限公司。
- 4.南一文化事業 (2017) · *高級中學物理課本 2B* · 南一文教事業股份有限公司。
- 5.楊仲準 (2012) · 應用於物理教學之影像數位分析技術 · *物理教育學刊*，13(1)，41-49。
6. Raymond A. Serway, John W. Jewett (2002) · *物理學(上)* · 譯者:呂正中等人 · 滄海書局。

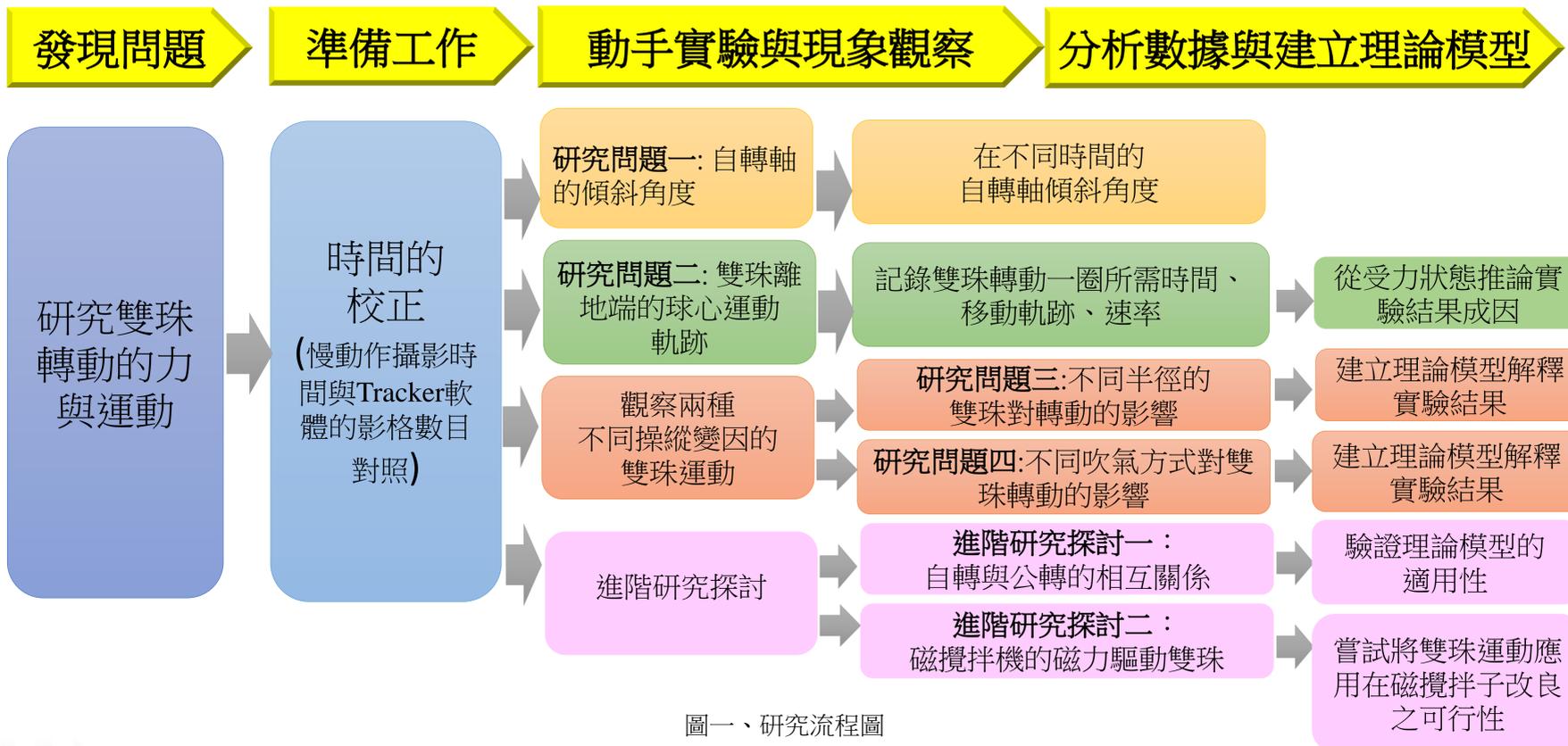
## 【評語】 030103

1. 觀察雙珠旋轉的現象相當有趣。
2. 能就得到現象做出良好的分析。
3. 能嘗試將研究結果結合生活應用（攪拌子），也許可以用來進一步的討論攪拌效能及其應用。

# 摘要

我把兩顆半徑相同的圓球體黏著在一起，在平面上轉動雙珠並用手機從側面與俯視拍攝其運動影片。將拍攝影片匯入電腦，隨後利用軟體Tracker，研究雙珠在不吹氣的情況下，其運動的型態，並且從受力狀態推論其成因。接下來操縱不同半徑的雙珠和對雙珠不同的吹氣方式來觀察對其運動型態的影響。研究發現，雙珠的半徑與不同的吹氣方式造成的力矩對雙珠運動皆會有規律性的影響，因此嘗試建立理論模型來解釋實驗結果的規律性。在最後的進階研究探討，不僅由實驗結果再度驗證上述理論模型的適用性，也發現雙珠運動在磁攪拌機的磁力趨動下也呈現出進動現象。

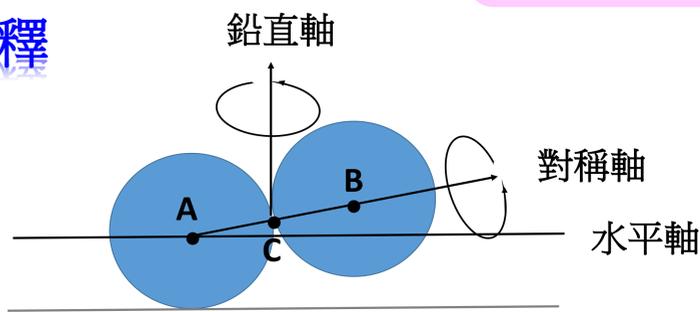
## 研究過程或方法



圖一、研究流程圖

## 原理與名詞解釋

颶風球的運動型態-進動現象：  
根據文獻參考，當施力於兩球時，兩球會同時做兩種運動：分別為繞著鉛直軸轉動，又稱為公轉運動；與繞著對稱軸轉動，又稱為自轉，如圖二所示。

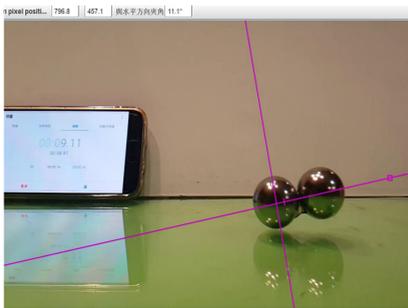


圖二、雙珠的運動區分為公轉與自轉

## 研究結果與討論

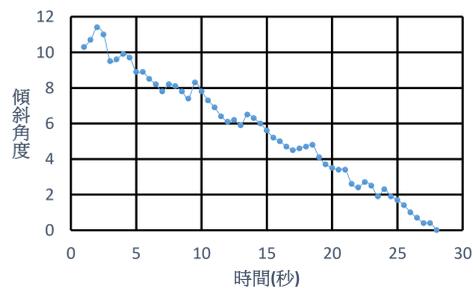
### 研究問題一：雙珠自轉軸傾斜角度對時間的變化

**步驟與方法:**使坐標軸的原點至接觸桌面之球的圓心處，拉動座標軸使其達到沿兩球球心連線，由軟體界面得出彈珠與水平方向的傾斜角度。



圖三、雙珠自轉軸的傾斜角度

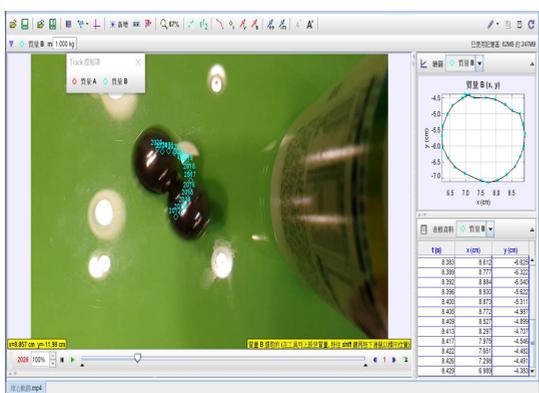
**結果與討論:**由圖四可看出，鋼珠重頭到尾，角度不停的在震盪變化。但整體而言，傾斜角度會隨著時間在遞減。



圖四、雙珠自轉軸的傾斜角度對時間的關係

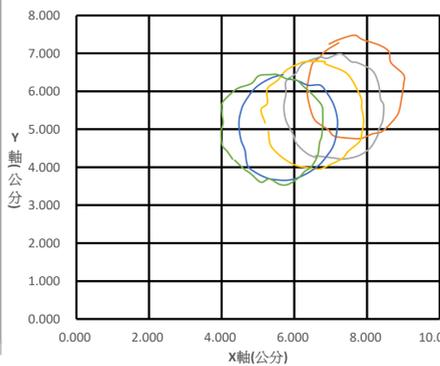
### 研究問題二：離地端球心的運動軌跡

**步驟與方法:**隨著影格的慢動作播放，一格一格的標示出離開地面之球的球心在不同時刻的座標，直到形成球心轉完整一圈的運動軌跡為止。



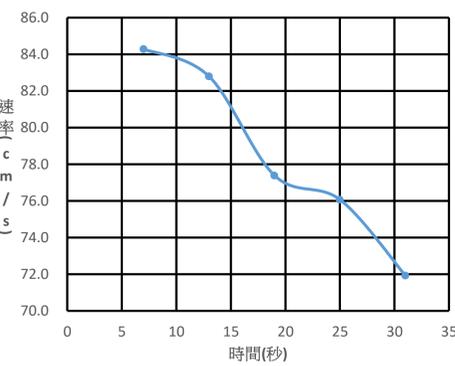
圖五、離地端球心的運動軌跡

**實驗數據與分析:**



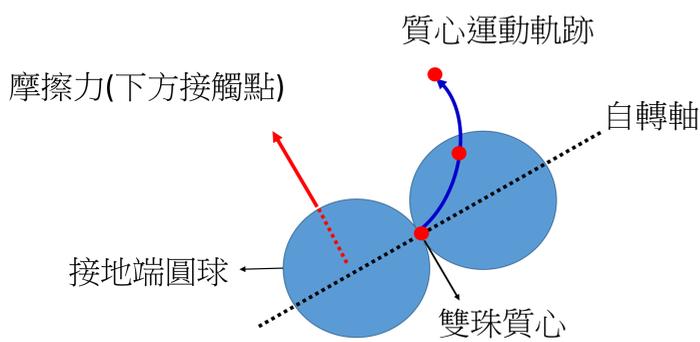
圖六、不同時間內離地端球心的運動軌跡

**結果與討論:**



圖七、離地端球心的公轉速率對時間的變化關係

**從雙珠受力狀態推論離地端球心運動結果的成因：**



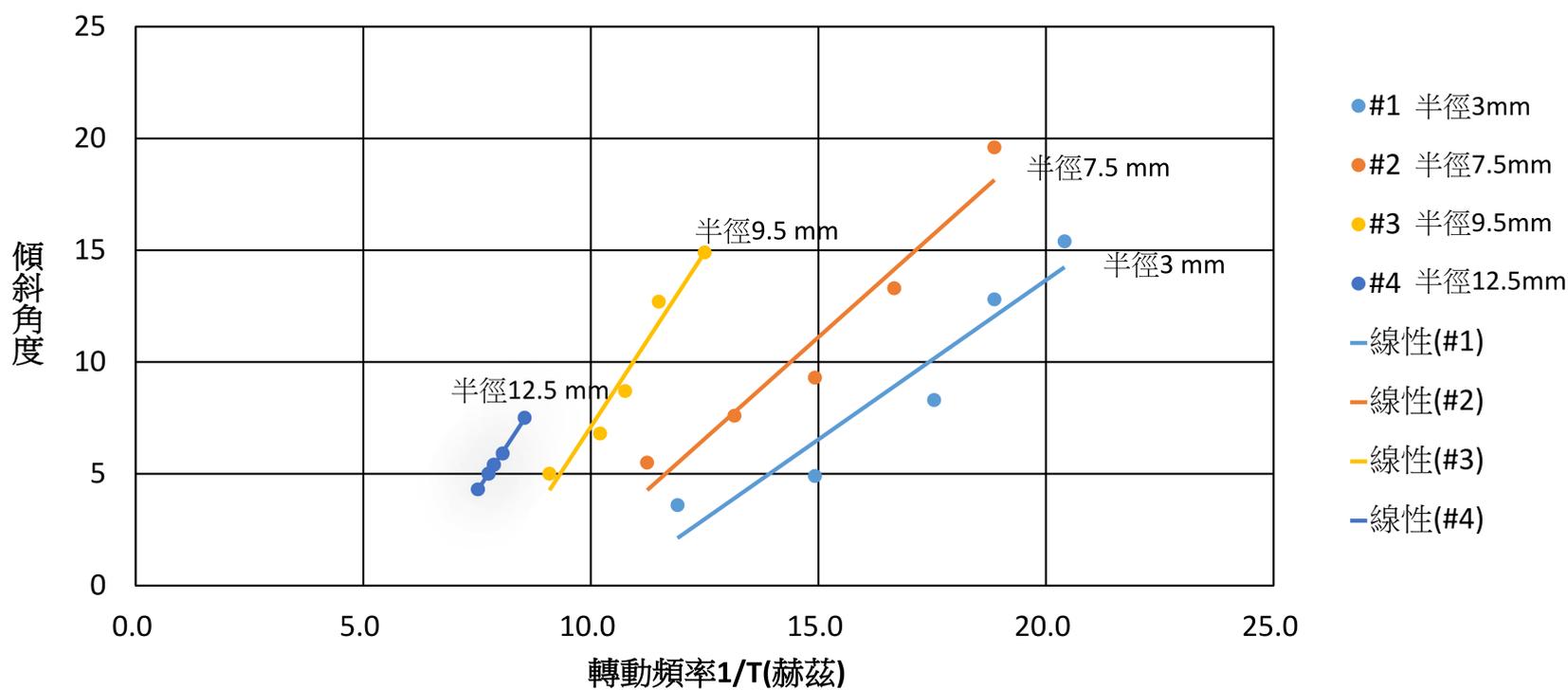
圖八、俯視圖：雙珠水平方向受力推論

(1)當雙珠在進動時，雙珠同時有繞對稱軸的自轉，以及以雙珠連接處(雙珠質心)至地面投影點為圓心的公轉，如圖八所示。推論接地端的圓球在與地面的接觸點，受到與自轉速率方向平行的摩擦力，此摩擦力恰好作為雙珠質心作圓周運動所需之向心力，所以離地端球心的公轉圓心才會形成左圖的圓弧狀軌跡。

(2)因為與地面接觸點的摩擦力會消耗雙珠的運動動能，所以球心的公轉速率才會隨時間逐漸變慢。

# 研究問題三:不同的球半徑對於轉動的影響

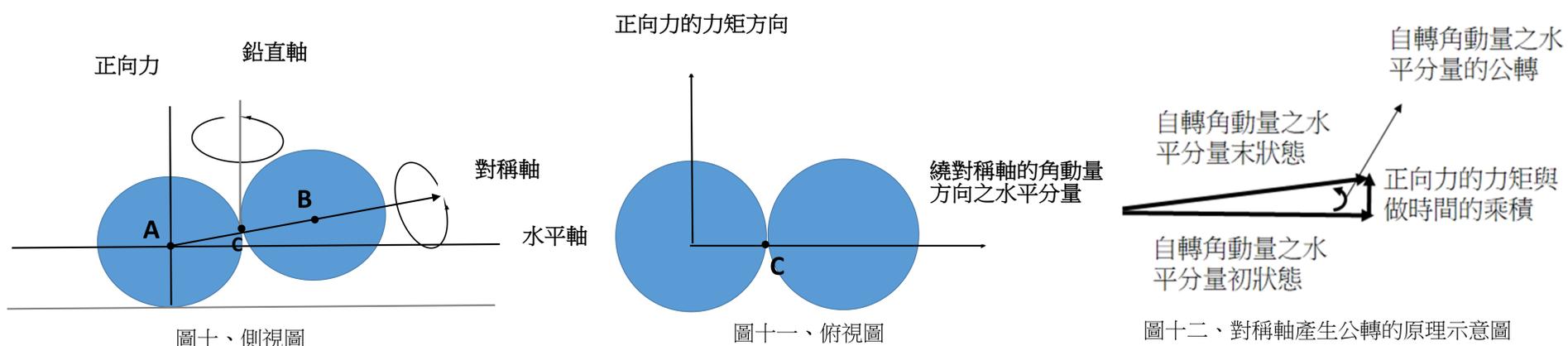
## 結果與討論



圖九、不同的球半徑對於轉動的影響

## 建立模型解釋實驗結果

根據右手定則，自轉的角動量方向沿雙珠自轉軸，其水平分量的方向如俯視圖所示。因為力矩會對角動量產生改變，若作用時間極短，則自轉角動量的水平分量會呈現繞軸轉動的公轉運動狀態，如圖十二所示。則根據數學的圓弧與圓心角公式可得，當傾斜角度相同時，雙珠的半徑愈大時，其公轉與自轉的乘積角速度就會愈小，亦即轉動的頻率(與週期呈倒數)就愈小，此推論結果和實驗結果相符合。



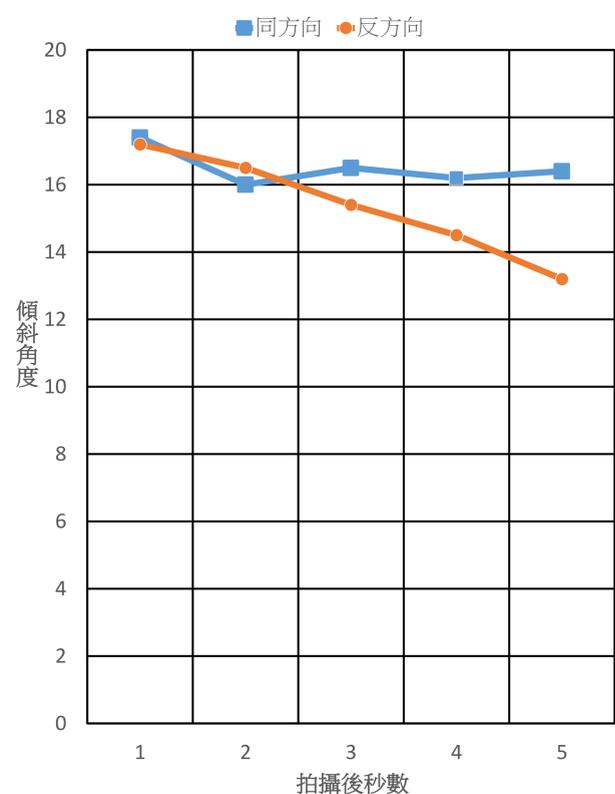
圖十、側視圖

圖十一、俯視圖

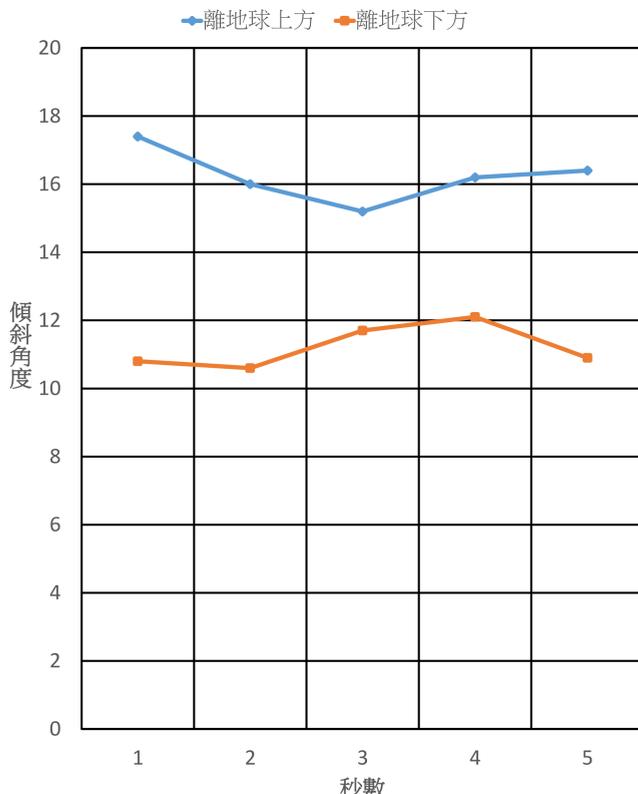
圖十二、對稱軸產生公轉的原理示意圖

# 研究問題四:不同的吹氣方式對於轉動的影響

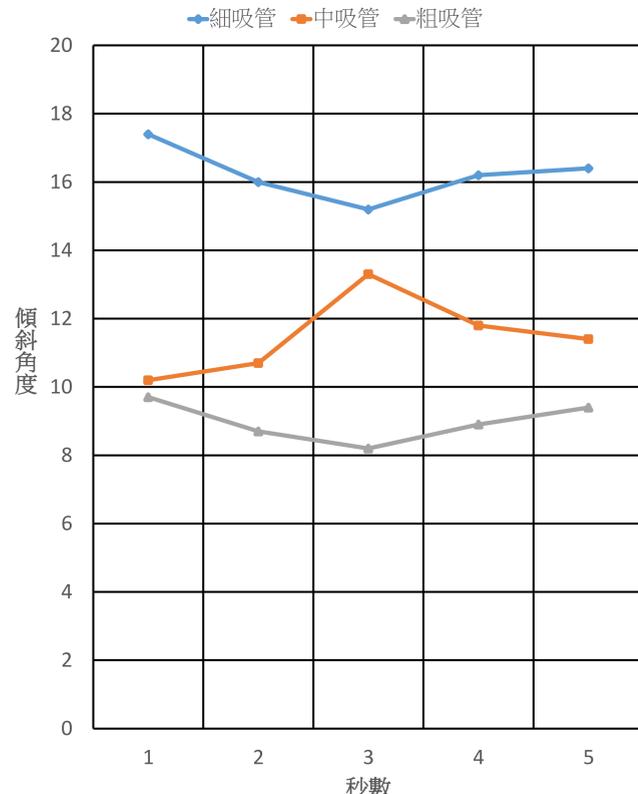
## 實驗數據與分析



圖十三、不同吹氣方向對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係



圖十四、不同吹氣位置對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係



圖十五、不同粗細的吹氣吸管對雙珠自轉軸傾斜角度的影響關係

## 結果與討論

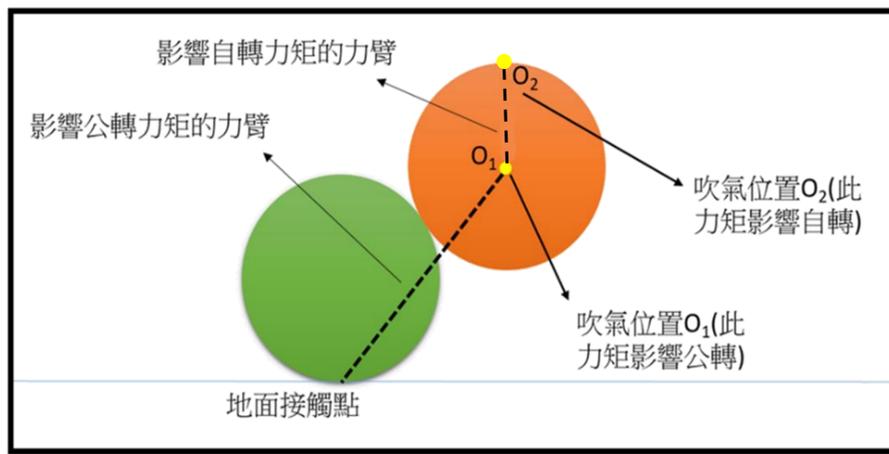
- 由圖十三可看出，由不同時間為橫軸，傾斜角度為縱軸所得到的關係圖，能看出吹氣方向與旋轉同方向時的平均傾斜角度會大於吹氣方向與旋轉反方向。
- 皆用細吸管，吹氣方向與轉動同方向，但是吹氣位置在離地球的上方與下方等兩種方式。吹氣位置在上方時雙珠自轉軸的平均傾斜角度大於下方。由不同時間為橫軸，傾斜角度為縱軸所得到的關係圖，能更進一步的看出吹氣位置在球上方時傾斜角度大於吹氣位置在球的下方。
- 由圖十五可看出，吹氣方向與轉動同方向，皆吹離地球的上方，但是使用細、中、粗等三種口徑不同的吸管。雙珠自轉軸的平均傾斜角度為細吸管>中吸管>粗吸管。由不同時間為橫軸，傾斜角度為縱軸所得到的關係圖，可看出相同的情況。

## 建立模型解釋實驗結果

(1)由雙珠轉動時的受力模型(圖十六)可知，若以不同方向對雙珠離地球吹氣，其有效力臂是離地端球之球心與接地端點之連線，此距離隨雙珠自轉軸的傾斜角度變小而減少。根據圖示可知，該有效力臂最小為球之半徑的兩倍，最大值為球之半徑的三倍，且此力矩是影響雙珠的公轉。

(2)若在雙珠的離地球上與下方吹氣，其有效力臂是珠子半徑的一倍，此力矩影響雙珠的自轉。

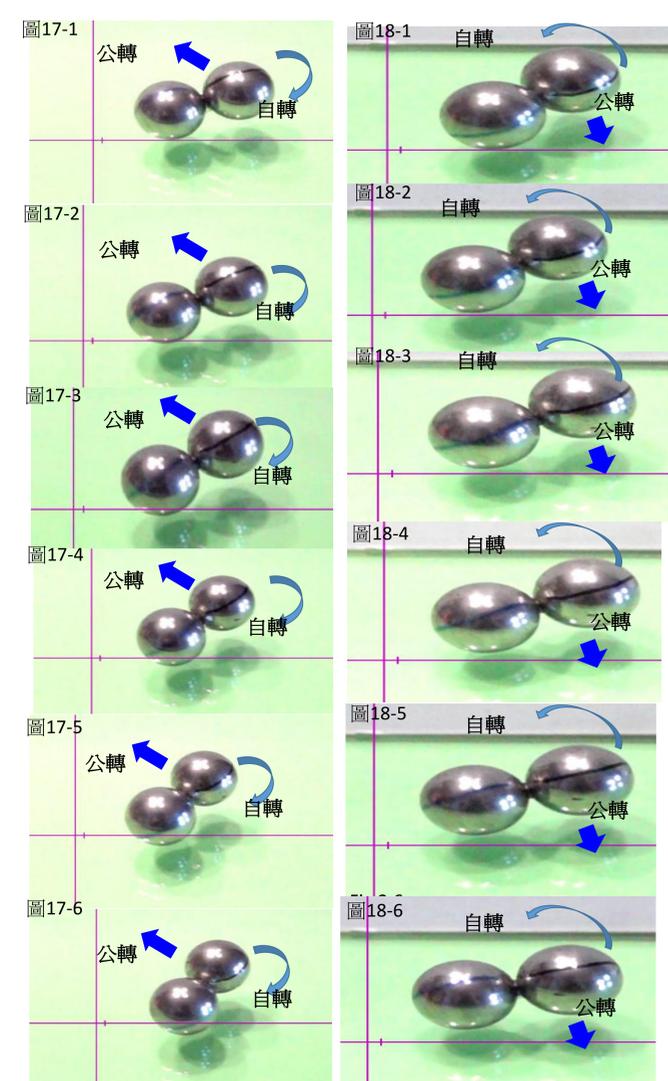
(3)因為幫浦的吹氣量是故定的，所以風速的大小關係為細吸管>中吸管>粗吸管。可推論當吹氣速度越快，對雙珠會產生越大的力矩，雙珠的公轉速度與傾斜角度就隨之變大。



圖十六、雙珠轉動時的受力模型

## 進階研究探討一：自轉與公轉之相互關係

### 步驟與方法



圖十七、逆時針公轉

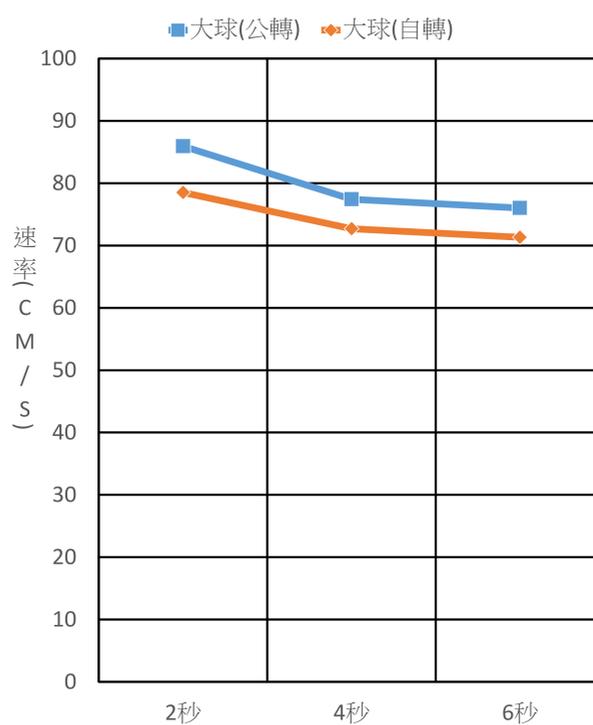
圖十八、順時針公轉

### 結果與討論

(1)從圖十七可以觀察到當公轉方向為逆時鐘旋轉時，自轉角動量的方向指向地面。

(2)從圖十八可以觀察到當公轉方向為順時鐘旋轉時，自轉角動量的方向指向天空。

(3)從圖二十發現，在不同數據紀錄時間，自轉與公轉一圈所花的時間記錄至小數點以下第3位時，所得秒數幾乎相同。



圖十九、公轉與自轉的速率

轉動時間	公轉一圈所需時間(秒)	自轉一圈所需時間(秒)
時段1	0.113	0.113
時段2	0.113	0.113
時段3	0.114	0.114
時段4	0.115	0.115

圖二十、自轉與公轉一圈所需時間

## 進階研究探討二：以磁攪拌機的磁力驅動雙珠運動

### 步驟與方法



圖二十一、無固定的中型雙珠



圖二十二、以膠固定的中型雙珠

### 結果與討論

(1)在空氣中旋轉時，專用長條攪拌子會貼在水平面上，而雙珠都會在旋轉速率超過一個值時從貼在水平面抬升到有傾斜角度。

(2)在同樣的時間內，小型球會比中型球達到更大的傾斜角度，且固定的雙珠會比未固定的傾斜角度還大。

(3)固定的雙珠在水中無法正常旋轉，會定在原地不旋轉。

(4)在水中旋轉時，雙珠與長條攪拌子在達到一定的速率時，會在其上方產生漩渦，其中一球會抬升，而另一球則會貼在地面上，兩球會一直互換。

### 未來展望

將本研究應用在磁攪拌機的改良，嘗試將磁攪拌子的型態改為雙圓形磁球體的黏合，讓磁攪拌子在運轉時除了有公轉的轉動，也能產生自轉的運動，使其攪拌空間範圍擴大。未來可以利用磁攪拌機的磁力驅動，更深入研究雙珠在液體中的進動現象。另外也可觀察由不同大小的兩珠組成的雙珠是否會有其他不一樣的現象發生。之前的研究中雙珠質心都在兩顆相同球的連接處而當大球黏小球時，兩顆球的質心就不是在黏接處，而是會靠近大球。